Prednáška 1

Dynamické systémy

doc. Jozef Kiseľák, PhD.

ÚMV/DYS/19 Dynamické sytémy
11. októbra 2023

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

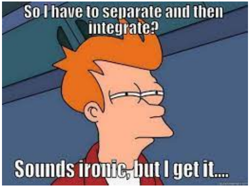
"Science is a differential equation. Religion is a boundary condition."

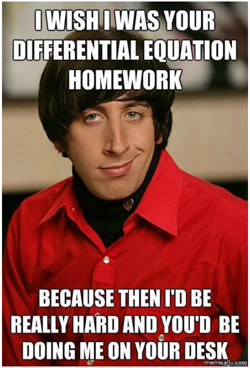
— Alan Turing (1912-1954)

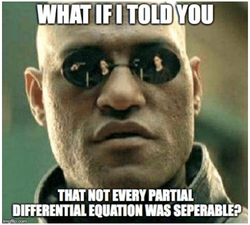
"Thus the partial differential equation entered theoretical physics as a handmaid, but has gradually become mistress."

— Albert *Einstein* (1879-1955)

Čo je diferenciálna/diferenčná rovnica?
"Rovnica obsahujúca závislú premennú (funkciu) a jej derivácie/diferencie podľa nezávislých premenných."
Sú $y(y(x)) + y'(x) = \sin x$ a $x(n+1) - nx(x(n)) = n!$ ODR? - potreba korektnej definície;







when u talk to your friend who's a math major

- Teória DR - vznik kalkulu, koniec 17. storočia;
- 1676, Newton  vyriešil DR pomocou nekonečných radov;
- 1693, Leibniz  vyriešil "svoju" prvú DR.

Newton circa 1671 napísal článok[1] *The Method of Fluxions and Infinite Series*, kde klasifikoval 3 triedy DR:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

Poznámka 1.

Fibonacciho postupnosť (súvis so zlatým rezom)

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

už v 200 rokov pred Kristom v Indii. Neskôr v knihe *Liber Abaci* (Leonardo of Pisa - Fibonacci) v roku 1202. Jedna z definícií:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_0 = 0, \quad F_1 = 1.$$

[1] Publikovaný až v roku 1736.

V dnešnej dobe rozlišujeme niekoľko základných typov rovníc súvisiacich s infinitezimálnym počtom:

- **Obyčajné diferenciálne rovnice**;
- Parciálne diferenciálne rovnice;
- **Diferenčné rovnice**;
- *Stochastické diferenciálne rovnice*;
- Integrálne rovnice.

Podľa Edwarda Inceho (1891–1941), už v roku 1675 Gottfried Leibniz napísal prvú ODR v tvare $\int x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$.

ODR a PDR:

- Nasledovníci Leibniza - bratia Jacob Bernoulli (1654-1705) a Johann Bernoulli (1667-1748);
- 18. storočie - Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782), Joseph Lagrange (1736-1813), Pierre Laplace (1749-1827);
- 1739 - Leonhard Euler použil metódu integračného faktora;
- 1828 - George Green (1793-1841) "má niečo dočinenia" s integrabilitou vektorového poľa (totálny diferenciál nejakej funkcie);
- Ďalší "rovničiari" - William Hamilton (1805-1865), Carl Jacobi (1804-1851), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Johann Pfaff (1765-1825).

DS:

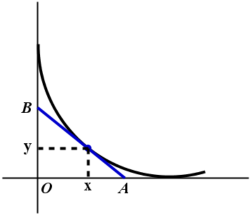
- Henri Poincaré (1854-1912) napr. *New Methods of Celestial Mechanics*
- George David Birkhoff (1884-1944) - dokázal Poincarého *Last Geometric Theorem* ako špeciálny prípad problému troch telies, ergodická teória
- Aleksandr Lyapunov (1857-1918) - teória stability
- Stephen Smale (1930-dodnes) - topologický pohľad, homoklinická orbita
- Oleksandr Mykolaiovych Sharkovsky (1936-dodnes) - chaos diskrétnych systémov

Motivačné úlohy

Príklad (Asteroida).

Treba nájsť krivku, ktorá:

- má v každom bode dotyčnicu,
- úsek dotyčnice medzi osami je $a > 0$



rovnica dotyčnice:

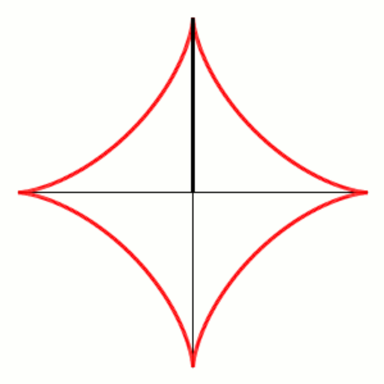
$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),\ y = f(x),\ f'(x) \neq 0$$

$$A = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right],\quad B = [0, f(x) - xf'(x)]$$

Dostávame tak nelineárnu DR v tvare

$$\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 + [f(x) - xf'(x)]^2 = a^2$$

Príklad (Asteroida).



- Reálna algebrická krivka 6 stupňa;
- $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
- Patrí medzi superelipsy;
- Vzniká aj "rotáciou kružnice po kružnici".

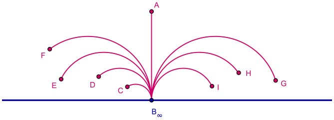
Príklad (Geodetiky).

Krivka na n-rozmernej variete je geodetikou, ak

$$\frac{d^2x_k}{ds^2}+\sum_{i,j=1}^{n}\Gamma_{ij}^{k}\frac{dx_i}{ds}\frac{dx_j}{ds}=0, \tag{1}$$

kde Γ_{ij}^{k} sú Christoffelove symboly.

Poincarého hyperbolický model (viď rovnobežky):



$$(\mathrm{d}s)^2=\frac{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}{y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2}-\frac{2}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=0,\quad \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}s^2}+\frac{1}{y}\left(\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2-\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2\right)=0$$

Príklad (Analýza rekurentných algoritmov (dynamické programovanie)).

Algoritmy rozdeľuj a panuj - quicksort:

Nech X_n, meria "čas" potrebný na triedenie n objektov podľa navrhovaného algoritmu, potom pre $T_n = E[X_n]$ platí

$$T_n = \frac{n+1}{n} T_{n-1} + \frac{2n-1}{n}, \; T_0 = 0, \; T_1 = 1.$$

Príklad (ResNet).

Nech a^ℓ sú aktivácie (výstupy) neurónov vo vrstve ℓ a g je aktivačná funkcia pre vrstvu ℓ. Majme maticu váh $W^{\ell-1,\ell}$ pre neuróny medzi vrstvami $\ell-1$ a ℓ a maticu váh $W^{\ell-2,\ell}$ pre spojenie neurónov z vrstvy $\ell-2$ do ℓ, potom dopredná propagácia cez aktivačnú funkciu

$$a^\ell = g(W^{\ell-1,\ell} \cdot a^{\ell-1} + b^\ell + W^{\ell-2,\ell} \cdot a^{\ell-2})$$

Príklad (Schrödingerova rovnica).

Pohyb v časticovej kvantovej mechanike je popísaný časovým vývojom komplexnej vlnovej funkcie. Základná pohybová rovnica je:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V \right) \psi \,,$$

kde $\hbar$ je Planckova konštanta, ψ je vlnová funkcia, m je hmotnosť částice, V je potenciálna energia a $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ je Laplaceov operátor

Príklad (Black-Scholesov model).

Lineárna parciálna DR 2. rádu

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

opisuje vývoj ceny opcie $V(S,t)$ (derivátu), ak sa cena akcie S riadi geometrickým Brownovym pohybom.

Definícia 1.

Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú metrické priestory, zobrazenie $T : X \to Y$ sa nazýva **Lipschitzovsky spojité**[a] (na X), akk $\exists\ L \geq 0$ tak, že pre všetky $x_1,\ x_2 \in X$ platí

$$d_Y(Tx_1, Tx_2) \leq L\, d_X(x_1, x_2).$$

Najlepšiu konštantu L spĺňajúcu predchádzajúcu nerovnosť nazývame **Lipschitzova konštanta**. Ak $L < 1$ nazývame zobrazenie **kontrakcia (kontraktívne)**, ak $L = 1$ **neexpanzívne** a ak $L > 1$ **expanzívne**. Navyše, ak platí

$$d_Y(Tx_1, Tx_2) < d_X(x_1, x_2)$$

pre všetky $x_1,\ x_2 \in X$, tak zobrazenie nazývame **kontrahujúce**. Bod $p \in X$ nazveme **pevným bodom** zobrazenia $T : X \to X$, akk $T(p) = p$.

[a] Označujeme $\mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(X, Y)$, príp. $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X, Y)$ pre tzv. lokálne lipschitzovské funkcie.

Poznámka 2.

Zrejme platí

kontrakcia $\Rightarrow$ kontrahujúce zobr. $\Rightarrow$ neexpanzívne zobr. $\Rightarrow$ Lipschitzovské zobr.

a navyše

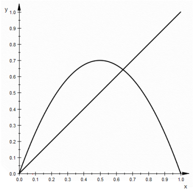
- $C^1(X,Y) \subset \mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(X,Y) \subset \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X,Y) \subset C(X,Y)$
- $\mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(X,Y) \subset UC(X,Y)$

Problém 3.

Ukážte, že

- $Tx = \sqrt{x}$ nie je na $\mathbb{R}^+$ kontrakcia;
- $Tx = x^2 - x + 1$ nie je na $[0,1]$ kontrakcia, ale má tam jediný pevný bod;
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \to (0,y)$ má nekonečne veľa pevných bodov;
- $Tx = x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ je kontrahujúce na $\mathbb{R}$, ale nie je kontrakcia a nemá tam pevný bod.

Príklad.



Iterácia
$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ s $r \in (1, 1 + \sqrt{6})$
a počiatočnou hodnotou $0 < x_1 < 0.1$
konvergujúca k pevnému bodu
$x^* : \quad f(x^*) = x^*, \ f(x) = rx(1 - x).$

Nech $\mathcal{L}$ je množina všetkých Lipschitzovských konštánt pre $\boldsymbol{f}$ a $L_{\boldsymbol{f}} := \inf \mathcal{L}$ je najlepšia Lipschitzova konštanta.

Lema 4 (Postačujúca podmienka Lipschitzovskosti)**.**

Nech $\boldsymbol{f} \in C(U, \mathbb{R}^n)$ má ohraničené parciálne derivácie na množine U, potom $\boldsymbol{f}$ vyhovuje na U Lipschitzovej podmienke a $L_{\boldsymbol{f}} \leq \sup\limits_{U} ||J_{\boldsymbol{f}}||$. Navyše ak U je konvexná, tak platí $L_{\boldsymbol{f}} = \sup\limits_{U} ||J_{\boldsymbol{f}}||$.

Veta 5 (Banachova (1922), o pevnom bode - princíp kontrakcie).

Nech (X, d) je (neprázdny) úplný metrický priestor a $F : X \to X$ je kontrakcia (s konštantou L). Potom má zobrazenie F práve jeden pevný bod $u \in X$. Navyše, pre každé $x \in X$ platí $F^{[n]}(x) \to u$ pre $n \to \infty$, pričom pre rýchlosť konvergenice platí $d\left(u, F^{[n]}x\right) \leq \frac{L^n}{1-L}\, d\left(Fx, x\right), \ x \in X$.

Dôsledok 6.

Nech S je uzavretá podmnožina (X, d) a $F : S \to S$ je kontrakcia. Potom pre ľubovoľné $x_0 \in S$ postupnosť $\{x_n\}_{n \geq 0}$, $x_{n+1} = Fx_n$ konverguje k pevnému bodu zobrazenia F.

Poznámka 7.

Podmienka uzavretosti je nutná. Napr. pre $X = \mathbb{R}$ a $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ je $F : S \to S$, $Fx = \frac{x+1}{2}$ kontrakcia, ale nemá pevný bod v S.

Dôsledok 8.

Nech (X, d) je (neprázdny) úplný metrický priestor a $F : X \to X$ je také, že $F^{[n]}$ je kontrakcia pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, potom $Fx = x$ má jediné riešenie.

Poznámka 9.

Ak F je kontrakcia s konštantou L, potom aj $F^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$ je kontrakcia s konštantou L^n. Opak platiť nemusí.

Zoberme $(Fg)(t) = \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $t \in [0,1]$, $F : C([0,1]) \to C([0,1])$ (so suprémovou metrikou). Ukážte, že

$$(F^{[n]}g)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Pre $g_1 \equiv c$, $g_2 \equiv 0$ je $d_\infty(g_1, g_2) = |c| = d_\infty(Fg_1, Fg_2)$ a teda F nemôže byť kontrakcia, ale

$$d_\infty(F^{[2]}f, F^{[2]}g) = \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t (t-\tau)(f(\tau) - g(\tau)) \right| \mathrm{d}\tau \le \frac{1}{2} d_\infty(f, g)$$

$\forall\ f, g \in C([0,1])$. A teda $F^{[2]}$ kontrakciou je.

- Schauderova - neprázdna uzavretá konvexná podmnožina Banachovho priestoru + spojitosť zobrazenia s kompaktným obrazom $\longrightarrow$ existencia
- Tichonovova - lokálne konvexný topologický vektorový priestor + neprázdna kompaktná konvexná množina + spojitosť zobrazenia $\longrightarrow$ existencia
- Browderova - neprázdna uzavretá ohraničená konvexná množina v rovnomerne konvexnom Banachovom priestore + neexpanzívnosť zobrazenia $\longrightarrow$ existencia
- ale aj Kakutani atď.

Základné pojmy

Zopakujme si základný pojem matematickej analýzy. Nech $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Spojitý prípad

Derivácia funkcie f v bode $x \in I$ (ak existuje) je definovaná limitou

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_h f(x)}{h}$$

Derivácia vyššieho rádu je prirodzene definovaná iteratívnym spôsobom

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Diskrétny prípad

Nech $h > 0$ je diferenčný krok, dopredná diferencia funkcie f v bode $x \in I$ je definovaná ako

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x).$$

Požadujeme, aby bola f definovaná na $M = \{x + nh\}_{n=0}^{\infty}$. Diferencia vyššieho rádu je $\Delta_h^n f(x) := \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f(x))$, teda

$$\Delta_h^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x+ih).$$

Pre $n = 2$ je

$$\Delta_h^2 f(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x).$$

Lineárna zámena $x = th$, kde t je nová premenná dáva pre $g(t) := f(ht)$
$\Delta f(x) = f(h(t+1)) - f(ht) = g(t+1) - g(t)$.
Teda BÚNO $h = 1$.

Nech $F(x, z_0, z_1, \dots, z_k)$ je reálna funkcia $(k+2)$, $k \geq 1$ premenných, ktorá vzhľadom k premennej z_k nie je konštantná, definovaná na oblasti (otvorená súvislá) $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}$.

Spojitý prípad

Definícia 1.

$$F(x, \underbrace{y, y', \dots, y^{(k)}}_{\text{neznáme}}) = 0 \qquad (2)$$

nezávislá premenná

závislá premenná a jej derivácie

nazývame **obyčajnou diferenciálnou rovnicou k-tého rádu**.

Diskrétny prípad

Definícia 2.

$$F(n, \underbrace{x, \Delta x, \dots, \Delta^k x}_{\text{neznáme}}) = 0 \qquad (3)$$

nezávislá premenná

závislá premenná a jej diferencie

nazývame **obyčajnou diferenčnou rovnicou k-tého rádu 1. typu**. Rovnicu

$$F(n, x(n), \dots, x(n+k)) = 0$$

nazývame **obyčajnou diferenčnou rovnicou k-tého rádu 2. typu**.

Prirodzene budeme požadovať, aby riešením bola funkcia (množina funkcií ?!), ktorá spĺňa:

- musí sa dať dosadiť do rovnice - existencia príslušných derivácií/diferencií;
- môžu sa nadobúdať len také hodnoty, ktoré patria do definičného oboru F;
- po jej dosadení (aj jej derivácií/diferencií) musí byť F identicky rovná nule.

Spojitý prípad

Definícia 3.

(Klasickým) riešením DR (2) v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ nazývame funkciu $\phi \in C^k(I)$, pre ktorú platí rovnosť (2) a pre každé $x \in I$ je $(x, \phi(x), \phi'(x), \dots, \phi^{(k)}(x)) \in \Omega$.

Diskrétny prípad

Definícia 4.

Riešením DR (3) v Ω na množine $M \subset \mathbb{R}$ nazývame funkciu ϕ, pre ktorú platí rovnosť (2) a pre každé $n \in M$ je $(n, \phi(n), \Delta\phi(n), \dots, \Delta^k\phi(n)) \in \Omega$.

Poznámka 5.

Všimnime si, že rovnice (2) a (3) sú vo všeobecnosti v implicitnom tvare a napr. členy $(y \circ y)(x), (x \circ x)(n)$ by spôsobili, že naše definície nebudú splnené. Ide o nelokálny typ operátora - kompozíciu.
Rád rovníc je najvyšší rád derivácie, resp. diferencie, ktorá v rovnici vystupuje - niekedy je však možné ho znížiť.
Rovnice (2) a (3) nazveme **lineárne**, ak je F lineárna funkcia v premenných $z_0, \ldots, z_k$.

Spojitý prípad

Príklad.

- $y' - x^3 y = \sin x$ je lineárna DR 1. rádu
- $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$ je nelineárna DR 2. rádu

Diskrétny prípad

Príklad.

- $n\,(\Delta^2 x)^2 = n\,x$ je nelineárna DR 2. rádu 1. typu
- $x(n+1) = \dfrac{1}{1 + x(n)}$ je nelineárna DR 1. rádu 2. typu

Spojitý prípad

Príklad.

Nelineárna DR $(y')^2 + x\,y' = y$ má 1-parametrickú triedu riešení $y(x) = cx + c^2$, $c \in \mathbb{R}$, ale funkcia $\tilde{y}(x) = -\dfrac{x^2}{4}$ je tiež jej riešením.

Diskrétny prípad

Príklad.

Rovnica $x(n+2) - 4x(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ má 2-parametrickú triedu riešení

$$x(n) = c_1 2^n + c_2(-2)^n, \; c_i \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 6.

Častokrát sa nám nepodarí nájsť riešenie rovníc (2) a (3) v explicitnom tvare. Niekedy však vieme nájsť také, ktoré spĺňa rovnicu $\Psi_1(x, y) = 0$, resp. $\Psi_2(n, x) = 0$ a je teda dané implicitne. V niektorých prípadoch ho dokonca nájdeme "iba" v parametrickom tvare.

Videli sme, že riešení môže byť aj nekonečne veľa. Ak by sme v tých prípadoch zvolili jeden bod v Ω, riešenie by už bolo iba jedno. Vo všeobecnosti pri riešení rovníc n-tého rádu obvykle dostaneme k "voľných" parametrov. Táto definícia je ovplyvnená teóriou pre lineárne rovnice, kde je priestor riešení vektorovým priestorom.

Poznámka 7.

Všeobecné riešenie rovníc (2) a (3) nazveme jej k-parametrickú triedu riešení.

Definícia 8.

Partikulárne riešenie rovníc (2) a (3) nazveme riešenie, ktoré neobsahuje žiadne ''voľné'' parametre.

Vidíme teda, že pre nelineárne rovnice existujú aj riešenia (**singulárne**), ktoré sa nedajú zahrnúť do jednej parametrickej triedy.

Systémy rovníc

Spojitý prípad

Uvažujme sústavu DR pre neznáme funkcie $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$ reálnej premennej v tzv. **normálnom tvare** (derivácie sa dajú explicitne vyjadriť)

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_k), \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_k), \\ &\vdots \\ y_k' &= f_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_k), \end{aligned} \tag{4}$$

kde $\mathrm{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)^T$ sú dané funkcie definované a spojité na oblasti $\Omega = I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ a $' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$. Zavedením stĺpcových vektorov možno (4) zapísať aj v tvare

$$\boldsymbol{y}' = \mathrm{f}(t, \boldsymbol{y}). \tag{5}$$

Diskrétny prípad

Uvažujme sústavu DR pre neznáme funkcie $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ reálnej premennej v tzv. **normálnom tvare** (derivácie sa dajú explicitne vyjadriť)

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= f_1(n, x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)), \\ x_2(n+1) &= f_2(n, x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)), \\ &\vdots \\ x_k(n+1) &= f_k(n, x_1(n), x_2(n), \ldots, x_k(n)), \end{aligned} \tag{6}$$

kde $\mathrm{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_k)^T$ sú dané funkcie definované a spojité na oblasti $\Omega = I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$. Zavedením stĺpcových vektorov možno (4) zapísať aj v tvare

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \mathrm{f}(n, \boldsymbol{x}(n)). \tag{7}$$

Spojitý prípad

Aký je vzťah medzi sústavou k DR 1. rádu a jednou DR rádu k ? Nech y rieši rovnicu

$$y^{(k)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(k-1)}\right), \tag{8}$$

potom, ak označíme
$y_1 = y,\ y_2 = y', \dots, y_k = y^{(k-1)}$, bude $\boldsymbol{y}$ riešiť sústavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{k-1}' &= y_n \\ y_k' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_k) \end{aligned} \tag{9}$$

a naopak.

Diskrétny prípad

Aký je vzťah medzi sústavou k DR 1. rádu a jednou DR rádu k ? Nech x rieši rovnicu

$$x(n+k) = f\left(n, x(n), x(n+1), \dots, x(n+k-1)\right) \tag{10}$$

potom, ak označíme $y_1 = x(n),\ y_2 = x(n+1), \dots, y_k = x(n+k-1)$, bude $\boldsymbol{y}$ riešiť sústavy

$$\begin{aligned} y_1(n+1) &= y_2(n), \\ y_2(n+1) &= y_3(n), \\ &\vdots \\ y_k(n+1) &= f(n, y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)) \end{aligned} \tag{11}$$

a naopak.

Sústava rovníc je zložitejší objekt a nie každý systém možno previesť na rovnicu vyššieho rádu.

Spojitý prípad

Príklad.

Majme napríklad sústavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2, \\ y_2' &= \sqrt{y_2}. \end{aligned} \tag{12}$$

Zrejme ide o nezávislé (neprepojené) rovnice.

Teraz zderivujme prvú rovnicu v (5) podľa t a za y_j', dosadíme ich vyjadrenie dané rovnicami (5), dostaneme tak

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} y_j' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} f_j :=$$

$$:= F_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Toto opakujeme $(k-1)$-krát a teda

$$y_1^{(k)} := F_k(t, y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Diskrétny prípad

Príklad.

Majme napríklad sústavu

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= x_1(n), \\ x_2(n+1) &= x_2(n) + 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Teraz diferencujme prvú rovnicu v (7) podľa n a za x_j, dosadíme ich vyjadrenie dané rovnicami (7), dostaneme tak

$$x_1(n+2) = f_1(n+1, x_1(n+1), \ldots, x_k(n+1)) =$$

$$= f_1(n+1, f_1(n, x_1(n), \ldots, x_k(n)), \ldots,$$

$$f_k(n, x_1(n), \ldots, x_k(n))) =$$

$$:= F_2(n, x_1(n), \ldots, x_k(n)).$$

Toto opakujeme $(k-1)$-krát a teda

$$x_1(n+k) := F_k(n, x_1(n), \ldots, x_k(n)).$$

Spojitý prípad

Ak z rovníc

$$
\begin{aligned}
y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_k),\\
y_1'' &= F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_k),\\
&\vdots\\
y_1^{(k-1)} &= F_{k-1}(t, y_1, y_2, \dots, y_k), \qquad (14)
\end{aligned}
$$

môžeme vyjadriť $y_2, y_3, \dots, y_k$ ako funkcie premenných $t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k-1)}$, t.j.

$$y_j = \phi_j\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(k-1)}\right), \; j = 2, 3, \dots, k,$$

čo vieme v okolí bodu $(t, \boldsymbol{y}^0)$, v ktorom je $\det \tilde{\boldsymbol{F}}' \neq 0$, kde $\tilde{\boldsymbol{F}} = (f_1, F_2, \dots, F_{k-1})$ a derivácia je podľa vektora $(y_2, y_3, \dots, y_k)$, môžeme dosadením do $y_1^{(k)} = F_k(t, y_1, y_2, \dots, y_k)$, dostať pre y_1 rovnicu

$$y_1^{(k)} = F_k\left(t, y_1, \phi_2, \dots, \phi_k\right)$$

Diskrétny prípad

Ak z rovníc

$$
\begin{aligned}
x_1(n+1) &= f_1(n, \boldsymbol{x}(n)),\\
x_1(n+2) &= F_2(n, \boldsymbol{x}(n)),\\
&\vdots\\
x_1(n+k-1) &= F_{k-1}(n, \boldsymbol{x}(n)), \qquad (15)
\end{aligned}
$$

môžeme vyjadriť $x_2(n), x_3(n), \dots, x_k(n)$ ako funkcie premenných $n, x_1(n), x_1(n+2), \dots, x_1(n+k-1)$, t.j.

$$x_j(n) = \phi_j\left(n, x_1(n), x_1(n+1), \dots, x_1(n+k-1)\right)$$

$j = 2, 3, \dots, k$, čo vieme v okolí bodu $(t, \boldsymbol{y}^0)$, v ktorom je $\det \tilde{\boldsymbol{F}}' \neq 0$, kde derivácia je podľa vektora $(x_2, x_3, \dots, x_k)$, môžeme dosadením do $x_1(n+k) = F_k(n, \boldsymbol{x}(n))$, dostať pre x_1 rovnicu

$$x_1(n+k) = F_k\left(n, x_1(n), \phi_2, \dots, \phi_k\right)$$

Spojitý prípad

Problém 1.

V 1963 Edward Lorenz odvodil dynamický systém zo zjednodušených rovníc vynútenej konvekcie v atmosfére:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \tag{16}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y, \tag{17}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z, \tag{18}$$

kde $\sigma, \rho, \beta > 0$. Ukázalo sa, že pre isté hodnoty parametrov je chaotické (nestabilné?) správanie sa dôvodom nepresnosti dlhodobej predpovede počasia. Ukážte, že platí $x''' = \dfrac{(1+\sigma)(x')^2}{x} + x''\left(\dfrac{x'}{x} - \beta - \sigma - 1\right) - x'(x^2 + \beta\sigma + \beta) + \sigma x(\beta\rho - \beta - x^2)$.

Diskrétny prípad

Problém 2.

Nech $\Delta^3 x - 3\Delta x - 2x = 2^n$. Ukážte, že platí

$$x(m+1) - 3x(m) = 2^{m-2}.$$

Problém 3.

Nech

$$x(n+1) = x(n)y(n), \tag{19}$$

$$y(n+1) = x(n)^2 + y(n), \tag{20}$$

Ukážte, že platí
$y(n+2) = y(n+1)(1 + y(n)^3)$.

Spojitý prípad

Definícia 4.

Cauchyho začiatočná úloha:

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0 \end{cases} \tag{CU}$$

Nasledujúca veta, ako aj veta 10 majú tzv. lokálny charakter. Teda existencia, resp. jednoznačnosť riešenia je garantovaná iba na nejakom okolí bodu $t = t_0$.

Veta 5 (Peanova o existencii (1890)).

Nech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ je oblasť a $\boldsymbol{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Potom pre každý bod $(t_0, \boldsymbol{y}^0) \in \Omega$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahujúci t_0, na ktorom je definované riešenie $\boldsymbol{y} : I \to \mathbb{R}^k$ začiatočnej úlohy (CU).

Diskrétny prípad

Definícia 6.

Cauchyho začiatočná úloha:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(n, \boldsymbol{x}(n)) \\ \boldsymbol{x}(n_0) = \boldsymbol{x}^0 \end{cases} \tag{CUD}$$

Veta 7.

Nech existuje $X \subset U : \boldsymbol{x}^0 \in X$ a aj $\boldsymbol{x}(n) \in X, \forall n \in \mathbb{N}$, potom existuje riešenie $\boldsymbol{x} : M \to \mathbb{R}^k$ začiatočnej úlohy (CUD).

Definícia 8.

Hovoríme, že zobrazenie $\boldsymbol{f} \in C(I \times U = \Omega, \mathbb{R}^k)$ je **lokálne lipschitzovské** na Ω vzhľadom na $\boldsymbol{y}$, ak je splnená podmienka: $\forall\ (t_0, \boldsymbol{y}^0) \in \Omega$ existujú čísla $a > 0, b > 0, L \geq 0$ také, že

$$||\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})|| \leq L||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}||,$$

pre $\forall\ (t, \boldsymbol{y}), (t, \boldsymbol{x}) \in G, \quad G = \{(t, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k : |t - t_0| < a, ||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^0|| < b\} \subset \Omega.$

Poznámka 9.

Zrejme $f(x) = x^2 \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Spojitý prípad

Veta 10 (Picard-Lindelöf: o jednoznačnosti).

Nech $I \times U = \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $\boldsymbol{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ je lokálne lipschitzovské na Ω vzhľadom na $\boldsymbol{y}$. Potom $\forall\ (t_0, \boldsymbol{y}^0) \in \Omega\ \exists\ \delta > 0$ také, že na $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ existuje práve jedno riešenie úlohy (CU).

Poznámka 11.

Polomer z vety 10 je $\delta = \min\left\{a, \dfrac{\boldsymbol{b}}{K}\right\}$, kde $a, \boldsymbol{b}\ :\ I = B(t_0, a) \times B(\boldsymbol{y}^0, \boldsymbol{b})$, $K = \max\limits_{I} |f(t, \boldsymbol{y})|$. **Picardové aproximácie**:

$$\boldsymbol{y}^k(t) := \boldsymbol{y}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}\left(s, \boldsymbol{y}^{k-1}(s)\right)\, \mathrm{d}s,$$

$k = 1, \ldots, m$, kde $\boldsymbol{y}^0(t_0) = \boldsymbol{y}^0$.

Diskrétny prípad

Problém 12.

Zamyslite sa nad jednoznačnosťou riešenia úlohy (CUD).

Problém 13.

Vymyslite príklad, kde pre konečný počet hodnôt bude $x(n)$ definované ale nebude existovať riešenie úlohy (CUD).

Pozor, podmienka vo vete nie je nutnou.

Príklad.

Problém $y' = f(y),\ y(0) = \alpha,\ \alpha \in [0,1)$,

$$f(y) = \begin{cases} y \ln \dfrac{1}{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

má jediné riešenie $y(t) = \alpha^{e^{-t}}$, aj keď f nie je lok. lipsch. vzhľadom na y na $\mathcal{O}(0,0)$.

Problém 14 (Stanovte prvé 3 členy Picardovej postupnosti a I_δ).

Cauchyho úloha: $y' = t - y^2,\ y(0) = 0$.

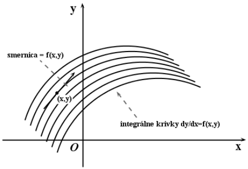
Rovnice 1. rádu

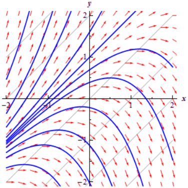
Spojitý prípad

Uvažujme DR 1. rádu v tzv. normálnom tvare

$$y' = f(x, y) \tag{1R}$$

na oblasti Ω_1, kde je f definovaná.



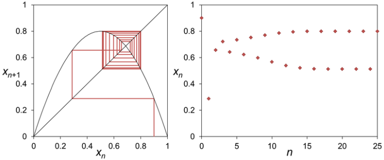


Bodu $(x, y) \in \Omega_1$ je priradená smernica dotyčnice k integrálnej krivke. Ω_1 sa nazýva **smerové pole** DR (1R). Smerové pole DR $y' = y - x$ vyznačené červenou farbou a tzv. integrálne krivky znázornené modrou farbou.

Diskrétny prípad

Uvažujme DR 1. rádu v tzv. normálnom tvare

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{1RD}$$



Pavučinový graf (Verhulstov diagram) a časový vývoj logistického zobrazenia.

Metóda priamej integrácie

Spojitý prípad

Formulácia problému:
pre danú $f \in C(a,b)$ nájdite všetky funkcie $y:(a,b) \to \mathbb{R}$, ktoré vyhovujú rovnici $y' = f(x)$.
Riešením je neurčitý integrál, resp. funkcia hornej hranice:

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s, \; x_0 \in (a,b).$$

Diskrétny prípad

Formulácia problému:
pre danú f definovanú na M nájdite všetky funkcie $x: M \to \mathbb{R}$, ktoré vyhovujú rovnici $\Delta x = f(n)$.
Riešením je tzv. (neurčitá) sumácia Δ^{-1} (alebo $\sum_n$) funkcie f na M, resp. antidiferencia: $x(n) = \Delta^{-1} f(n), \; n_0 \in M$, kde $\Delta \sum_n f(n) = f(n)$.

Problém 1.

Ukážte, že ak $\Delta x(n) = n$, potom

$$x(n) = \sum_n n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + c, c \in \mathbb{R}.$$

Separovateľné rovnice

- Separáciu premenných zaviedol v rokoch 1690-1694 Jacob I. Bernoulli.
- V roku 1690 v práci v časopise *Acta Eruditorum* uázal, že problému tautochróny je ekvivalentný s DR istého typu.
- Všeobecne túto metódu nájdenia riešenia sformuloval v roku 1694.
- Paradoxne, v diskrétnom prípade sa ukazuje, že ide o oveľa väčší problém.

Spojitý prípad

Rovnica

$$P(x) + Q(y)\,y' = 0 \tag{S}$$

sa nazýva **DR so separovanými premennými**. Metóda riešenia takýchto DR je veľmi jednoduchá.

Veta 3.

Nech $P \in C(a,b), Q \in C(c,d)$. Potom ϕ je riešením rovnice (S) na intervale $J \subset (a,b)$ vtedy a len vtedy, keď je na J implicitne určená rovnicou

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = c, \ \ c \in \mathbb{R}. \tag{FR}$$

Navyše, ak $\forall y \in (c,d) \quad Q(y) \neq 0$, potom každým bodom intrevalu $(a,b) \times (c,d)$ prechádza jediná integrálna krivka DR (S).

Diskrétny prípad

Tu sa obmedzíme iba na rovnicu autonómnu:

$$x(n+1) = f(x(n)) \tag{AD}$$

Ak riešenie existuje, tak preň zrejme platí $x(n) = f^{[n]}(x^0)$, kde $x^0 \in M$ je dané $x(0) = x^0$. Problém je, že iteráciu $f^{[n]}$ nemusíme nájsť v explicitnom tvare.

Príklad.

Nech $m \in \mathbb{Z}, \ x^0 \in [-1,1]$ a

$$x(n+1) = \cos(m \arccos x).$$

Potom platí $x(n) = \cos(m^n \arccos x), \ \ n \in \mathbb{N}$. $T_m(x) := \cos(m \arccos x)$ sú tzv. Čebyševove polynómy.

Spojitý prípad

Rovnica

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)\,y' = 0 \qquad \text{(SP)}$$

sa nazýva **separovateľná**. Ak $P_1, Q_1 \in C(a,b)$, $\quad P_2, Q_2 \in C(c,d)$ a $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ na $(a,b) \times (c,d)$, tak sa rovnica (SP) dá previesť na rovnicu so separovanými premennými:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,y' = 0. \qquad \text{(SPb)}$$

Rovnice (SP) a (SPb) sú za daného predpokladu ekvivalentné.

Diskrétny prípad

Môže pomôcť nasledujúca úvaha: Nech $\xi : \xi(f(x)) = \xi(x)\,f'(x)$, potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} z(f(x)) = \dot{z}(f(x))f'(x) = \dot{z}(f(x))\frac{\xi(f(x))}{\xi(x)}.$$

Teda, ak položíme $\dot{z}(x) = \dfrac{1}{\xi(x)}$, máme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} z(f(x)) = \dot{z}(f(x))\xi(f(x))\dot{z}(x) = \dot{z}(x).$$

Integráciou podľa premennej x dostaneme $z(f(x)) = z(x) + c, c \in \mathbb{R}$. Z toho

$$z(x(n+1)) = z(x(n)) + c \qquad \text{(FRD)}$$

a teda, ak vyriešime rovnicu $\eta(n+1) = \eta(n) + c, \eta = z \circ x$, potom $x(n) = z^{-1}(\eta(n))$. Problém samozrejme je, že musíme nájsť funkciu ξ.

Poznámka 4.

Funkcionálna rovnica (FR) a (FRD) predstavuje všeobecné riešenie (S), resp. (AD), avšak vo všeobecnosti ''iba'' v implicitnom tvare.

Poznámka 5.

Vo všeobecnosti predpoklad nenulovosti neplatí. Vtedy riešenia rovnice $Q_1(x)P_2(y) = 0$ rozdelia interval $(a, b) \times (c, d)$ na podmnožiny ekvivalentnosti rovníc (SP) a (SPb). Rovnica (SP) môže mať singulárne riešenia, ktoré spĺňajú rovnosť $P_2(y) = 0$. Iné riešenia už rovnica (SP) nemôže mať.

Príklad.

Nájdime všetky riešenia rovnice

$$x\,\mathrm{d}x + (y+1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Máme $\displaystyle\int x\,\mathrm{d}x + \int (y+1)\,\mathrm{d}y = 0$, alebo $x^2 + y^2 + 2y = C$.

Homogénne rovnice

- Jacob I. Bernoulli redukoval homogénnu DR prvého rádu na separovateľnú.
- Dnes už vieme, že metóda, ktorú použil je založená na transformácii premenných.
- So svojím bratom Johannom I. transformovali aj ďalšie DR na explicitne riešiteľné DR.

Definícia 7.

Funkciu $F(x_1, \dots, x_n)$ nazveme **homogénnou funkciou stupňa** k, $k \in \mathbb{N}_0$, ak platí $F(t\,x_1, \dots, t\,x_n) = t^k\,F(x_1, \dots, x_n)$ pre každé $t \neq 0$ a $(x_1, \dots, x_n) \in D_F$. Prípadne hovoríme o podmnožine $U \subset D_F$, kde uvedená vlastnosť platí.

Príklad.

$G(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ je zrejme homogénna funkcia stupňa 2 na $\mathbb{R}^2$.

$H(x, y) = \ln\left(\dfrac{x^2 - xy}{4x^2 + y^2}\right)$ je homogénna funkcia stupňa 0 na D_H.

$J(x, y) = y^2 - x$ nie je homogénna funkcia žiadneho stupňa.

Spojitý prípad

Homogénna rovnica je

$$P(x, y) + Q(x, y)\, y' = 0, \qquad \text{(H)}$$

ak P, Q majú homogenitu rovnakého stupňa.

Veta 8.

Vzťah $y = x\,u$ prevedie (H) na separovateľnú rovnicu

$$P(1, u) + Q(1, u)\, u + x\, Q(1, u)\, u' = 0. \qquad \text{(SH)}$$

Nech $x \neq 0$. Ak u rieši (SH), potom $x\,u$ rieši (H). Ak y rieši (H), potom $u = \dfrac{y}{x}$ rieši (SH).

(H) je homogénna, ak $y' = \xi\,(y/x)$, resp. aj $H(y/x, y') = 0$, ak vieme vyjadriť y'.

Diskrétny prípad

Homogénna rovnica je

$$H\left(\frac{x(n+1)}{x(n)}, n\right) = 0 \qquad \text{(HD)}$$

Veta 9.

Transformácia $z(n) = \dfrac{x(n+1)}{x(n)}$ prevedie (HD) na funkcionálnu rovnicu $H(z(n), n) = 0$.

Napríklad, ak H je polynóm v premennej z, potom dostaneme rovnicu
$\prod_{i=1}^{m} (z(n) - A_i(n)) = 0$, kde A_i sú dané funkcie.

Spojitý prípad

Príklad.

Uvažujme DR

$$y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)-x\,y'=0.$$

Zrejme P, Q sú homogénne funkcie stupňa 1 na množine, kde $xy>0$. Transformáciou $y=xu$ dostaneme rovnicu

$$u\ln u = x\,u'.$$

Tá má 1-parametrickú triedu riešení $u(x)=\mathrm{e}^{cx}$, $c\in\mathbb{R}$, ktorá obsahuje aj riešenie $u(x)\equiv 1$. Všetky riešenia pôvodnej rovnice obsahuje 1-parametrická trieda: $y(x)=x\,\mathrm{e}^{cx}$, $c\in\mathbb{R}$.

Diskrétny prípad

Príklad.

Rovnica

$$x^2(n+1)+(3-n)x(n+1)x(n)-3nx^2(n)=0$$

je zrejme homogénna. Z rozkladu

$$(x(n+1)+3x(n))(x(n+1)-nx(n))=0$$

máme dve 1-parametrické triedy riešení $x(n)=c_1\,(-3)^n$ a $x(n)=c_2\,(n-1)!$, $c_i\in\mathbb{R}$.

Poznámka 10.

Rovnicu prevediteľnú na tvar

$$y' = \frac{y}{x}\, f(x^n\, y^m), \tag{HZ}$$

kde $n, m \in \mathbb{Z}$ $(\mathbb{R})$ nazývame **zovšeobecnená homogénna**. Analogicky použitím substitúcie $z = x^n\, y^m$ transformujeme (HZ) na separovateľný tvar

$$x\, z' = n\, z + m\, z\, f(z).$$

Zrejme pre $n = -m$ ide o homogénnu rovnicu.

Príklad.

Majme $y' + \frac{2}{x^2} - y^2 = 0$, ktorú upravíme na tvar $y' = \frac{y}{x}\left(x\, y - \frac{2}{x\, y}\right)$. Zrejme $n = m = 1$. Použitím $z = x\, y$ dostaneme

$$z' = \frac{z}{x}\left(1 + z - \frac{2}{z}\right).$$

Odtiaľ $z(x) = \frac{c + 2x^3}{c - x^3}$, $c \in \mathbb{R}$, kde riešenie $z(x) \equiv -2$ je už obsiahnuté. Avšak singulárne riešenie $z(x) \equiv 1$ nie (všimnime si, že pre $|c| \to \infty$ by to tak bolo).

Lineárne rovnice 1. rádu

Spojitý prípad

Lineárna DR 1. rádu má tvar

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{L}$$

kde p, g sú dané. Ak $g \equiv 0$ na (a, b), tak

$$y' + p(x)y = 0, \tag{Lh}$$

nazývame **homogénna**, alebo aj bez pravej strany.

Diskrétny prípad

Lineárna DR 1. rádu má tvar

$$x(n+1) = p(n)x(n) + g(n), \tag{LD}$$

kde p, g sú dané. Ak $g \equiv 0$ na (a, b), tak

$$x(n+1) - p(n)x(n) = 0, \tag{LDh}$$

nazývame **homogénna**, alebo aj bez pravej strany.

Spojitý prípad

Veta 12.

Ak $p, g \in C(I)$, potom

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \left[\int g(x)\, \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x \right]$$

je všeobecné riešenie (L) na I; rovná sa súčtu všeobecného riešenia (Lh) a partikulárneho riešenia (L). Každým bodom pásu $I \times \mathbb{R}$ prechádza práve jedna integrálna krivka daná grafom funkcie

$$\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(u)\,\mathrm{d}u} \left[\int_{x_0}^{x} g(u)\, \mathrm{e}^{\int_{x_0}^{u} p(s)\,\mathrm{d}s}\, \mathrm{d}u + y_0 \right]$$

Diskrétny prípad

Veta 13.

Ak p, g sú definované na M, potom

$$x(n) = \prod_{i=n_0}^{n-1} p(i) \left(K + \sum_{j=n_0}^{n-1} \frac{g(j)}{\prod_{i=n_0}^{j} p(i)} \right)$$

je všeobecné riešenie (LD) na M; rovná sa súčtu všeobecného riešenia (LDh) a partikulárneho riešenia (LD). Každým bodom množiny $M \times \mathbb{R}$ prechádza práve jedna integrálna krivka daná grafom funkcie

$$x(n) = x_0 \prod_{i=n_0}^{n-1} p(i) + \sum_{j=n_0}^{n-1} g(j) \left[\prod_{i=j+1}^{n-1} p(i) \right]$$

Bernoulliho rovnica

Spojitý prípad

Bernoulliho rovnica je

$$y' + p(x)\,y = g(x)\,y^{\alpha}, \qquad \text{(B)}$$

pričom $p, g \in C(a,b), g \not\equiv 0$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

Poznámka 15.

- Pre $\alpha = 0$ je to rovnica (L)
- Pre $\alpha = 1$ je to rovnica (Lh) a aj (S)

Diskrétny prípad

Pre $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ je **Bernoulliho** rovnica

$$\Delta(x^{1-\alpha}) = (p(n) - 1)x^{1-\alpha} + g(n), \qquad \text{(BD)}$$

Poznámka 16.

- Pre $\alpha = 0$ je to rovnica (LD)
- Pre $\alpha = 1$ neobsahuje závislú premennú

Spojitý prípad

Motivácia: pre $y \in C^1(a,b)$ platí $(y^m)' = p(y)^{m-1}y'$ pre "rozumné" m. Prenásobením rovnice (B) výrazom $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ dostaneme rovnicu

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)\,p(x)\,y^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x).$$

Uvažujeme substitúciu $z = y^{1-\alpha}$, odkiaľ $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Obdržíme tak lineárnu rovnicu 1. rádu

$$z' + (1-\alpha)p(x)\,z = (1-\alpha)g(x) \qquad \text{(BL)}$$

Veta 17.

Nech $p, g \in C(a,b), g \not\equiv 0$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ a z rieši (BL). Potom každá funkcia, ktorá je na $J \subset (a,b)$ riešením $y^{1-\alpha} = z$, má na J deriváciu a $y \not\equiv 0$ je na J riešením (B). Nech $y \not\equiv 0$ rieši na J (B). Potom pre (BL) existuje také riešenie z, že $z = y^{1-\alpha}$ na J.

Diskrétny prípad

Substitúciou $x(n)^{1-\alpha} = z(n)$ dostaneme $\Delta z = (p(n)-1)z + g(n)$, teda $z(n+1) = p(n)z(n) + g(n)$.

Veta 18.

Bernoulliho diferenčná rovnica (BD) pre neznáme x sa dá transformovať na lineárnu nehomogénnu rovnicu 1. rádu (LD) pre neznáme z, a teda explicitne riešiť.

Rovnica (BD) sa dá písať ako $x(n+1) = (p(n)x^{1-\alpha} + g(n))^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

Spojitý prípad

Príklad.

Majme rovnicu $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$. Zrejme $y \equiv 0$ je jej riešením. Je to rovnica (B) s $\alpha = \frac{1}{2}$. Substitúciou $z = \sqrt{y}$ dostaneme DR

$$2xz' - 4z = x^2,$$

pričom $z(x) = \frac{x^2}{2} \ln |c\,x|, \ c \neq 0$ je jej vše-obecné riešenie. Z toho

$$y(x) = \frac{x^4}{4} \ln^2 |c\,x|, \ c \neq 0.$$

Diskrétny prípad

Príklad (Bevertonov-Holtov model).

Diskrétny model populačného rozvoja: $n_{t+1} = \frac{R_0 n_t}{1 + n_t/M}$ je zrejme rovnica (BD) s $x(n) = n_t, \ \alpha = 2, \ p = \frac{1}{R_0}, \ g = \frac{1}{MR_0}$. Z $\frac{1}{n_t} = z_t$ dostaneme $z_{t+1} = \frac{1}{R_0} z_t + \frac{1}{MR_0}$. Z toho

$$n_t = \frac{Kn_0}{n_0 + (K - n_0)R_0^{-t}},$$

kde $K = (R_0 - 1)M$ je nosná kapacita prostredia.

Clairautova rovnica

Spojitý prípad

Rovnicu

$$y = xy' + g(y') \tag{C}$$

nazývame **Clairautova** . Uvedieme si **metódu hľadania riešení derivovaním**:
$y' = p$ pre $p = p(x)$. Potom zo vzťahu
$y = px + g(p)$ máme

$$y' = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right] = 0.$$

Takže

- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = y'' = 0$ a teda $y(x) = c_1\,x + c_2$, pričom nutne $c_2 = g(c_1)$;
- $x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} = 0$ implikuje riešenie v parametrickom tvare

$$x(p) = -\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}, \quad y(p) = -p\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} + g(p).$$

Diskrétny prípad

Rovnicu

$$x = n\Delta x + g(\Delta x) \tag{CD}$$

nazývame **Clairautova** . Položením $v(n) = \Delta x(n)$ máme $x(n) = nv(n) + g(v(n))$. Diferencovaním dostaneme $v(n) = (n+1)v(n+1) + g(v(n+1)) - nv(n) - g(v(n))$ a tak

$$(n+1)\Delta v(n)\left(1 + \frac{g(v(n+1)) - g(v(n))}{(n+1)\Delta v(n)}\right) = 0.$$

Takže

- $\Delta^2 v(n) = 0$ a teda $x(n) = c\,n + g(c)$;
- 2. činiteľ implikuje

$$\Delta(g \circ v) = \int_{v(n)}^{v(n+1)} g'(u)\,\mathrm{d}u = \Delta v \int_0^1 g'(h\Delta v + v)\,\mathrm{d}h$$

Spojitý prípad

Veta 20.

Nech g' je monotónna a spojitá. Potom nasledujúce funkcie riešia rovnicu (C).

a) $y = c\,x + g(c),\; c \in (\alpha, \beta),\; x \in \mathbb{R}$

b) $\begin{array}{l} x(s) = -g'(s), \\ y(s) = -s\,g'(s) + g(s), \end{array}$

$s \in (\alpha, \beta)$, $x \in (A, B)$, kde $A = \inf\limits_{s\in(\alpha,\beta)} \{-g'(s)\}$, $B = \sup\limits_{s\in(\alpha,\beta)} \{-g'(s)\}$.

Navyše každá priamka z *a*) je dotyčnicou grafu funkcie $z(x) = x\,h(x) + g(h(x)),\; x \in (A, B)$, $h = (-g')^{-1}$ a naopak. Ten graf nazývame **obálkou** systému priamok (vo všeobecnosti kriviek).

Diskrétny prípad

Veta 21.

Pre ľubovoľné $c \in \mathbb{R}$ rieši $x(n) = c\,n + g(c)$ rovnicu (CD). Ďalšie riešenia sú v tvare

$$n(v) = -1 - \int_0^1 g'(h\Delta v + v)\,\mathrm{d}h,$$
$$x(v) = n(v)v + g(v)$$

Spojitý prípad

Príklad (Asteroida).

V príklade o krivke, ktorej úsek dotyčnice medzi osami je $a > 0$ sme dospeli k DR

$$\left[x - \frac{y}{y'}\right]^2 + [y - xy']^2 = a^2, \; y' \neq 0.$$

Po úprave dostaneme

$$y = xy' \pm a\frac{|y'|}{\sqrt{1+(y')^2}}.$$

Takže hľadanou funkciou je buď $y = cx \pm a\dfrac{|c|}{\sqrt{1+c^2}}$, $c \neq 0$, alebo funkcia určená rovnicami

$$x = \mp a\frac{\operatorname{sgn}(s)}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \; y = \pm a\frac{\operatorname{sgn}(s)s^3}{(1+s^2)^{\frac{3}{2}}}, \; s \neq 0.$$

Diskrétny prípad

Príklad.

Majme rovnicu $x = n\Delta x + (\Delta x)^2$. Vieme, že $x(n) = cn + c^2$ je riešením. Navyše $n = -1 - 2\int_0^1 (h\Delta v + v)\,\mathrm{d}h = -1 - 2v - \Delta v$, teda $n = -1 - v(n) - v(n+1)$. Z toho $\Delta x = v(n) = k(-1)^n - \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{4}$, $k \in \mathbb{R}$. Nakoniec

$$x(n) = \frac{k(-1)^n}{2} - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{16} + k^2 = $$

$$= \left(k(-1)^n - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{n^2}{4}.$$

Poznámka 22.

Niekedy sa dá uvedená metóda použiť aj v prípade iných rovníc a je dokonca výhodné derivovať podľa premennej p namiesto x. Uvažujme rovnicu $F(x, y, y') = 0$ a hľadajme riešenia, ktoré majú $y'' \neq 0$ na nejakom J. Funkcia $p = y'(x)$ má zrejme diferencovateľnú inverziu $x(p)$. Derivovaním rovnice $F(x(p), y(x(p)), p) = 0$ dostaneme $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + p\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{\partial F}{\partial p} = 0$. Ak naviac $\frac{\partial F}{\partial x} + p\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, z predošlej rovnice máme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{F_p}{F_x + p\,F_y}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = -\frac{pF_p}{F_x + p\,F_y},$$

pričom dúfame, že to vieme vyriešiť.

Príklad.

Vyriešme rovnicu $(y')^2 - 2yy' - 2x = 0$. Derivovaním podľa p dostaneme

$$(1+p^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = p - y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = \frac{p(p-y)}{1+p^2}.$$

2. rovnica má riešenie

$$y(p) = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{1}{2}\left[p - \frac{\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}{\sqrt{1+p^2}}\right].$$

Exaktné diferenciálne rovnice

Pre funkcie $M, N \in C$ uvažujme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \quad M \not\equiv 0. \tag{21}$$

Po úprave rovnice (21) vyjadrujú

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Definícia 23.

Nech $\Omega \in \mathbb{R}^n$ je otvorená, potom pole $\mathrm{T} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazývame **potenciálové (konzervatívne)**, ak existuje (dostatočne hladká) funkcia $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tak, že $\nabla U = \mathrm{T}$ na Ω. Funkcia U sa nazýva **potenciál** poľa T.

Príklad.

Zrejme $U = \dfrac{x^4 + y^4}{2}$ je potenciál poľa $\mathrm{T} = (2x^3, 2y^3)$ na $\mathbb{R}^2$.
Nie je však zrejmé, že pole $\mathrm{S} = (y, -x)$ nemá potenciál.

Definícia 24.

Nech X, Y sú metrické priestory. Dve zobrazenia $f_0 : X \to Y$ and $f_1 : X \to Y$ nazveme **homotopické** ak existuje spojité zobrazenie $H : [0,1] \times X \to Y$ tak, že $H(0,x) = f_0(x)$ a $H(1,x) = f_1(x)\ \ \forall x \in X$. Zobrazenie H nazývame **homotópia**.

Definícia 25.

(Oblúkovo) Súvislú množinu $D \in \mathbb{R}^n$ nazveme **jednoducho súvislá**, ak platí, že každá uzavretá krivka Γ obsiahnutá v D je homotopická s nejakým bodom $\mathrm{p} \in D$.

Pojem jednoducho súvislej oblasti sme potrebovali kvôli prípadu polí v $\mathbb{R}^2$, čo korešponduje s hľadaním riešení exaktných DR prvého rádu.

Príklad.

Nech $T_1(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad T_2(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}, \quad x, y \in M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Na M platí
$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
Dá sa ale ukázať, že pole T nemá potenciál na ľubovoľnej (otvorenej) množine obsahujúcej začiatok.

Veta 26 (Nutná a postačujúca podmienka potenciálnosti poľa).

1. Ak $\mathrm{T} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ má potenciál na Ω, potom platí
$$\frac{\partial T_j}{\partial x_i}(\mathrm{x}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathrm{x}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n \text{ v } \Omega. \tag{22}$$
2. Ak $\mathrm{T} \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, kde J je otvorený interval v $\mathbb{R}^n$ a platí (22) na J, potom tam má pole T potenciál U.
3. Ak $\mathrm{T} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoducho súvislá otvorená množina a platí (22) na D, potom tam má pole T potenciál U.

Ak je pole (M, N) potenciálové, potom ľavá strana je totálnym diferenciálom potenciálu U poľa (M, N) - preto sa takéto rovnice nazývajú **rovnice v tvare totálneho diferenciálu**, alebo **exaktné diferenciálne rovnice**.

Veta 27.

Ak je pole (M, N) spojité a potenciálové na $\mathcal{O}(x_0, y_0) \subseteq \mathbb{R}^2$,
$$M(x_0, y_0)^2 + N(x_0, y_0)^2 \neq 0$$
a U je jeho potenciál na $\mathcal{O}(x_0, y_0)$. Potom pre $N(x_0, y_0) \neq 0 \ \ (M(x_0, y_0) \neq 0\ )$ prvá (druhá) z rovníc (21) má ne nejakom okolí bodu $x_0 \ \ (y_0)$ práve jedno riešenie splňujúce $y(x_0) = y_0 \ \ (x(y_0) = x_0)$ dané rovnicou $U(x, y) = U(x_0, y_0)$.

Otázkou je, čo v prípade, že pole (M, N) nie je potenciálové ? Pozrime sa na nasledujúci príklad.

Príklad.

Ľahko sa presvedčíme[a], že pole $\mathrm{T}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right)$ nemá potenciál. Ale pole $\tilde{\mathrm{T}}(x, y) = x^2\mathrm{T}(x, y) = (x, y)$ ho má.

[a] Stačí overiť nutnú podmienku

Takže prirodzene zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 28.

Funkciu $\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nazývame **integračným faktorom** poľa T na množine $M \subset \mathbb{R}^m$, ak pole $\tilde{\mathrm{T}} = \mu\,\mathrm{T}$ má na M potenciál.

Z vety 26 ihneď máme nasledujúcu podmienku pre to, aby nejaká funkcia bola integračným faktorom.

Veta 29.

Ak sú parciálne derivácie poľa T spojité na $M \subset \mathbb{R}^n$. Aby funkcia $\mu : M \to \mathbb{R}$ so spojitými parciálnymi deriváciami na M bola integračným faktorom, musí platiť

$$\frac{\partial(\mu T_j)}{\partial x_i}(\mathrm{x}) = \frac{\partial(\mu T_i)}{\partial x_j}(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in M, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pre $\mu(x, y) \neq 0$ máme ekvivalentnú rovnicu

$$\mu M \,\mathrm{d}x + \mu N \,\mathrm{d}y = 0.$$

Ak je teda $\mu(x, y)$ integračný faktor poľa (M, N), potom z rovníc (21) máme riešenie dané implicitne rovnicou $U(x, y) = U(x_0, y_0)$, kde U je potenciál poľa $(\mu M, \mu N)$. Teda podľa vety 29 existuje integračný faktor a je riešením rovnice

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 0. \tag{23}$$

To je síce parciálna diferenciálna rovnica 1. rádu a jej určenie je vo všeobecnosti ťažké, ale je v špeciálnom tvare a to nám pomôže.

Otázka: ako nájsť integračný faktor ? Vo všeobecnosti je to veľmi ťažká úloha.

• **Metóda I.**

Hľadajme $\mu(x, y)$, ktoré závisí iba na x resp. y. Dosadením takého μ do (23) dostaneme ODR, ktorej riešenie vieme nájsť. Teda máme

$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int H(x)\,\mathrm{d}x}$, $\quad H(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N}$. Analogicky sa odvodí podmienka pre tvar integračného faktora závisiaceho iba na y.

Problém 30.

Nájdite touto metódou integračný faktor pre rovnicu (vyriešte ju)

$$\left(x^2y + 2xy + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Problém 31.

Ukážte, že pole (M, N) má IF závisiaci iba na danej funkcii $\phi(x, y)$ (tj. tvaru $\mu = H(\phi(x, y))$, kde H je funkcia jednej premennej) vtedy a len vtedy, keď funkcia $\dfrac{N_x - M_y}{M\phi_y - N\phi_x}$ závisí iba na $\phi(x, y)$.

Príklad (IF v špeciálnom tvare $\mu = h(x^p y^q)$).

Overte, že rovnica $(5x^2y - 6y^4)\,\mathrm{d}x + (4x^3 - 14xy^3)\,\mathrm{d}y = 0$ nie je exaktná. Ukážeme, že má integračný faktor v tvare $\mu = h(x^p y^q)$. Z nutnej podmienky máme

$$h' y^{q-1} x^{p-1} \left[qx(5x^2y - 6y^4) - py(4x^3 - 14xy^3)\right] = h\left[7x^2 + 10y^3\right],$$

tj. musí platiť $5(q+1) = 4(p+3)$, $-6(q+4) = -14(p+1)$ a teda $p = 2$, $q = 3$. Nájdením IF nájdeme aj riešenie pôvodnej DR v tvare $U = x^5y^4 - 2x^3y^7 =$ konšt.

- **Metóda II.**

Metóda použitím "inšpekcie". Ukážeme si ju na príklade.
Rovnicu

$$\mathrm{x}\,\mathrm{d}\mathrm{x} + \mathrm{y}\,\mathrm{d}\mathrm{y} = \mathrm{m}(\mathrm{x}\,\mathrm{d}\mathrm{y} - \mathrm{y}\,\mathrm{d}\mathrm{x})$$

prepíšeme na tvar

$$\mathrm{d}(x^2 + y^2) = 2mx^2\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Predelením oboch strán výrazom (IF) $x^2 + y^2$ dostaneme exaktnú rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{2m\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \leftrightarrow \mathrm{d}\left\{\ln\left(x^2 + y^2\right) - 2m\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = 0.$$