Prednáška 3

Dynamické systémy

doc. Jozef Kiseľák, PhD.

ÚMV/DYS/19 Dynamické sytémy
5. decembra 2022

Lineárne sústavy

Spojitý prípad

Budeme uvažovať sústavu

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{1}$$

kde funkcie $b_j(t)$ a koeficienty matice $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \in M_{k\times k}(\mathbb{C}),\ i,j = 1,2,\dots,k$ sú spojité funkcie na $I \subset \mathbb{R}$.

Diskrétny prípad

Budeme uvažovať sústavu

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}(n), \tag{2}$$

kde funkcie b_j a koeficienty matice $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in M_{k\times k}(\mathbb{C}),\ i,j = 1,2,\dots,k$ sú definované funkcie na $M \subset \mathbb{R}$.

Pozrime sa na algebraickú štruktúru riešení systémov.

Veta 1.

Množina všetkých (vo všeobecnosti komplexných) riešení homogénneho systému prislúchajúcemu (1) (resp. (2)) tvorí k-rozmerný vektorový priestor.

Dôsledok 2.

Cauchyho úloha systému (1) (resp. (2)) má jediné riešenie.

Definícia 3.

Každú k-ticu lineárne nezávislých riešení sústavy (1) (resp. (2)) nazveme **fundamentálny systém (maticu)** riešení (FSR), ozn. Φ.

Spojitý prípad

Príklad.

Majme systém

$$\begin{aligned} y_1' &= \quad y_2, \\ y_2' &= \; -y_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Zrejme $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Diskrétny prípad

Príklad.

Majme systém

$$\begin{aligned} x_1(n+1) &= \qquad x_2(n), \\ x_2(n+1) &= \; -2x_1(n) - 3x_2(n). \end{aligned} \tag{4}$$

Zrejme $\mathbf{A}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ a

$$\Phi(n) = (-1)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 \\ -2^{n+1} & -1 \end{pmatrix}$$

Spojitý prípad

Definícia 4.

Adjungovaná matica: $\operatorname{adj}\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, kde $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$ a $\mathbf{A}_{ij}$ vznikne z $\mathbf{A}$ odstránením i-tého riadku a j-tého stĺpca.

Lema 5 (Jacobiho formula).

Nech $\mathbf{A} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ je hladké, potom $\mathrm{d}\det \mathbf{A} = \operatorname{tr}(\operatorname{adj}\mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{A})$ a teda $(\det \mathbf{A})' = (\det \mathbf{A})\operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A}'\right)$.

Veta 6 (Abelova-Liouvilleova formula).

Nech $\Phi(t)$ je FSR systému (1) s $\mathbf{b} \equiv 0$ na I, potom $\forall t, t_0 \in I^0$ platí
$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0)\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr}\mathbf{A}(\xi)\,\mathrm{d}\xi}$.

Diskrétny prípad

Keďže platí

$$\Phi(n+1) = \mathbf{A}(n)\Phi(n)$$

máme nasledujúcu vetu.

Veta 7.

Pre fundamentálnu maticu homogénneho systému prislúchajúcemu (1) platí

$$\det \Phi(n) = \det \Phi(n_0) \prod_{j=n_0}^{n-1} \det \mathbf{A}(j).$$

Geometrická interpretácia - vývoj objemu rovnobežnostena generovaného počiatočnými vektormi.

Príklad (Použitie Abelovej-Liouvilleovej formuly).

Riešme na $I = (0, \infty)$ systém

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \mathbf{y},$$

Jedno riešenie $\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$, $x \in I$, sme už našli. Ale z toho, že $\operatorname{tr} \mathbf{A}(x) = 0$ pre $x \in I$ a každý vektor matice

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{21}(x) & 1 \\ y_{22}(x) & x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

rieši náš systém, máme $c_1 := \det \Phi(x) = x\, y_{21}(x) - y_{22}(x)$, $x \in I$. Ďalej máme $(y_{21})'(x) = \frac{c_1}{x}$, teda $y_{21}(x) = c_1 \ln x + c_2$, $x \in I$ a navyše $y_{22}(x) = c_1 x \ln x + c_2 x - c_1$, $x \in I$. Voľba $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$ nám dáva lineárne nezávislé riešenie a tak

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \ln x & 1 \\ x \ln x - 1 & x \end{pmatrix}, \qquad x \in I.$$

Dôsledok 8.

Ak $\det \Phi(u_0) \neq 0$, tak $\det \Phi(u) \neq 0 \ \forall \ u \in U$. Ak $\det \Phi(u_0) = 0$, tak $\det \Phi(u) \equiv 0$ (kde $u \in \{t, n\}$ a $U \in \{I, M\}$).

Poznámka 9.

Všimnime si, že $\det \Phi$ je istou obdobou wronskiánu (casoratiánu) riešení pre rovnice vyšších rádov, niekedy sa tento pojem používa aj pre systémy.

Teraz treba ešte vyriešiť otázku, ako získame partikulárne riešenie, ak máme FSR. Odpoveď dáva napr. (podobne ako u lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov) metóda variácie konštánt.

Spojitý prípad

Veta 10 (Variácia konštánt)**.**

Nech $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^k$ je FSR homogénnej sústavy príslušnej k (1), potom pre každé spojité $\mathbf{b}$ existujú také funkcie $c_1(t), c_2(t), \dots, c_k(t)$, že funkcia

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{k} c_j(t)\,\mathbf{y}^j$$

rieši (1) a riešenie začiatočnej úlohy má tvar

$$\mathbf{y} = \Phi(t)\left(\Phi^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\,\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s\right) \tag{5}$$

Diskrétny prípad

Veta 11 (Variácia konštánt)**.**

Nech $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^k$ je FSR homogénnej sústavy príslušnej k (2), potom pre každé spojité $\mathbf{b}$ existujú také funkcie $c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n)$, že funkcia

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{k} c_j(n)\,\mathbf{x}^j$$

rieši (2) a riešenie začiatočnej úlohy má tvar

$$\mathbf{x} = \Phi(n)\left(\Phi^{-1}(n_0)\,\mathbf{x}^0 + \sum_{l=n_0}^{n-1} \Phi(l+1)^{-1}\,\mathbf{b}(l)\right) \tag{6}$$

Systémy lineárnych rovníc s konštantnými koeficientami

Spojitý prípad

Majme systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}. \tag{7}$$

Metóda výpočtu pomocou exponenciály matice $\mathbf{A}$. Riešenie bude $\mathbf{y}(t) = e^{t\,\mathbf{A}}\,\mathbf{c}$, kde $\Phi(t) = e^{t\,\mathbf{A}}$ a

$$e^{\mathbf{A}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!}.$$

Platí $e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$, $e^{\mathbf{A}^{\mathrm{T}}} = (e^{\mathbf{A}})^{\mathrm{T}}$, $\det\left(e^{\mathbf{A}}\right) = e^{\mathrm{tr}(\mathbf{A})}$ a ak $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ tak $e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}}$, inak $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{1}{n}\mathbf{A}}e^{\frac{1}{n}\mathbf{B}}\right)^n$ (Lieova súčinová formula).

Diskrétny prípad

Majme systém

$$\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(n). \tag{8}$$

V tom prípade pre $\mathbf{x}^0 := \mathbf{x}(0)$ je riešenie $\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}^0$, teda v tvare mocniny matice $\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\,\mathbf{A}\cdots\mathbf{A}}_{n\text{ krát}}$.

Naviac, ak máme systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{b}(n)$, teda $\mathbf{b} \neq 0$, tak

$$\mathbf{x}(n) = \mathbf{A}^n\mathbf{x}^0 + \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{A}^{n-m-1}\mathbf{b}(m).$$

Spojitý prípad

Metóda vlastných vektorov - predpokladajme, že riešenie (7) je v tvare $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{h}$, $t \in I$, kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je z $\mathbb{C}^k$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Po dosadení máme $\mathbf{y}' = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{h} = e^{\lambda t}\mathbf{Ah}$, $\forall\ t \in I$. Teda $(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $\forall\ t \in I$.

Diskrétny prípad

Metóda vlastných vektorov - predpokladajme, že riešenie (8) je v tvare $\mathbf{x}(n) = \lambda^n\mathbf{h}$, $n \in M$, kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je z $\mathbb{C}^k$ a $\lambda \in \mathbb{C}$. Po dosadení máme $\mathbf{x}(n+1) = \lambda^{n+1}\mathbf{h} = \lambda^n\mathbf{Ah}$, $\forall\ n \in M$. Teda $(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{h} = \mathbf{0}$, $\forall\ n \in M$.

Obe sústavy majú teda nenulové riešenie **h** iba vtedy, keď jej matica bude singulárna. Musí teda platiť

$$P(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

t.j. tzv. **charakteristický polynóm** (stupňa k) pre systém (7) (resp. (8)) je rovný nule.

Prípad navzájom rôznych vlastných hodnôt a prípad komplexných vlastných hodnôt.

Spojitý prípad

Veta 13.

Nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sú rôzne vlastné hodnoty $\mathbf{A}$, $\mathbf{v}^i$ je vlastný vektor zodpovedajúci λ_i, a $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ sú LN. Potom FSR rovnice (7) má tvar $\mathbf{y}^i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{v}^i$, $i = 1, \ldots, k$.

Veta 14.

Nech $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$ je m-násobný koreň $P(\lambda)$ pre (7), pričom k nemu existujú LN vektory: $\mathbf{g}^j + \mathrm{i}\,\mathbf{h}^j$, $j = 1, \ldots, m$. Potom

$$(\mathbf{g}^j \cos \omega t - \mathbf{h}^j \sin \omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t},$$

$$(\mathbf{h}^j \cos \omega t + \mathbf{g}^j \sin \omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t}, \; j = 1, \ldots, m$$

tvoria časť bázy.

Diskrétny prípad

Veta 15.

Nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ sú rôzne vlastné hodnoty $\mathbf{A}$, $\mathbf{v}^i$ je vlastný vektor zodpovedajúci λ_i, a $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ sú LN. Potom FSR rovnice (8) má tvar $\mathbf{x}^i(n) = \lambda_i^n \mathbf{v}^i$, $i = 1, \ldots, k$.

Veta 16.

Nech $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$ je m-násobný koreň $P(\lambda)$ pre (8), pričom k nemu existujú LN vektory: $\mathbf{g}^j + \mathrm{i}\,\mathbf{h}^j$, $j = 1, \ldots, m$. Potom pre $\theta = \mathrm{Arg}(\lambda)$

$$(\mathbf{g}^j \cos n\theta - \mathbf{h}^j \sin n\theta)\,(\omega^2 + \sigma^2)^n,$$

$$(\mathbf{h}^j \cos n\theta + \mathbf{g}^j \sin n\theta)\,(\omega^2 + \sigma^2)^n, \; j = 1, \ldots, m$$

tvoria časť bázy.

Definícia 17.

Nenulový vektor $\mathbf{v}$ sa nazýva **zovšeobecnený vlastný vektor** rádu p matice $\mathbf{A}$ prislúchajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$, ak existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^p\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{p-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Usporiadanú p–ticu $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \ldots \mathbf{v}^p)$, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{p-k}\mathbf{v}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ nazývame **reťazec** zovšeobecnených vlastných vektorov rádu p matice $\mathbf{A}$ vytvorený vektorom $\mathbf{v}$.

Poznámka 18 (O nulite matice)**.**

Počet lineárne nezávislých vlastných vlastných vektorov zopdpovedajúcich násobnému číslu λ je ronvý nulite (rozdiel $k - h(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$) matice $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Poznámka 19.

Platí $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^1 = 0,\ (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1, \ldots, (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^{p-1} = \mathbf{v}^{p-2}, (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^{p-1}$.

Prípad zovšeobecnených vlastných hodnôt.

Spojitý prípad

Veta 20.

Nech $\left(\mathbf{v}^1, \dots \mathbf{v}^m\right)$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$ vytvorený vlastným vektorom $\mathbf{v}$. Potom vektorové funkcie

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{v}^i\, t^{k-i}}{(k-i)!}\right) e^{\lambda t}, \quad k = 1, \dots, m$$

sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (7).

Diskrétny prípad

Veta 21.

Nech $\left(\mathbf{v}^1, \dots \mathbf{v}^m\right)$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$ vytvorený vlastným vektorom $\mathbf{v}$. Potom vektorové funkcie

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{v}^i\, n^{k-i}\, \lambda^{n-k+i}}{(k-i)!}, \quad k = 1, \dots, m$$

sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (8).

Prvé integrály nelineárnych sústav

Určiť exaktné riešenie diferenciálnych sústav

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}). \tag{9}$$

sa v podstate darí len vo výnimočných prípadoch. Niekedy vieme nájsť takú funkciu $\Theta(t, \mathbf{y})$, ktorá je konštantná pre každé riešenie systému (9) (príslušná konštanta môže byť pre rôzne riešenia rôzna). Takýto postup nemusí byť však jednoduchý a je užitočný vtedy, ak iný nemáme. Také funkcie nazývame **prvými integrálmi** tejto sústavy, pričom často majú fyzikálny význam napríklad energie, hybnosti, momentu hybnosti (konštantnosť vyjadruje zákon zachovania týchto veličín).

Príklad.

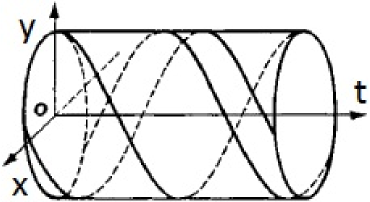
Exemplárnym príkladom je systém rovníc, podľa ktorých sa pohybujú častice v konzervatívnom poli. Rovnica

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla U(\mathbf{x}(t))$$

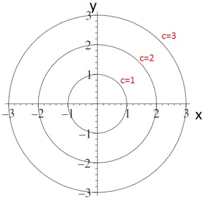
má prvý integrál (v skalárnom prípade) $\Theta(x, v) = \dfrac{v^2}{2} + U(x)$, kde $v(t) := \dot{x}(t)$, vyjadrujúci celkovú energiu systému.

Definícia 1.

Prvým integrálom sústavy (9) na otvorenej množine $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nazývame takú funkciu $\Theta \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R})$, pre ktorú platí: Ak je $\mathbf{y}(t), t \in I$ riešenie na Ω_1 sústavy (9), potom je funkcia $\tilde{\Theta}(t) := \Theta(t, \mathbf{y}(t))$ konštantná na intervale I.



Cylinder tvorí prvý integrál (pre konkrétne c). Správanie sa riešení z nasledujúceho príkladu.



Fázový portrét tvoria kružnice.

Príklad.

Uvažujme sústavu

$$x' = y, y' = -x. \qquad (10)$$

Zrejme $x^2 + y^2 = c$ pre riešenie (x, y) a teda prvým integrálom danej sústavy je valec a integrálne krivky tvoria skrutkovice na ňom, viď. obrázky 14, 14.

Naprv si uvedieme tvrdenie, ktoré je často prakticky využívané pri riešení nelineárnych systémov a vo svojej podstate súvisí s prvým integrálom špeciálneho systému.

Veta 2.

Nech f, g sú spojité funkce, $x, y : (a, b) \to \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$, $f(x(t_0), y(t_0)) \neq 0$.

1. Potom existuje okolie U bodu t_0 také, že ak (x, y) je riešenie sústavy

$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$

   na U, potom je $\tilde{y} = y \circ x^{-1}$ na $x(U)$ riešením rovnice

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{y}}{\mathrm{d}z} = \frac{g(z, \tilde{y})}{f(z, \tilde{y})}, \quad \tilde{y}(x(t_0)) = y(t_0). \tag{11}$$

2. Pre každé okolie U bodu t_0 platí, že pokiaľ $\tilde{y}$ je riešením rovnice (11) na $x(U)$ a x je riešením rovnice $x' = f(x, \tilde{y}(x))$ na U, potom funkcia $\tilde{y} \circ x$ je riešením rovnice $y' = g(x, y)$ na U.

Všimnime si, že rovnicu (11) získame formálnym predelením rovníc daného planárneho systému. Veta v podstate hovorí, že ak chceme nájsť riešenia danej sústavy, môžeme najprv vyriešiť rovnicu (11), ktorá nám dá orbity riešení vo fázovej rovine, a potom dopočítať závislosť na t.

Použitím pravidla o derivovaní zloženej funkcie dostaneme nasledujúcu lemu, ktorá je užitočná a dôležitá v tom, že funkcii Θ môžeme rozhodnúť, či je (nie je) prvým integrálom bez toho, aby sme poznali riešenie.

Lema 3 (Nutná a postačujúca podmienka)**.**

Ak je pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (9) spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, potom funkcia $\Theta \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ je jej prvým integrálom na $\Omega \Leftrightarrow$ ak platí

$$\frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} f_j(t, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in \Omega \tag{12}$$

Je to fakticky parciálna diferenciálna rovnica prvého rádu pre funkciu Θ. Takže je blízky vzťah medzi nimi a sústavami obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu. Ak máme autonómny systém, potom táto podmienka hovorí, že gradient prvého integrálu je kolmý na vektorové pole $\mathbf{f}$ (na pravú stranu systému).

Poznámka 4.

Konštantné prvé integrály sú nezaujímavé. Nekonštantné prvé integrály definované na celej oblasti Ω existujú zriedka. Zvláštnu dôležitosť majú prvé integrály nezávisiace explicitne na t.

Príklad.

Uvažujme sústavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 - y_3, \\ y_2' &= y_3 - y_1, \\ y_3' &= y_1 - y_2. \end{aligned} \tag{13}$$

Ščítaním týchto rovníc dostaneme $(y_1+y_2+y_3)' = 0$. To znamená, že funkcia $\Theta_1(\mathbf{y}) = y_1+y_2+y_3$ je prvými integrálom sústavy (13). Iný prvý integrál je $\Theta_2(\mathbf{y}) = y_1^2+y_2^2+y_3^2$. Ako ho možno nájsť ?

Poznámka 5.

Je zrejmé, že ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$ prvé integrály sústavy (9), potom aj $\Psi\left(\Theta_1(t,\mathbf{y}), \Theta_2(t,\mathbf{y}), \ldots, \Theta_k(t,\mathbf{y})\right)$ ním je, pričom Ψ je ľubovoľná spojite diferencovateľná funkcia k premenných. Tento integrál nám ale nedáva žiadnu ďalšiu informáciu o riešení v porovnaní s informáciou, ktorú nám dávajú prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$.

Ak chceme nájsť riešenie sústavy (9) pomocou prvých integrálov je podstatné, aby boli nezávislé na množine Ω.

Definícia 6.

Hovoríme, že prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$, $k \le n$ sú **nezávislé** na množine Ω, ak Ostrogradského-Jacobiho matica $\Theta'_{\mathbf{y}}$ má plnú hodnosť k pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$.

Príklad (Rabinovichov systém).

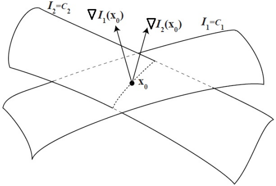
Nasledujúci difereniálny systém tvorí parametrický model, ktorý popisuje interakcie troch kvázi-synchrónnch vĺn v plazme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y^2 + \gamma x + z - \delta, \\ \dot{y} &= 2xy + \gamma y - \delta x, \\ \dot{z} &= -2z(x+1), \end{aligned} \tag{14}$$

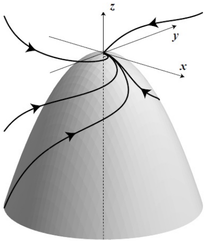
kde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nájsť prvé integrály pre takéto systémy nemusí byť vôbec jednoduché. Špeciálne pre $\gamma = 0, \delta = 1$ existujú dva explicitne závisiace na t prvé integrály

$$I_1 = (x^2 + y^2 + z)e^{2t}, \quad I_2 = zye^{3t}.$$

Presvedčte sa o tom ! Pre $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sú ich gradienty lineárne nezávislé. Taktiež sa môžete presvedčiť, že pre $\gamma = 0$ je $z(y - \delta/2)e^{2t}$ ďalším prvým integrálom.



Nezávislosť prvých integrálov - 2 konkrétne hladiny a ich prienik v bode x_0.



Integrály z predchádzajúceho príkladu. Počiatok je globálny atraktor, t.j. pre $t \to \infty$ tam končia všetky trajektórie (dosahujúc hladinu $I_1 = 0$).

Problém 7.

Ukážte, že existencia lineárneho prvého integrálu pre lineárny homogénny systém s konštantnými koeficientami korešponduje s jeho degenerovanosťou, t.j. systém (7) má lineárny prvý integrál $I(\mathbf{y}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y},\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \ \Leftrightarrow\ \det \mathbf{A} = 0$.

Veta 8.

Nech pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (9) spojite diferencovateľná na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Potom

1. ku $\forall \left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega \;\; \exists$ v nejakom jeho okolí n nezávislých prvých integrálov, ak navyše uvažujeme autonómny systém, potom ku $\forall\, \mathbf{y}^0 : \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) \neq 0, \;\; \exists$ v nejakom jeho okolí $(n-1)$ nezávislých prvých integrálov nezávisiacich na t.
2. Ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ nezávislé v $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$ prvé integrály sústavy (9), potom v nejakom jeho okolí sa dá každý prvý integrál tejto sústavy napísať v tvare $\Psi\left(\Theta_1(t, \mathbf{y}), \Theta_2(t, \mathbf{y}), \ldots, \Theta_n(t, \mathbf{y})\right)$, pričom Ψ je vhodná spojite diferencovateľná funkcia. Navyše, existuje najviac $(n-1)$ nezávislých v bode $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$ prvých integrálov sústavy (9) nezávisiacich explicitne na t, okrem prípadu, kedy $f(t, \mathbf{y})$ je identicky nula na nejakom okolí bodu $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$. Ak je $f\left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \neq 0$ a $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{n-1}$ sú nezávisiace na t prvé integrály, ktoré sú nezávislé v bode $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$, potom každý nezávisiaci na t prvý integrál sa v nejakom okolí bodu $\mathbf{y}^0$ dá zapísať v tvare $\Psi\left(\Theta_1(\mathbf{y}), \Theta_2(\mathbf{y}), \ldots, \Theta_{n-1}(\mathbf{y})\right)$, pričom Ψ je vhodná spojite diferencovateľná funkcia.

Riešenie PDR metódou charakteristík

Predpokladajme najprv lineárnu homogénnu PDR prvého rádu dvoch nezávislých premenných s konštantnými koeficientami. Majme teda rovnicu v tvare

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{15}$$

kde $a^2 + b^2 > 0$. Geometrická interpretácia: rovnica sa dá zapísať v tvare $\langle \mathbf{v}, \nabla u \rangle = 0$ a teda derivácia funkcie u v smere $\mathbf{v}$ je nulová. Funkcia u sa nemení v tomto smere, tj. je konštantná na každej priamke, ktorej smerový vektor je $\mathbf{v}$ (pozor konštanta môže byť na týchto priamkach rôzna). Platí teda $u(x, y) = f(c) = f(bx - ay)$, kde $f \in C^1$. Tieto priamky tvoria tzv. charakteristiky rovnice. Tento tvar je všeobecným (aj generickým) riešením danej rovnice, ide o postupnú vlnu hýbajúcu sa pozdĺž charakteristík. Funkciu f si vyjadríme z počiatočnej, alebo okrajovej podmienky. Podobne postupujeme aj v prípade nekonštantných koeficientov. Rozdiel je v tom, že charakteristiky nemusia byť vo všeobecnosti priamky, ale nejaké krivky. Majme rovnicu

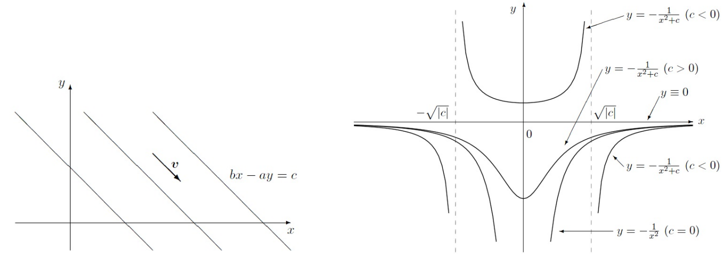
$$a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

kde $a(x, y)^2 + b(x, y)^2 > 0, \ (x, y) \in G$ a $a, b \in C(G)$.

Máme zaručené, že iba jedna charakteristika prechádza každým bodom množiny G. Teraz je $\mathbf{v} = (a(x,y), b(x,y))$ a charakteristiky sú dané rovnicou

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y)} = \frac{\mathrm{d}y}{b(x,y)}.$$

Nech existuje (hlavný prvý integrál) riešenie a má tvar $h(x,y) = c, c \in \mathbb{R}$, potom hľadaným riešením je funkcia $u(x,y) = F(c) = F(h(x,y)),\ F \in C^1$.



(a) Charakteristické priamky rovnice $au_x + bu_y = 0$, $\mathbf{v} = (a,b)$.

(b) Charakteristiky rovnice $u_x + 2xy^2 u_y = 0$.

Obr.: Príklady charakteristík.

Nevýhodou takejto metódy je, že ju nemôžeme použiť k riešeniu všeobecnejších rovníc. Dá sa to však využiť čiastočne.

Majme rovnicu

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y). \tag{17}$$

- Metóda charakteristických súradníc - zaveďme súradnice $\xi = bx - ay, \tau = y$, z toho máme
$$u_x = b\tilde{u}_\xi,\ u_y = -a\tilde{u}_\xi + \tilde{u}_\tau.$$
Potom dostaneme rovnicu
$$b\tilde{u}_\tau + \tilde{c}(\xi,\tau)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi,\tau),$$
na ktorú sa môžeme pozerať ako na ODR s parametrom a riešiť ju štandardnými metódami.

Obdobne môžeme postupovať pre nekonštantné koeficienty:

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x,y)u = f(x,y), \tag{18}$$

pričom zavedieme súradnice $\xi = h(x,y), \tau = y$ (h je prvý integrál). Platí totiž, že $a(x,y)h_x + b(x,y)h_y = 0$ v ľubovoľnom bode (x,y). Odtiaľ máme ODR s parametrom $\tilde{b}(\xi,\tau)\tilde{u}_\tau + \tilde{c}(\xi,\tau)\tilde{u} = \tilde{f}(\xi,\tau)$.

Príklad.

Rovnica $u_x + yu_y = ye^y$ má všeobecné riešenie $u(x,y) = e^y + g(ye^{-x})$, kde $g \in C^1$.
Uvažujme teraz 3 podmienky:

- $u(0,y) = \sin y \Rightarrow g(y) = \sin y - e^y$ - práve jedno riešenie
- $u(x,0) = \sin(x) \Rightarrow \sin(x) = u(x,0) = 1 + g(0)$ - žiadne riešenie
- $u(x,0) = 10 \Rightarrow 10 = u(x,0) = 1 + g(0)$ - nekonečne veľa riešení ($g \in C^1 : g(0) = 9$)

Všimnime si, že v prvom prípade bola podmienka zadaná na osi y, ktorá pretína všetky charakteristiky rovnice práve raz a pod nenulovým uhlom. V ďalších dvoch prípadoch bola podmienka daná na osi x, ktorá je priamo jednou z charakteristík !

Veta 1 (Lokálna o existencii)**.**

Nech v rovnici (18) sú $a, b, c, f \in C^1(G)$, kde $G \subset \mathbb{R}^2$ je oblasť. Nech aj okrajová podmienka $u = u_0 \in C^1$ je zadaná na regulárnej krivke $\gamma : (x_0(s), y_0(s)),\ s \in I$. Potom ak je splnená podmienka

$$b(x_0(s), y_0(s)) \frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}s} - a(x_0(s), y_0(s)) \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}s} \neq 0, \quad \forall s \in I,$$

tak existuje jediné riešenie danej rovnice na okolí krivky γ, ktorá spĺňa $u_0(s) = u(x_0(s), y_0(s))$.

Poznámka 2.

Daná podmienka len hovorí, že vektor (a, b) nie je dotykovým vektorom krivky γ v žiadnom z bodov (x_0, y_0), tj. krivka γ pretína charakteristiky transverzálne.

Gradientné a Hamiltonove systémy

Príklad.

Vo fyzike je konzervatívny systém s jedným stupňom voľnosti popísaný rovnicou typu $\ddot{x} = g(x)$. Celková mechanická energia $E = T + U = \frac{\dot{x}^2}{2} - \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$ je prvým integrálom (súčet kinetickej a potenciálnej energie systému). Prislúchajúci systém diferenciálnych rovníc je príkladom všeobecného Hamiltonovho systému a prvý integrál sa v tomto prípade nazýva **Hamiltonova funkcia**.

Najsledujúci diferenciálny systém súvisí s Hamiltonovskou formuláciou mechaniky, ktorá je všeobecnejšia než lagrangeovská, z ktorej pôvodne vychádzala. Hamiltonova funkcia (súčet kinetickej a potenciálnej energie) mechanického systému s n stupňami voľnosti je definovaná vzťahom:

$$H(q_1, q_2, ...q_n, p_1, p_2, ...p_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, p_i - L(q_1, q_2, ...q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_n, t),$$

kde L je Lagrangeova funkcia systému. Tento dynamický systém opisuje vývoj fyzikálnych systémov ako napríklad planetárny systém alebo elektrón v elektromagnetickom poli.

Hamiltonove kanonické rovnice

Nech $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ je diferencovateľná funkcia. Nasledujúce rovnice tvoria pre mechanický systém s n stupňami voľnosti sústavu $2n$ diferenciálnych rovníc prvého rádu pre $2n$ neznámych funkcií času $q_i(t), p_i(t), i = 1, 2, ..., n$, kde q_i sú zovšeobecnené súradnice a p_i sú zovšeobecnené hybnosti.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}(t) &= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t) = \mathbf{X} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}(t) &= +\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t) = \mathbf{Y} \end{aligned} \tag{19}$$

Veta 1 (Zákon zachovania energie)**.**

Ak funkcia $\mathcal{H}$ nezávisí explicitne na t, potom je prvým integrálom systému (19), tj. $\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = k,\ k \in \mathbb{R}$ na nejakom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dôsledok tejto vety je ten, že pre každú trajektóriu γ tohto systému existuje konštanta $k \in \mathbb{R}$ taká, že γ je súvislou komponentou hladiny funkcie $\mathcal{H}$, tj. množiny $\mathcal{H}^{-1}(k)$. Fázový portrét možno teda zistiť analýzou takýchto hladín funkcie $\mathcal{H}$. Zrejme nutnou podmienkou pre systém (19) je $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{X} + \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{Y} = 0$. (a aj postačujúcou v prípade systému 2 rovníc).

Definícia 2.

Nech **F** je spojito diferencovateľné vektorové pole z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^n$, potom jeho **divergenciu** definujeme ako skalárnu veličinu

$$\operatorname{div} \mathbf{F} := \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

Ak $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ na M, tak pole F nazývame **solenoidálne (nežriedlové)** na M.

Veta 3 (Liouville)**.**

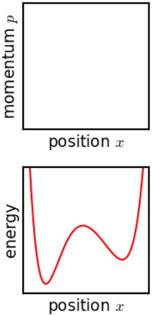
Nech $D_0 \subset \mathbb{R}^k$ je ohraničená oblasť vo fázovom priestore systému $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ a ϕ_t je ním generovaný fázový tok[a]. Potom pre $D_t := \phi_t(D_0)$ platí

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_k(t)}{\mathrm{d}t} = \int_{D_t} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

[a] T.j. riešenie závislé na počiatočnom stave

Dôsledok 4.

Hamiltonove polia zachovávajú objem (vo fázovom priestore).



Obr.: Vývoj ensemblu klasického konzervatívneho systému vo fázovom priestore (hore). Každý systém pozostáva z jednej hmotnej častice v jednorozmernej potenciálovej jame (červená krivka). Spočiatku kompaktný ensemble v priebehu času začne víriť.
Ensemble je myslená množina systémov s rovnakými vonkajšími parametrami (napr . objem nádoby, gravitačné polia atď.), ale s rôznymi mikrostavmi - pojem štatistickej fyziky.

Problém 5.

Potenciál (konzervatívneho) elektrostatického poľa možno chápať ako potenciálnu energiu jednotkového náboja. Záporný gradient potenciálu je rovný intenzite elektrického poľa, tzn. $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$. Čo predstavujú krivky vo fázovom portréte rovnice $\boldsymbol{r}' = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$. ?

Problém 6.

Ukážte, že v 2D prípade je nutná podmienka aj postačujúcou.
Ukážte, že nutná podmienka pre nasledujúci systém je splnená, avšak systém nie je Hamiltonov.

$$q_1'' = -q_1, \;\; q_2'' = q_1.$$

Príklad.

Ukážeme, že systém

$$\begin{aligned} x' &= y(13 - x^2 - y^2), \\ y' &= 12 - x(13 - x^2 - y^2), \end{aligned} \tag{20}$$

je Hamiltonov. Máme $\dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{X} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{Y} = -2xy + 2xy = 0$ a teda podmienka je splnená. Nájdite Hamiltonián $\mathcal{H}$ tohto systému a načrtnite fázový diagram !

Príklad.

1. Hamiltonova funkcia pre jednorozmerný pohyb voľnej častice (HB):
$$\mathcal{H} = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{p^2}{2m}$$
2. Hamiltonova funkcia častice s nábojom q v elektromagnetickom poli s elektrickým potenciálom φ (magnetický vektorový potenciál v nej nevystupuje): $\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
3. Hamiltonova funkcia relativistickej častice (pre nenabitú časticu odpadá člen s q):
$$\mathcal{H} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$$

Gradientné systémy

Hamiltonove systémy môžu mať relatívne zložité vlastnosti. Jednoduchšie vlastnosti trajektórií majú tzv. gradientné systémy. Nech $U \in C^k(\Omega, \mathbb{R})$, $k \geq 1$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. **Gradientný systém** na Ω je systém tvaru

$$\mathbf{y}' = -\nabla U(\mathbf{y}). \tag{21}$$

Problém 7.

Nech $W \in C^2(U, \mathbb{R})$, určte nutnú podmienku na to, aby systém bol gradientný. Ako je to s postačujúcou podmienkou ?

Veta 8.

Nech $\mathbf{y}$ je riešenie sústavy (21), potom $U(\mathbf{y}(t))$ je nerastúca funkcia.

Všimnime si, že $\dfrac{\mathrm{d}U(\mathbf{y}(t))}{\mathrm{d}t} = -\langle -\nabla U(\mathbf{y}(t)), \mathbf{y}'(t)\rangle = -\|\nabla U(\mathbf{y}(t))\|^2 \leq 0$. Ak je $\nabla U(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, potom je orbita ekvilibrium. V opačnom prípade platí striktná nerovnosť, teda naozaj U klesá pozdĺž trajektórií.

Dôsledok 9.

Gradientný systém nemá periodické trajektórie.

Poznámka 10.

V prípade dvojrozmerných systémov je gradientný systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a Hamiltonov systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Podobne vieme všeobecne zapísať Hamiltonov systém ako

$$\mathbf{y}' = J\nabla\mathcal{H}(\mathbf{y}),$$

kde $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$ a $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ a (párny) gradientný systém ako $\mathbf{y}' = -I_{2n}\nabla U(\mathbf{y})$. Z tohto je zaujímavé, že aj geometria je iná pre tieto dva typy systémov. Kým gradientné systémy sú asociované s varietami s Riemannovskou metrikou, pre hamiltonovské to nahrádzame tzv. symplektickou formou.

Veta 11 (Ortogonalita)**.**

Ak je systém (19) autonómny Hamiltonov systém s n-stupňami voľnosti, potom systém kolmý naň je gradientný v $\mathbb{R}^{2n}$. Teda je to systém (21) s $U = H$ a $\mathbf{y} = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$, a jeho trajektórie pretínajú plochy $\mathcal{H} =$konšt. kolmo.