Prednáška 2

Dynamické systémy

doc. Jozef Kiseľák, PhD.

ÚMV/DYS/19 Dynamické sytémy
2. novembra 2022

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Spojitý prípad

Lineárna DR vyššieho *n*-tého rádu:

$$y^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} p_{k-i}(t)\, y^{(k-i)} = q(t), \qquad \text{(Lk)}$$

kde $q, p_i \in C(a,b),\ i = 0, \ldots, k-1.$

Dôsledok 1.

Pre každé $t_0 \in (a,b)$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ existuje jediné riešenie ϕ na (a,b) DR (Lk), ktoré spĺňa $\phi^{(i)}(t_0) = b_i,\ i = 0, \ldots, k-1.$

Diskrétny prípad

Lineárna DR vyššieho *n*-tého rádu:

$$p_k(n)x(n+k) + \cdots + p_0(n) = q(n), \qquad \text{(LkD)}$$

kde $p_0 \neq 0$ and $p_k \neq 0$.

Dôsledok 2.

Nech p_i a q sú definované pre $n =\in M$ a $p_0 \neq 0$ and $p_k \neq 0$. Potom $\forall n_0 \in M$ a $x_0, \ldots, x_{k-1}$ existuje jediné $x(n)$, ktoré spĺňa (LkD) pre $n \in M$ a $x(n_0 + l) = x_l, l = 0, \ldots, k-1.$

Spojitý prípad

Označme ĽS (Lk) ako $L_k(y)$, t.j. ako operátor.

Veta 3.

1. Operátor L_k je lineárny na $C^k(a,b)$.
2. Lineárna kombinácia riešení DR $L_k(y) = 0$ je tiež jej riešením.
3. DR $L_k(y) = 0$ má vždy **triviálne** riešenie.

Diskrétny prípad

Označme ĽS (LkD) ako $D_k(x)$, t.j. ako operátor.

Veta 4.

1. Operátor D_k je lineárny.
2. Lineárna kombinácia riešení DR $D_k(x) = 0$ je tiež jej riešením.
3. DR $D_k(x) = 0$ má vždy **triviálne** riešenie.

Definícia 5.

Reálne (komplexné) funkcie $f_i, i = 1, \ldots, k$ sú **lineárne závislé** na množine J, akk existuje nenulová k-tica reálnych (komplexných) čísel **c**, že $\forall x \in J$ platí: $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x) = 0$. V opačnom prípade ich nazveme **lineárne nezávislé**.

Spojitý prípad

Definícia 6.

Maticu

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{bmatrix},$$

ozn. $\mathcal{W}(f_1, \dots, f_k)$, nazývame **Wronského matica** funkcií $f_1, \dots, f_k$ (na J) a jej determinant $\det \mathcal{W}(f_1, \dots, f_k)(x) =: W(f_1, \dots, f_k)(x)$ nazývame **wronskián**.

Diskrétny prípad

Definícia 7.

Maticu

$$\begin{bmatrix} u_1(n) & \cdots & u_k(n) \\ u_1(n+1) & \cdots & u_k(n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1(n+k-1) & \cdots & u_k(n+k-1) \end{bmatrix},$$

ozn. $\mathcal{C}(f_1, \dots, f_k)$, nazývame **Casoratiho matica** funkcií $u_1, \dots, u_k$ (na M) a jej determinant $\det \mathcal{C}(u_1, \dots, u_k)(n) =: C(u_1, \dots, u_k)(n)$ nazývame **casoratián**.

Spojitý prípad

Veta 8 (O LN systému riešení).

Nech $y_1, \ldots, y_l$ je systém riešení $L_k(y) = 0$ na J. Potom

1. ak $l > k$, sú tieto riešenia lineárne závislé;
2. ak $l = k$, tento systém je lineárne nezávislý na J vtedy a len vtedy, ak $W(y_1, \ldots, y_k)(t) \neq 0 \ \forall t \in J$;
3. vždy existuje k lineárne nezávislých riešení .

Dôsledok 9.

$W(y_1, \ldots, y_k)(t)$ je na J buď identicky rovný nule, alebo tam nie je rovný nule v žiadnom bode.

Diskrétny prípad

Veta 10 (O LN systému riešení).

Nech $x_1, \ldots, x_l$ je systém riešení $D_k(y) = 0$ na M. Potom

1. ak $l > k$, sú tieto riešenia lineárne závislé;
2. ak $l = k$, tento systém je lineárne nezávislý na M vtedy a len vtedy, ak $C(x_1, \ldots, x_k)(n) \neq 0 \ \forall n \in M$;
3. vždy existuje k lineárne nezávislých riešení .

Dôsledok 11.

$C(x_1, \ldots, x_k)(n)$ je na M buď identicky rovný nule, alebo tam nie je rovný nule v žiadnom bode.

Množinu k lineárne nezávislých riešení na $J(M)$ nazývame jej **fundamentálny systém riešení (FSR)** na $J(M)$.

Spojitý prípad

Veta 12.

Nech $y_1, \dots, y_k$ je FSR rovnice $L_k(y) = 0$ na J. Potom každé jej riešenie y na J dá sa napísať ako (vhodná) lineárna kombinácia riešení z tohto FSR:

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(t)$$

a je jej všeobecným riešením.

Diskrétny prípad

Veta 13.

Nech $x_1, \dots, x_k$ je FSR rovnice $D_k(x) = 0$ na M. Potom každé jej riešenie x na M dá sa napísať ako (vhodná) lineárna kombinácia riešení z tohto FSR:

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n)$$

a je jej všeobecným riešením.

Spojitý prípad

Veta 14.

Nech $y_h(t;\boldsymbol{c}) = \sum_{i=1}^{k} c_i y_i(t)$ je všeobecným riešením $L_k(y) = 0$. Nech $y_p(x)$ rieši rovnicu (Lk). Potom všeobecné riešenie rovnice (Lk) má tvar $y = y_h + y_p$.

Veta 15 (LMVK)**.**

Nech $y_1, \dots, y_k$ je FSR rovnice $L_k(y) = 0$ prislúchajúcej (Lk). Potom jej part. riešenie je

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{k} y_i \int \frac{W_i}{W}\,\mathrm{d}t,$$

kde $W_i = \det \mathcal{W}_i$, ak $\mathcal{W}_i$ vznikne z $\mathcal{W}$ nahradením i-tého stĺpca vektorom $(0, \dots, 0, q)^T$.

Diskrétny prípad

Veta 16.

Nech $x_h(n;\boldsymbol{c}) = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n)$ je všeobecným riešením $D_k(x) = 0$. Nech $x_p(n)$ rieši rovnicu (LkD). Potom všeobecné riešenie rovnice (LkD) má tvar $x = x_h + x_p$.

Veta 17 (LMVK)**.**

Nech $x_1, \dots, x_k$ je FSR rovnice $D_k(y) = 0$ prislúchajúcej (LkD). Potom jej part. riešenie je $x_p(n) = \sum_{i=1}^{k} a_i(n)\, x_i(n)$, pričom

$$C(\boldsymbol{x})(n+1) \begin{bmatrix} \Delta a_1(n) \\ \vdots \\ \Delta a_k(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ q(n)/p_k(n) \end{bmatrix}.$$

Spojitý prípad

Príklad.

Riešme $y'' - 6t^{-2}y = t\ln t$. Nech $y(t) = t^a$, potom $a \in \{-2, 3\}$ a $y_h = c_1 t^3 + c_2 t^{-2}$. Z toho

$$y_p = t^3 \int \frac{-t^{-1}\ln t}{-5}\,\mathrm{d}t + t^{-2}\int \frac{t^4 \ln t}{-5}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{t^3 \ln^2 t}{10} + \frac{t^3}{25}\left(\frac{1}{5} - \ln t\right).$$

Diskrétny prípad

Príklad.

Riešme $x(n+2) - 7x(n+1) + 6x(n) = n$. Nech $x(n) = b^n$, potom $b \in 0, 6$ a $x_h(n) = c_1 + c_2 6^n$. Z

$\Delta a_1(n) + 6^{n+1}\Delta a_2(n) = 0,$

$\Delta a_1(n) + 6^{t+2}\Delta a_2(n) = t$ je $\Delta a_1(n) = -\dfrac{n}{5}$ a

$\Delta a_2(n) = \dfrac{n6^n}{30}$. Z toho nakoniec

$$a_1(n) = -\frac{n(n-1)}{10},\ a_2(n) = -\frac{6^{-n}}{25}(n+1/25).$$

Dôležité transformácie

Spojitý prípad

Definícia 1.

Nech $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, potom ich **konvolúcia** je

$$h(\boldsymbol{x}) := (f * g)(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

Veta 2 (Vlastnosti konvolúcie)**.**

Ak konvolúcie $f * g, g * h, \frac{\partial}{x_i} f * g$ existujú, tak

a) $f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h$
b) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
c) $\frac{\partial}{x_i}(f * g) = \frac{\partial}{x_i} f * g$
d) $\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x} \int_{\mathbb{R}^n} g(\boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}\boldsymbol{x}$

Diskrétny prípad

Definícia 3.

Nech $x, y : \mathbb{N}^k \to \mathbb{R}$, potom ich **konvolúcia** je

$$(x * y)(\boldsymbol{n}) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_k=-\infty}^{\infty} x(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{m}) y(\boldsymbol{m})$$

Veta 4 (Vlastnosti konvolúcie)**.**

Ak konvolúcie $f * g, g * h, (\Delta f) * g$ existujú, tak

a) $f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h$
b) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
c) ak $k = 1$, potom $\Delta(f * g) = \Delta(f) * g$

Poznámka 5.

Ak je nosič (support) funkcie $f : X \to \mathbb{R}$ definovaný ako $\operatorname{supp}(f) = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$, tak pre $f_1, f_2 : \operatorname{supp}(f_i) \subset (0, \infty)$ je $\operatorname{supp}(f_1 * f_2) \subset (0, \infty)$ a $(f_1 * f_2)(x) = \int_0^x f_1(x - y) f_2(y)\,\mathrm{d}y, x > 0$ a $(f_1 * f_2)(x) = 0$, ak $x \leq 0$.

Podobne pre x_1, x_2 je to $(x * y)(n) = \sum_{m=0}^{n} x(n-m)y(m), n > 0$.

Príklad.

Nech X, Y sú nezávisle náhodné veličiny s hustotami $f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{5}, & 0 \leq x \leq 5, \\ 0, & \text{inak}, \end{cases}$ a $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y}{2}, & 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{inak}, \end{cases}$. Nájdite hustotu náhodnej veličiny $X + Y$. Platí $f_Z(u) =$

$$\int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(u-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{10}\int_0^5 x(u-x)\mathbf{1}_{\{u-2 \leq x \leq u\}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{60}\begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ u^3, & u \leq 2, \\ 12\,u - 16, & u \leq 5, \\ -u^3 + 87\,u - 266, & u \leq 7, \\ 0, & 7 < u. \end{cases}$$

Spojitý prípad

Definícia 6.

Množina $\mathcal{L}^1_+$ obsahuje všetky komplexné funkcie f jednej reálnej premennej s vlastnosťami:

1. f je definovaná s.v. na $[0,\infty)$
2. $f \in \mathcal{L}^1([a,b]), [a,b] \subset [0,\infty)$
3. existuje $c_f \in \mathbb{R}: \quad f\,\mathrm{e}^{-c_f t} \in \mathcal{L}([0,\infty))$

Definícia 7.

Pre $f \in \mathcal{L}^1_+$ jej **Laplaceova transformácia** je

$$(\mathcal{L}f)\,(p) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t,\ p \in \mathbb{C},\ \Re\mathrm{e}\,(p) \geq c_f.$$

Diskrétny prípad

Definícia 8.

Jednostranná **$\mathcal{Z}$-transformácia** postupnosti $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ je funkcia $X(z)$ definovaná ako

$$X(z) = \mathcal{Z}(x_j) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x_j}{z^j},$$

ak rad konverguje na $|z| > R$ pre nejaké $R > 0$.

Postačujúca podmienka existencie je exponenciálna ohraničenosť
$\exists M > 0, c > 1: \ |x_j| \leq M\,c^j$ pre $j \in \mathbb{N}_0$.

Spojitý prípad

Príklad.

1. $(\mathcal{L}1)(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}_+\left[\frac{\mathrm{e}^{-pt}}{p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p},\ \Re\mathrm{e}\,(p) > 0$
2. $(\mathcal{L}e^{\alpha t})(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\alpha-p)t}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}_+\left[\frac{\mathrm{e}^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-\alpha},\ \Re\mathrm{e}\,(p) > \Re\mathrm{e}\,(\alpha)$
3. $(\mathcal{L}t^\nu)(p) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt}t^\nu\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\tau}\tau^\nu p^{-p-1}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{p-\alpha} = \frac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu+1}},\ \Re\mathrm{e}\,(p) > 0$

Diskrétny prípad

Príklad.

1. $\mathcal{Z}(a^j) = \sum_{j=0}^\infty \frac{a^j}{z^j} = \frac{z}{z-a},\ |z| > |a|.$
2. $X(z) = \mathcal{Z}(j) = \sum_{j=0}^\infty \frac{j}{z^j} = \sum_{j=0}^\infty \frac{j+1}{z^{j+1}} =$
   $= \frac{1}{z}\sum_{j=0}^\infty \frac{j+1}{z^j} = \frac{X(z)}{z} + \frac{\mathcal{Z}(1)}{z},\ |z| > 1.$
   Ale $\mathcal{Z}(1) = \frac{z}{z-1}$, a teda
   $X(z) = \frac{z}{(z-1)^2},\ |z| > 1.$

Definícia 9.

Pre komplexnú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ definujeme jej **FT** predpisom

$$(\mathcal{F}f)(\boldsymbol{\xi})\,\hat{f} := A^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} f(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

a **opačnú (inverznú)** FT predpisom

$$\left(\mathcal{F}^{-1}f\right)(\boldsymbol{x}) = \check{f} := B^n \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\,\langle \boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} f(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$$

kde čísla $A, B, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sú zviazané vzťahom $AB = \dfrac{|k|}{2\pi}$. Okrem prípadu $A = B = 1, k = 2\pi$ sa väčšinou používajú prípady $A = 1, B = \dfrac{1}{2\pi}, k = 1$ a $A = B = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, k = 1$.

Veta 10 (Základné vlastnosti FT).

1. $\check{f}(\xi) = (B/A)^n \, \hat{f}(-\xi)$
2. $\overline{\check{f}(\xi)} = (B/A)^n \, \hat{\overline{f}}(-\xi)$
3. $\check{\overline{f}}(\xi) = (B/A)^n \, \overline{\hat{f}(-\xi)}$
4. $\widehat{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})}(\xi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,\langle \xi, \boldsymbol{z}\rangle}\hat{f}(\xi), \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$
5. $\hat{f}(\xi - \boldsymbol{z}) = \widehat{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\,\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}\rangle} f(\boldsymbol{x})}(\xi), \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$
6. $\widehat{f(\varepsilon \boldsymbol{x})}(\xi) = |\varepsilon|^{-n}\hat{f}(\xi/\varepsilon), \ \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
7. Nech $f, g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, potom platí
$$(\mathcal{F} f * g)(\xi) = (1/A)^n \, (\mathcal{F} f)(\xi) \cdot (\mathcal{F} g)(\xi)$$
a
$$\left(\mathcal{F}^{-1} f * g\right)(\xi) = (1/B)^n \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi) \cdot \left(\mathcal{F}^{-1} g\right)(\xi).$$
8. Nech f, g sú zo Schwartzovho priestoru (rýchlo klesajúcich funkcií), potom platí
$$(\mathcal{F} fg)(\xi) = B^n \, (\mathcal{F} f)(\xi) * (\mathcal{F} g)(\xi)$$
a
$$\left(\mathcal{F}^{-1} fg\right)(\xi) = A^n \left(\mathcal{F}^{-1} f\right)(\xi) * \left(\mathcal{F}^{-1} g\right)(\xi).$$

Veta 11 (Vzťah FT k derivácii a násobeniu).

1. Nech $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ a $f^{(m)} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pre $|m| \le k$. Potom pre $m \le k$

$$\widehat{f^{(m)}}(\xi) = (\mathrm{i}k\xi)^m \hat{f}(\xi), \quad \left|(k\xi)^m\right| \left|\hat{f}(\xi)\right| \le |A|^n \left\|f^{(m)}\right\|_{\mathcal{L}^1}$$

pre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2. Nech f, $\boldsymbol{x}^m f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ pre $|m| \le k$. Potom $\hat{f}^{(i)} \in C_b(\mathbb{R}^n), i = 1, \ldots, k$ pre $|m| \le k$ a

$$\hat{f}^{(m)}(\xi) = (-\mathrm{i}k\widehat{\xi)^m f}(\boldsymbol{x})(\xi), \quad \left|\hat{f}^{(m)}(\xi)\right| \le |A|^n \left\|(k\boldsymbol{x})^m f\right\|_{\mathcal{L}^1}$$

pre $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Poznámka 12.

Pre $f \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ môžeme položiť

$$(\mathcal{F} f)(\xi) = \lim_{N\to\infty} A^n \int_{\|\mathbf{x}\| \le N} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\langle \mathbf{x}, \xi\rangle} f(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Spojitý prípad

Veta 13 (Základné vlastnosti LT).

Pre $f, \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_+$

1. Je to lineárny operátor.
2. $[\mathcal{L}f(\alpha t)](p) = \frac{1}{\alpha}[\mathcal{L}f(t)](\frac{p}{\alpha})$, $\alpha > 0$, $\Re e\ (p) \geq c_f$
3. $(\mathcal{L}f_\tau)(p) = e^{-p\tau}(\mathcal{L}f)(p)$, $\Re e\ (p) \geq c_f$, $\tau > 0$, $f_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t-\tau), & t \geq \tau. \end{cases}$
4. $[\mathcal{L}(e^{\sigma t} f(t))](p) = (\mathcal{L}f)(p-\sigma)$, $\Re e\ (p) \geq c_f + \Re e\ (\sigma)$
5. Ak $f * \tilde{f}$ existuje pre s.v. t, potom $f * \tilde{f} \in \mathcal{L}^1_+$ a platí
$$[\mathcal{L}(f * \tilde{f})](p) = (\mathcal{L}f)(p)\,(\mathcal{L}\tilde{f})(p),$$
$$\Re e\ (p) \geq \max\{c_f, c_{\tilde{f}}\}.$$

Diskrétny prípad

Veta 14 (Základné vlastnosti ZT).

1. Je to lineárny operátor.
2. $\mathcal{Z}(K\,x_j) = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K-1} X\left(z^{\frac{1}{K}} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{K}j}\right)$
3. $a^j\mathcal{Z}(x_j) = X(a^{-1}z)$
4. $\mathcal{Z}(x_{j-i}) = z^{-i}X(z)$, $i > 0$ a $x_j = 0\ \forall j < 0$
5. $\mathcal{Z}(x_{j+i}) = z^iX(z) - z^i\sum_{j=0}^{i-1} x_j z^{-j}$
6. $\mathcal{Z}(x_{j+1} - x_j) = (z-1)X(z) - zx_0$
7. Ak $X(z)$ existuje pre $|z| > a$ a $Y(z)$ existuje pre $|z| > b$, potom $\mathcal{Z}(x_j * y_j) = X(z)Y(z)$ pre $|z| > \max\{a, b\}$

Spojitý prípad

Veta 15 (LT a derivovanie).

Ak $f \in C^k(\mathbb{R}_0^+), f^{(j)} \in \mathcal{L}_+^1$, $j = 1, 2, \ldots, k$, potom pre $n \leq k$ platí

$$[\mathcal{L}(f^{(n)})](p) = p^n(\mathcal{L}f)(p) - \sum_{j=0}^{n-1} p^j f^{(n-j-1)}(0^+),$$

$\Re\mathrm{e}\,(p) \geq c$, kde c je najväčšia z konštánt odpovedajúcich deriváciám funkcie f.

$\mathcal{L}f$ je holomorfná v polrovine $\Re\mathrm{e}\,(p) \geq c_f$ a platí

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}(\mathcal{L}f)(p) = [\mathcal{L}((-1)^n f)](p), \; n \in \mathbb{N}.$$

Diskrétny prípad

Veta 16 (ZT a derivovanie).

Ak $X(z) = \mathcal{Z}(x_j)$ pre $|z| > r$, potom

$$\mathcal{Z}(j(j+1)\ldots(j+n-1)x_j) = (-1)^n z^n \frac{\mathrm{d}^n X(z)}{\mathrm{d}z^n}$$

- pre $n = 1$ je $\mathcal{Z}(j\,x_j) = -zX'(z)$
- pre $n = 2$ je $\mathcal{Z}(j(j+1)\,x_j) = z^2 X''(z)$

Spojitý prípad

Riešme

$ty'' - ty' + y = 2, \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = -4.$

Máme $\mathcal{L}\{ty'\} = -sY'(s) - Y(s)$ a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{ty''\} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathcal{L}\{y''\}\right)\\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right)\\ &= -s^2Y'(s) - 2sY(s) + y(0)\end{aligned}$$

Teda $Y'(s) + \frac{2}{s}Y(s) = \frac{2}{s^2}$, z čoho

$Y(s) = \frac{2}{s} + \frac{c}{s^2}$ a pomocou inverzie máme

$y(t) = 2 + ct$, pričom dopočítame $c = -4$.

Diskrétny prípad

Riešme

$$(n+1)x(n+1) - (50-n)x(n) = 0, \; x(0) = 1.$$

Máme $z\mathcal{Z}(n\,x(n)) - 50X(z) - zX'(z) = 0$, teda $-z^2X'(z) - 50X(z) - zX'(z) = 0$. ODR implikuje

$$X(z) = c(1 + 1/z)^{50}.$$

Nakoniec $x(n) = \binom{50}{n}$.

Príklad.

Riešme Airyho rovnicu $y'' - xy = 0$. Platí $\mathcal{F}\{y'' - xy\} = 0$ a teda máme ODR $-\xi^2\hat{y} - \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\hat{y} = 0$. Z toho je $\hat{y} = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi^3/3}$ a tak z inverzie

$$y(x) = \frac{c}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\xi x + \xi^3/3)}\,\mathrm{d}\xi = \frac{c}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \cos(\xi x + \xi^3/3)\,\mathrm{d}\xi$$

LR s konštantnými koeficientami

Pristúpime k úvaham o lineárnej DR s konštantnými koeficientami

Spojitý prípad

$$K_k(y) := y^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\, y^{(k-i)} = 0, \qquad (K_k)$$

kde $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, k-1$.

Veta 1.

Funkcia $y(t) = e^{\lambda t}$ je riešením DR (K_k) vtedy a len vtedy, ak λ je koreňom algebrickej rovnice (CH).

Diskrétny prípad

$$x(n+k) + \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\, x(n+k-i) = 0, \qquad \text{(KkD)}$$

kde $a_0 \neq 0$.

Veta 2.

Funkcia $x(n) = \lambda^n$ je riešením DR (KkD) vtedy a len vtedy, ak λ je koreňom algebrickej rovnice (CH).

Rovnicu

$$f(\lambda) = \lambda^k + \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\, \lambda^{k-i} = 0. \qquad \text{(CH)}$$

nazývame **charakteristickou rovnicou** a jej korene **charakteristickými koreňami**.

Spojitý prípad

Veta 3.

Nech (CH) má m rôznych charakteristických koreňov, pričom λ_i, $i = 1, \dots, m$ je k_i-násobný (teda $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$). Potom funkcie

$$\left\{ \mathrm{e}^{\lambda_i t}, t\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i - 1} \mathrm{e}^{\lambda_i t} \right\}_{i=1}^{m}$$

tvoria jej FSR.

Príklad.

Charakterstická rovnica pre DR $y'' + 2y' + y = 0$ má tvar $(\lambda + 1)^2 = 0$. Má jeden dvojnásobný koreň $\lambda_1 = -1$. Z toho máme FSR=$\{\mathrm{e}^{-t}, t\,\mathrm{e}^{-t}\}$.

Diskrétny prípad

Veta 4.

Nech (CH) má m rôznych charakteristických koreňov, pričom λ_i, $i = 1, \dots, m$ je k_i-násobný (teda $\sum_{i=1}^{m} k_i = k$). Potom funkcie

$$\left\{ \lambda_i^n, n\lambda_i^n, \dots, n^{k_i - 1} \lambda_i^n \right\}_{i=1}^{m}$$

tvoria jej FSR.

Príklad.

Charakteristická rovnica pre DR $x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = 0$ má tvar $(\lambda - 2)^2(\lambda - 3) = 0$. Má jeden dvojnásobný koreň $\lambda_1 = 2$. Z toho máme FSR=$\{2^n, n2^n, 3^n\}$.

Prvok vo FSR nemusí byť reálna funkcia. Platí však:

Lema 5.

Nech $z(t) = u(t) + \mathrm{i}\, v(t)$, kde u, v sú reálne funkcie reálnej premennej, je riešením DR (Lk). Potom

1. $u = \mathrm{Re}(z), v = \mathrm{Im}(z)$ sú tiež jej riešenia;
2. $\overline{z}(t) = u(t) - \mathrm{i}\, v(t)$ je tiež jej riešením;
3. pre začiatočné hodnoty z $\mathbb{R}$ je riešenie reálna funkcia.

Teda vieme že sa FSR musí dať zapísať pomocou reálnych funkcií. Nech FSR je $\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r, y_1, \dots, y_s, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_s}\}$, pričom zrejme $r + s = k$ a funkcie $\tilde{y}_i$ nech sú reálne.
Potom pre $\mathrm{Re}(y_j) = \dfrac{y_j + \overline{y_j}}{2}$, $\mathrm{Im}(y_j) = \dfrac{y_j - \overline{y_j}}{2\mathrm{i}}$, tvoria

$$\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r, \mathrm{Re}(y_1), \dots, \mathrm{Re}(y_s), \mathrm{Im}(y_1), \dots, \mathrm{Im}(y_s)$$

reálny FSR.

Spojitý prípad

DR tvaru

$$(ct+b)^k\, y^{(k)} + \sum_{i=1}^{k} a_{k-i}\,(ct+b)^{k-i}\, y^{(k-i)} = q(t), \tag{E}$$

kde $c, b, a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \dots, k-1,\ a \neq 0$, nazývame **(Cauchy)-Eulerova DR**.
Nech riešenia majú tvar $y = (ct+b)^{\lambda}$, tak dostaneme charakteristický polynóm

$$c^k \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda - j) + a_{k-1}\, c^{k-1} \prod_{j=0}^{k-2}(\lambda - j) + \cdots + a_1 c\lambda + a_0.$$

Diskrétny prípad

Pre jednoduchosť si tu uvedieme iba rovnicu 2. rádu:

$$n(n+1)\Delta^2 x + an\Delta x + bx = 0,\ a, b \in \mathbb{R}.$$

Nech $x(n) = \Gamma\left(\dfrac{n+\lambda}{n}\right)$, potom dostaneme charakteristickú rovnicu $\lambda^2 + (a-1)\lambda + b = 0$, pričom

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t,\ \ \mathrm{Re}(z) > 0$$

a pre $n \in \mathbb{N}$ je $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Príklad.

Riešme rovnicu

$$t^4 y^{(iv)} + 4t^3 y''' + 2t^2 y'' - 12ty' + 20y = 0.$$

Riešenie hľadáme v tvare $y = t^\lambda$. Po úprave dostaneme charakteristickú rovnicu

$$\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0,$$

ktorej korene sú $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_{3,4} = -1 \pm 2i$. FSR tvorí množina funkcií

$$\left\{ t^2, t^2 \ln t, \frac{\cos(2\ln(t))}{t}, \frac{\sin(2\ln(t))}{t} \right\}$$

overte to!

Znižovanie rádu

- ak $F(x, y^{(j)}, \dots, y^{(k)}) = 0,\ 1 \le j \le k-1$, tak $y^{(j)} = z$ redukuje rád rovnice - $F(x, z, z', \dots, z^{(k-j)}) = 0$
- ak $F(y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$, tak $y'(x) = z$, kde y bude nová nezávislá premenná zníži rád rovnice o 1
  napr. v prípade $k = 2$ máme $y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} z$, teda $F(y, z, z'z) = 0$
- pre $y^{(k)} = f(y^{(k-2)})$ máme $y^{(k-1)}\, y^{(k)} = f(y^{(k-2)})\, y^{(k-1)}$, teda, ak $y := y^{(k-2)}$ je to $y' y'' = f(y)\, y'$ a teda $(y')^2 = 2\int f(y)\,\mathrm{d}y$
- rovnica $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ je exaktná, ak $F(x, y^{(j)}, \dots, y^{(k)}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x, y^{(j)}, \dots, y^{(k-1)}) = 0$ a Φ je tzv. prvý integrál (podobne druhý ...)
- ak rovnica $F(x, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0$ nie je exaktná, hľadáme integračný faktor $\mu(x, y, y', \dots, y^{k-1})$

Problém 1.

Znížte rád rovnice $y^{(k)} = f(y^{(k-2)})$ tak, aby to bola DR prvého rádu.
Znížte rád rovnice $y'' = f(y)$ tak, aby to bola DR prvého rádu.

Príklad.

Majme rovnicu $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = 0$. Platí $\dfrac{y''}{y'} - \dfrac{2yy'}{1+y^2} = (\ln|y'| - \ln(1+y^2))' = 0$. Teda $y' = c(1+y^2)$ a tak $\arctan(y) = cx + b,\ c, b \in \mathbb{R}$.

Príklad.

Majme $yy'' = (y')^2$. Nech $\mu = \dfrac{1}{yy'}$, potom rovnica $\dfrac{y''}{y'} = \dfrac{y'}{y}$ je exaktná a dostaneme tak $y' = cy$, teda $y = ke^{cx},\ c, k \in \mathbb{R}$

Spojitý prípad

Veta 2.

Nech $y_1 \neq 0$ je riešením DR $L_2(y) = 0$ a z rieši $z' + (2y_1'/y_1 + p_1)z = 0$. Potom funkcie

$$y_1(t),\ y_2(t) = y_1(t)\int z(t)\,\mathrm{d}t$$

tvoria FSR rovnice $L_2(y) = 0$ na I.

Príklad.

Riešme $y'' - 6t^{-2}y = 0,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 0.$ Majme riešenie $y_1 = t^3$. Pre $y = t^3\int z\,\mathrm{d}t$ dostaneme $t^3z' + 6t^2z = 0$ s riešením $z = t^{-6}$. Teda $y_2 = t^{-2}$, spolu $y = c_1t^3 + c_2t^{-2}$.

Diskrétny prípad

Veta 3.

Nech $p_0 \neq 0, p_2 \neq 0$ a $x_1 \neq 0$ je riešením DR $D_2(x) = 0$ a c rieši $c(n+1) = \dfrac{p_0(n)}{p_2(n)}c(n) = 0$. Potom funkcie $x_1(n),\ x_2(n) = x_1(n)\sum \dfrac{c(n)}{x_1(n)x_1(n+1)}$ tvoria FSR rovnice $D_2(x) = 0$ na M.

Príklad.

Riešme $x(n+2) - x(n+1) - \dfrac{1}{n+1}x(n) = 0.$ Nech $x_1(n) = n+1$ je riešením. Casoratián spĺňa $c(n+1) = -\dfrac{c(n)}{n+1}$, teda $c(n) = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

Nakoniec $x_2(n) = (n+1)\sum_{j=0}^{n-1}\dfrac{(-1)^j}{(j+2)!}$.

Transformácie premenných

Transformácia závislej premennej

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0 \tag{1}$$

Použijeme substitúciu $y(t) = \psi(t)\,v(t)$, kde v je nová závislá premenná a ψ budeme hľadať tak, aby sme v rovnici

$$\left(p_1(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) + p_2(t)\psi(t) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\psi(t)\right)v(t) + \underbrace{\left(p_1(t)\psi(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t)\right)}_{=0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v(t) + \psi(t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}v(t) = 0$$

vynulovali člen 1. rádu, teda máme $\psi(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\int p_1(t)\,\mathrm{d}t}$. Ak budeme schopní nájsť bázu rovnice, tak nájdeme aj bázu tej pôvodnej.

Príklad.

Riešme rovnicu $y'' - 2\tan t\, y' + 5y = 0$. Máme $p_1(t) = -2\tan t$ a teda $\psi(t) = \sec t$. Takže máme $\sec t\,(v'' + 6v) = 0$ a z toho $y(t) = \sec t\,(A\cos(\sqrt{6}t) + B\sin(\sqrt{6}t))$.

Transformácia nezávislej premennej

$$y'' + p_1(t)y' + p_2(t)y = 0 \tag{2}$$

Použijeme substitúciu $z = u(t)$, $\tilde{y}(z) = y(u^{-1}(z))$, kde z je nová nezávislá premenná a u budeme hľadať tak, aby sme v rovnici

$$\frac{\mathrm{d}^2\tilde{y}}{\mathrm{d}z^2} + \underbrace{\frac{\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + p_1(t)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}}{(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}}_{=0} \frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}z} + \frac{p_2(t)}{(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\tilde{y} = 0$$

vynulovali člen 1. rádu, teda máme $z(t) = \int e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}$. Ak budeme schopní nájsť bázu rovnice, tak nájdeme aj bázu tej pôvodnej.

Poznámka 1.

Samozrejme v oboch prípadoch je možné položiť koeficienty rovné aj nenulovým konštantám.

Príklad.

Majme $y'' + xy' + e^{-x^2} y = 0$. Zrejme $p_2(x) = e^{-x^2}$ a teda $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = A\sqrt{p_2(x)} = Ae^{-x^2/2}$.
Napr. $z(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s$ a to dáva nulový koeficient pri 1. derivácii.

Už sme používali nelineárne transformácie na dosiahnutie cieľa, napr. pri Bernoulliho rovnici. Teoreticky je táto metóda použiteľná vždy, avšak je ťažké určiť akú transformáciu je potrebné použiť.

Problém 2.

Ukážte,že rovnica $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$ má v polárnych súradniciach tvar

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\phi} = \frac{1 - \sin(2\phi)}{\sin(2\phi)} r^2.$$

Problém 3.

Ukážte,že rovnica $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ má v súradniciach $u = x + y, v = x - y, w = xy - z$ tvar

$$1 = 2\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}.$$