Diferenciálne rovnice (ÚMV/DFR/10)

Test písomnej časti skúšky **MENO:** ....

1. Jednoznačnosť riešenia DR $y' = t^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$ je zaručená pre

   (a) $t, y \in \mathbb{R}^2$
   (b) $t, y \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0$
   (c) $t, y \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0$
   (d) $t, y \in \mathbb{R}^2 : t \neq 0, y \neq 0$ [1b]

2. "Nech $f \in C^1(\mathbb{R})$ a $|f'(x)| < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$, potom f je kontrakcia", vyvráťte toto tvrdenie. [1.5b]

3. Nech $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Čomu sa rovná obsah plochy pod grafom ich konvolúcie $f * g$? [1b]

4. Ktoré tvrdenia sú pravdivé ?
   - Každý hyperbolický bod je nedegenerovaný.
   - Ak je bod hyperbolický, tak je degenerovaný.
   - Ak je bod degenerovaný, tak nie je hyperbolický.
   - Každý nedegenerovaný bod je hyperbolický . [1.5b]

5. Ktoré tvrdenia sú pravdivé ?
   - Diferenciálny systém zachovávajúci objem je Hamiltonov.
   - Pre autonómny systém platí jednoznačnosť Cauchyho úlohy.
   - Exponenciálne stabilný systém je asymptoticky stabilný.
   - Jednorozmerný systém s 1 parametrom má maximálne 1 bifurkačnú hodnotu.
   - [1.5b]

6. Je zobrazenie $\sqrt{x}$ kontrakcia na $[1, \infty)$? [1.5b]

7. Nech $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. Čomu sa rovná obsah plochy pod grafom ich konvolúcie $f * g$? [1b]

8. Predpokladajme, že obe vlastné čísla prislúchajúcej Jacobiho matice pre 2D autonómny systém ODR sú reálne a záporné, potom je stacionárny bod
   - nestabilný uzol
   - stabilný uzol
   - sedlo
   - špirála

   [1b]

9. Sú nasledujúce funkcie prvé integrály sústavy

   $$x' = y - z, \quad y' = z - x, \quad z' = x - y \quad ?$$

   - $x + y + z$
   - $\sin(x + y + z)$
   - $xy + yz + zx$ [1b]

10. Ak $I(x, y)$ je prvý integrál dvojrozmerného autonómneho DR systému, potom je ním aj $\phi(I(x, y))$, kde $\phi \in C^1$. Dokážte, alebo vyvráťte. [1b]

11. Napíšte definíciu nestabilného riešenia. [1.5b]

12. Nájdite Fourierovu transformáciu Fourierovej transformácie funkcie $f \in L(\mathbb{R}) : \hat{f} \in L(\mathbb{R})$. [1.5b]

13. Je riešenie problému $x' = -x \sin t, \quad x(t_0) = x_0$ asymptoticky stabilné ? [1b]

14. Môže mať systém $x' = y + x^3, \quad y' = x + y + y^3$ periodické trajektórie? [1b]

15. Nech y_1, y_2 sú riešenia DR $y'' - ty' + 3y = t$. Ktoré z nasledujúcich funkcií su tiež jej riešeniami ?

(a) $y_1 + y_2$
(b) $5y_1$
(c) (a) aj (b)
(d) ani (a) ani (b) [1b]

16. Označte funkcie, ktoré môžu byť kandidátmi Ljapunovovej funkcie triviálneho riešenia pre nejaký 2D systém.

- $\cos^2(x) - 1 + y^2$
- y^2
- $x^6 + \sin(y^2)$
- $(x^2 + y^2)y^2 + \dfrac{(x^2 + y^2)x^2}{2}$ [1b]

17. DR $y' = \dfrac{2y}{y^2 - 2x}$ možno riesiť ako

(a) lineárnu, separovateľnú aj exaktnú
(b) separovateľnú, exaktnú, ale nie lineárnu
(c) exaktnú, ale nie separovateľnú ani lineárnu
(d) lineárnu, exaktnú, ale nie separovateľnú [1.5b]

18. Určte maximálny interval existencie Cauchyho úlohy $y' + \dfrac{t}{t+5}y = \dfrac{t^2}{t-1}, \; y(2) = 0$.

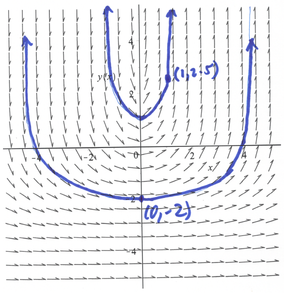
(a) $(-\infty, 1)$
(b) $(0, 1)$
(c) $(0, \infty)$
(d) $(1, \infty)$ [1b]

19. Metóda neurčitých koeficientov môže byť použitá v prípade rovnice

(a) $t^2 y'' - 4y = t$
(b) $y'' + 4y' + 4y = e^t$
(c) $y'' + 4y' + 4y = \sec(t)$ [1b]

20. Určte A, B tak, aby riešenia Cauchyho úlohy $\dot{x} = x - y + e^{-t}, \; \dot{y} = y - x + e^{-t}, \quad x(0) = A, y(0) = B$ spĺňali $\lim\limits_{t \to \infty} (x(t), y(t)) = (0, 0)$. [1.5b]

21. Ktorá z DR prislúcha vektorovému poľu na obrázku ?



(a) $y' = xy$
(b) $y' = ye^x$
(c) $y' = xe^y$
(d) $y' = e^y$ [2b]