

Príkl. 1.	Príkl. 2.	Príkl. 3.	Príkl. 4.	Spolu bodov

Skúšková písomka z DYS ¹ MENO:

Príklad 1. [5 bodov]

- Pomocou prvého integrálu nájdite riešenie Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} x_1' = 2(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = 4x_1x_2, \\ x_1(0) = 0, x_2(0) = B, B > 0. \end{cases}$$

- Nájdite prvé 2 Picardove aproximácie riešenia rovnice

$$x'' = (x')^2x,$$

ktoré spĺňa podmienky $x(0) = -\frac{1}{2}$ a $x'(0) = 1$.

Príklad 2. [5 bodov]

- Nakreslite fázový portrét rovnice $x'' + 3|x'| + 2x = 0$.
- Preskúmajte fázový portrét sústavy $x' = x^2 + y$, $y' = x - y + a$ pre rôzne hodnoty parametra a . Nájdite bifurkačnú hodnotu parametra a nakreslite bifurkačný diagram a fázové portréty.
- Nakreslite diagram asymptotickej stability systému, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + y + bz, \\ \dot{y} &= x - 2y + bz, \\ \dot{z} &= -by + az, \end{aligned}$$

- Nakreslite diagram asymptotickej stability systému

$$\frac{dx}{dt} = a(y - x), \frac{dy}{dt} = x(b - z) - y, \frac{dz}{dt} = xy - cz$$

a určte, pre aké hodnoty parametra je systém disipatívny.

Príklad 3. [5 bodov]

- Pomocou nových nezávislých premenných riešte rovnicu $z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$, ak je $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.

¹Svoje tvrdenia je nutné zdôvodniť!

- Na $[-1, 1] \times \mathbb{R}$ riešte PDR prvého rádu $\sqrt{1-x^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, ak má riešenie spĺňať podmienku $u(0, y) = y$.

Príklad 4.

[5 bodov]

- Nájdite dva nezávislé prvé integrály sústavy

$$x' = xz, y' = yz, z' = xy\sqrt{z^2 + 1}$$

- Nájdite riešenie Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + 3y, \\ x(0) = 1, y(0) = 1. \end{cases}$$

- Ukážte, že pre vhodné $\theta, \eta \in \mathbb{R}$ je systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sin x_2 + 2x_3x_4 - (\eta + 1)x_1, \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + 1}} + 2x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_4^2 + 2\theta x_3x_2, \\ \dot{x}_4 &= 1 - 2\eta x_2x_4, \end{aligned}$$

Hamiltonov a nájdite Hamiltonián.