Prednáška 4

Dynamické systémy

doc. Jozef Kiseľák, PhD.

ÚMV/DYS/19 Dynamické sytémy
6. decembra 2023

Jozef Kiseľák
PF UPJŠ

Tento materiál vznikol za podpory grantu VVGS-2022-2412.

Teória stability

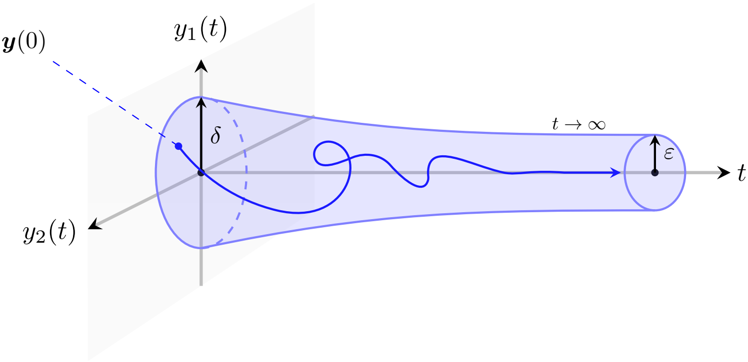
V inžinierskej praxi je nutné, aby rôzne systémy pracovali v stabilnom režime. Ak systém nie je stabilný, môže byť jeho správanie sa dokonca nebezpečné (napr. mosty). Fyzikálny význam - stabilita systému je jeho vlastnosť vyjadrujúca schopnosť sa navrátiť do rovnovážneho stavu po "odznení poruchy", ktorá ho z neho vyviedla. Budeme predpokladať, že tok $\psi(t, t_0, \xi)$ existuje na $[t_0, \infty)$ a označuje riešenie dynamických rovníc, ktoré spĺňa začiatočnú podmienku $\psi(t_0, t_0, \xi) = \xi$.

Definícia 1.

Tok $\psi(t, t_0, \xi)$ sa nazýva **stabilný** (v zmysle Ljapunova), ak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$, $||\xi_1 - \xi_2|| < \delta \Rightarrow ||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| < \varepsilon$ pre každé $t \geq t_0$. Ak platí

$$\lim_{t\to\infty} ||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| = 0,$$

potom sa tok $\psi(t, t_0, \xi)$ nazýva **pozitívny atraktor**. Ak platia obe podmienky, hovoríme, že tok je **asymptoticky stabilný**. Tok sa nazýva **nestabilný**, ak nie je stabilný. Dynamický systém sa nazýva **stabilný (asymptoticky stabilný, nestabilný)**, ak všetky jeho toky sú stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).



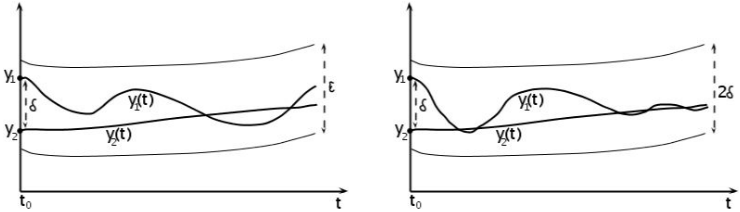
Obr.: Trajektória 2D systému a vzťah okolí.

Poznámka 2.

Geometrický význam definície stability: toky, ktoré sú si $\delta-$''blízke'' v začiatočnom momente, zostanú navzájom $\epsilon-$''blízke'' aj pre všetky hodnoty $t \geq t_0$. Asymptoticky stabilný tok navyše konverguje k nejakému ekvilibriu.

Problém 3.

Napíšte definíciu nestabilného toku.



(a) Stabilný tok v zmysle Ljapunova.

(b) Asymptoticky stabilný tok.

Obr.: Stabilný tok v priestore trajektórií.

Definícia 4.

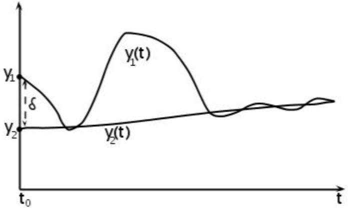
Ak špeciálne $||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| < K\,\mathrm{e}^{-b(t-t_0)}$, $b, K > 0$, pre každé $t \geq t_0$, potom sa tok $\psi(t, t_0, \xi)$ nazýva **exponenciálne stabilný**.

Zrejme každý exponenciálne stabilný tok je asymptoticky stabilný, ktorý navyše konverguje aspoň tak rýchlo ako nejaká exponenciálne klesajúca funkcia.

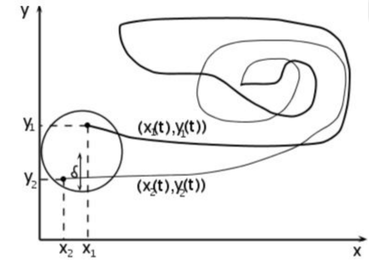
Príklad.

Pre diferenciálnu rovnicu $x' = k\,x$, $k \in \mathbb{R}$ je $\psi(t, t_0, \xi) = \xi\,\mathrm{e}^{k\,(t-t_0)}$. Zrejme nám hodnota k ovplyvní stabilitu riešenia (toku).

- Ak $k = 0$, potom $\psi(t, t_0, \xi) = \xi$ a zrejme $||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| = ||\xi_1 - \xi_2||$. Teda pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ stačí vziať $\delta = \varepsilon$ a vidíme, že rovnica je stabilná (zrejme žiadne riešenie nie je asymptoticky stabilné).
- Ak $k < 0$, potom pre každé $\varepsilon > 0$ a $0 < \delta < \varepsilon$ je $||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| = \mathrm{e}^{k\,(t-t_0)}||\xi_1 - \xi_2|| < \varepsilon$. Naviac je $\lim\limits_{t\to\infty} ||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| = 0$. Rovnica je teda asymptoticky stabilná.
- Ak $k > 0$, potom $||\psi(t, t_0, \xi_1) - \psi(t, t_0, \xi_2)|| = \mathrm{e}^{k\,(t-t_0)}||\xi_1 - \xi_2|| \to \infty$, ak $t \to \infty$. Rovnica je teda nestabilná.



(a) Atraktor v priestore trajektórií.



(b) Atraktor vo fázovom priestore.

Obr.: Pozitívny atraktor.

Skúmanie stability riešenia systému

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}) \tag{1}$$

môže byť redukované na skúmanie stability nulového riešenia nového systému rovníc, získaného pomocou lineárnej transformácie. Pojednáva o tom nasledujúca veta.

Veta 5.

Riešenie $\psi(t, t_0, \xi)$ rovnice (1) je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné) $\Leftrightarrow$ triviálne riešenie $\psi(t, t_0, 0) = 0$ rovnice $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x})$, kde $\boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x} + \psi(t, t_0, \xi)) - \boldsymbol{f}(t, \psi(t, t_0, \xi))$ je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).

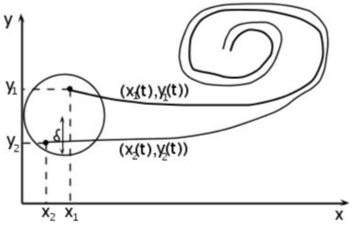
Získaný výsledok je veľmi dôležitý, lebo z neho vyplýva, že v lineárnom prípade

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}(t)\,\boldsymbol{y} + \boldsymbol{b}(t), \tag{2}$$

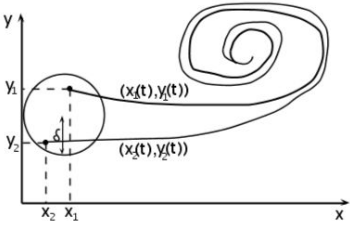
stačí skúmať stabilitu homogénnych systémov.

Veta 6.

Rovnica (2) ($\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}$ sú spojité) je stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná) $\Leftrightarrow$ homogénna rovnica k nej prislúchajúca je stabilná (asymptoticky stabilná, nestabilná).



(a) Stabilita toku v Ljapunovom zmysle.



(b) Asymptoticky stabilný tok.

Obr.: Stabilné toky vo fázovom priestore.

Nasledujúce vety sa týkajú lineárneho systému s konštantnými koeficientami

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y}. \tag{3}$$

Pre určenie stability či nestability nulového ekvilibria sú rozhodujúce vlastnosti koreňov charakteristickej rovnice $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$.

Veta 7 (Stabilita podľa charakteristických čísel)**.**

1. Ak je rovnica (3) stabilná, potom $\Re\mathfrak{e}\,(\lambda) \leq 0$ pre každé vlastné číslo matice $\boldsymbol{A}$.
2. Ak $\Re\mathfrak{e}\,(\lambda) \leq 0$ pre každé vlastné číslo matice $\boldsymbol{A}$, pričom ak $\Re\mathfrak{e}\,(\lambda) = 0$, tak Jordanov blok zodpovedajúci tomuto vlastnému číslu je jednoduchý, t.j. diagonálny (nemá jednotky nad diagonálou). Potom rovnica (3) je stabilná.
3. Rovnica (3) je asymptoticky stabilná $\Leftrightarrow$ ak $\Re\mathfrak{e}\,(\lambda) < 0$ pre každé vlastné číslo matice $\boldsymbol{A}$.
4. Ak existuje vlastné číslo λ matice $\boldsymbol{A}$ tak, že $\Re\mathfrak{e}\,(\lambda) > 0$, alebo vlastné číslo matice $\boldsymbol{A}$ s $\Re\mathfrak{e}\,(\lambda) = 0$ a nejednoduchým Jordanovým blokom, potom je rovnica (3) nestabilná.

Veta 8 (Nutná podmienka asymptotickej stability)**.**

Nech rovnica (3) je asymptoticky stabilná a jej charakteristická rovnica má tvar

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\lambda^k = 0 \quad (a_n = 1), \text{ potom } a_k > 0,\ \ k = 0, \dots, n-1.$$

Pri určovaní stability je teda nutné zistiť či majú všetky korene záporné reálne zložky. Je známe, že kladnosť všetkých koeficientov nie je postačujúcou podmienkou na to, aby všetky korene charakteristickej rovnice ležali naľavo od imaginárnej osi - táto podmienka je nutná i postačujúca iba pre rovnice prvého a druhého stupňa. Odpoveď na otázku ako je to vo všeobecnosti nám dáva nasledujúca veta.

Definícia 9.

Nech $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$, $a_n = 1$, polynóm $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$, $n \geq 1$ sa nazýva **Hurwitzov**, ak všetky jeho korene majú zápornú reálnu časť. Matica $(H)_{ij} = a_{2i-j}$, kde $a_k = 0$ pre $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$, sa nazýva **Hurwitzova matica** polynómu $P(\lambda)$. Ide o maticu typu $n \times n$, ktorá má tvar

$$\boldsymbol{H}_P(n) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

kde $a_k = 0$ pre $k \notin \{0, 1, \ldots, n\}$.

Nasledujúca veta nám dáva nutnú a postačujúcu podmienku asymptotickej stability.

Veta 10 (Routheove-Stodolove-Hurwitzove kritérium).

Nech $a_k > 0,\ k = 0, \ldots, n-1,\ a_n = 1$. Potom je polynóm $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k,\ n \geq 1$ Hurwitzov vtedy a len vtedy, ak jeho Hurwitzova matica má kladné všetky hlavné diagonálne minory.

Poznámka 11.

Pre hlavné minory matice platí $\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \ldots, \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0$. Navyše poslednú podmienku možno nahradiť podmienkou $a_n > 0$. Je vhodné, aby výpočty determinantov boli robené v tomto poradí: $\Delta_n,\ \Delta_1,\ \Delta_2$, atď.
Hurwitzova matice je rovnakého rádu ako stupeň polynómu a v prípade $n = 3$ má tvar

$$\boldsymbol{H}_P(3) = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Problém 12.

Skúmajte stabilitu nulového riešenia rovnice

$$y^{(5)} + y^{(4)} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0.$$

Príklad.

Zistíme, pre ktoré $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je systém

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + \alpha\, x_2 + \beta\, x_3, \\ x_2' &= -\alpha\, x_1 - x_2 + \alpha\, x_3, \\ x_3' &= -\beta\, x_1 - \alpha\, x_2 - x_3, \end{aligned} \tag{4}$$

asymptoticky stabilný. Charakteristický polynóm systému (4) je

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 + 2\alpha^2 + \beta^2)\,\lambda + (1 + 2\alpha^2 + \beta^2).$$

Máme teda $a_0 = 1 + 2\alpha^2 + \beta^2$, $a_1 = 3 + 2\alpha^2 + \beta^2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 1$ a platí, že Hurwitzova matica má kladné všetky hlavné diagonálne minory pre všetky $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Problém 13.

Určte, pre aké hodnoty parametrov p, q je systém

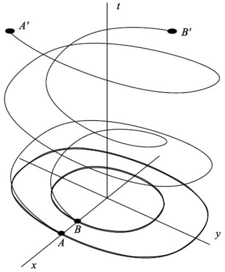
$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_2' &= -x_1 - qx_2 - px_3, \end{aligned} \tag{5}$$

asymptoticky stabilný.

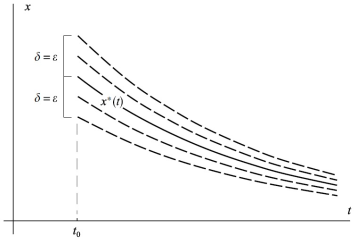
Klasifikácia ekvilibrií systémov 2×2

Podľa správania sa trajektórií v okolí stacionárnych bodov rozdeľujeme tieto body do niekoľkých navzájom disjunktných skupín. Zjednodušene povedané, kedykoľvek sa medzi vlastnými hodnotami matice koeficientov pravej strany v stacionárnom bode objaví vlastná hodnota so zápornou reálnou časťou, existuje trajektória konvergujúca do tohto bodu. Ak má niektorá vlastná hodnota kladnú reálnu časť, existuje trajektória vychádzajúca z tohto bodu. Ak majú vlastné hodnoty nenulovú imaginárnu časť, dochádza v okolí bodu k osciláciám. Majme systému

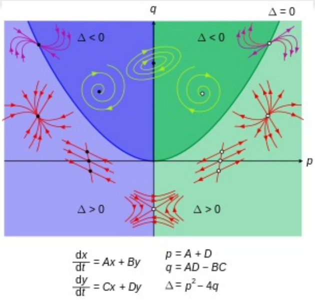
$$\begin{aligned} x' &= A\,x + B\,y, \\ y' &= C\,x + D\,y. \end{aligned} \tag{6}$$



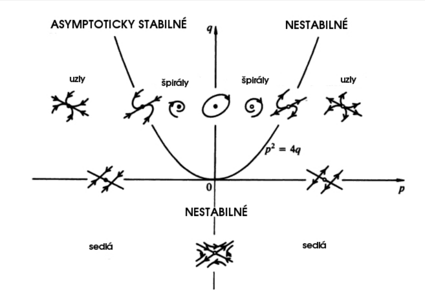
(a) Integrálne krivky - bod typu centrum. Aj keď na začiatku sú blízko seba v bodoch A a B, časom sa od seba vzdialia (body A', B').



(b) Ljapunova stabilita riešenia $x^*(t) = x_0\, e^{-(t-t_0)}$.



(a)



(b)

Obr.: Poincarého diagram ekvilibrií systému (6).

Tabuľka: Klasifikácia ekvilibrií systému (6) pre nedegenerované prípady.

Diskriminant	Vlastné hodnoty	Kritický bod	Stabilita	Lokálny tok
$\Delta > 0$	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	uzol	AS	$\searrow$ v oboch súradniciach k x^*
$\Delta > 0$	$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	uzol	N	$\nearrow$ v oboch súradniciach od x^*
$\Delta > 0$	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	sedlo	N	v jednom smere $\nearrow$ a v druhom $\searrow$
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, 2 vl. vektory	dikrit. uzol	N	$\nearrow$ v oboch súradniciach od x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, 2 vl. vektory	dikrit. uzol	AS	$\searrow$ v oboch súradniciach k x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$, 1 vl. vektor	degen. uzol	N	$\nearrow$ v oboch súradniciach od x^*
$\Delta = 0$	$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, 1 vl. vektor	degen. uzol	AS	$\searrow$ v oboch súradniciach k x^*
$\Delta < 0$	$\mathfrak{Re}\,(\lambda_i) < 0,\ i = 1, 2$	špirála	AS	má špirálový pohyb smerom k x^*
$\Delta < 0$	$\mathfrak{Re}\,(\lambda_i) > 0,\ i = 1, 2$	špirála	N	má špirálový pohyb smerom od x^*
$\Delta < 0$	$\mathfrak{Re}\,(\lambda_i) = 0,\ i = 1, 2$	centrum	S	rotuje okolo x^*

Poznámka 14.

Špirála sa niekedy nazýva aj fókus, alebo ohnisko. Centrum sa volá aj stred a degenerovaný uzol zasa nevlastný. Dikritický uzol sa v angličtine výstižnejšie nazýva star. Sedlový bod sa nazýva aj hyperbolický bod, čo je vzhľadom na grafické znázornenie výstižné.

Teraz sa pozrime na autonómny diferenciálny systém, t.j. systém (1), ktorý explicitne nezávisí na t. Uvažujme teda systém

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}). \tag{7}$$

Poznámka 16.

Každá integrálna krivka systému (7) je tangenciálna k smerovému poľu $\boldsymbol{f}$ v každom bode.

Definícia 17.

Nech $\boldsymbol{y}^0$ je singulárny (stacionárny) bod rovnice (7), t.j. $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}^0) = 0$. Tento bod sa nazýva **stabilný (asymptoticky stabilný, nestabilný)**, ak riešenie $\psi(t, 0, \boldsymbol{y}^0) = \boldsymbol{y}^0$ rovnice (7) je stabilné (asymptoticky stabilné, nestabilné).

Poznámka 18.

Ak $\boldsymbol{y}^0$ je singulárny bod rovnice (7), potom je vlastne jej konštantným riešením ak spĺňa počiatočnú podmienku. Takéto riešenie nazývame aj **ekvilibrium**.

Uvedieme si dve vety, ktoré na vyšetrenie stability využívajú linearizáciu v okolí singulárnych bodov.

Veta 19 (Ljapunovova o linearizácii)**.**

Nech $\boldsymbol{f} \in C^1(E)$, $\boldsymbol{y}_* \in E \subset \mathbb{R}^n$ a $\boldsymbol{y}_* \in \mathbb{R}^n$ je singulárny bod rovnice (7). Ďalej nech všetky vlastné čísla príslušnej Jacobiho matice $J_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{y}_*)$ majú záporné reálne časti, potom bod $\boldsymbol{y}_*$ je asymptoticky stabilný (takýto singulárny bod nazývame aj atraktor - opakom je repeler).

Definícia 20.

Singulárny bod $\boldsymbol{y}^0$ systému (7) nazveme **hyperbolický**, ak žiadna z vlastných hodnôt príslušnej Jacobiho matice $J_{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{y}^0\right)$ neleží na imaginárnej osi.
Singulárny bod $\boldsymbol{y}^0$ systému (7) nazveme **nedegenerovaný**, ak žiadna z vlastných hodnôt príslušnej Jacobiho matice $J_{\boldsymbol{f}}\left(\boldsymbol{y}^0\right)$ nie je nulová.

Veta 21.

1. Nech systém (7) je analytický, Hamiltonov a dimenzie $n = 2$, potom každý nedegenerovaný singulárny bod tohto systému je buď centrum, alebo sedlový bod.
2. Nech systém (7) je analytický, gradientný a dimenzie $n = 2$, potom každý nedegenerovaný singulárny bod tohto systému je buď uzol, alebo sedlový bod.

Poznámka 22.

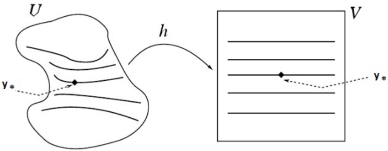
Ak nedegenerovaný singulárny bod je sedlovým bodom (ostrým lokálnym maximom, ostrým lokálnym minimom) hamiltoniánu $H(x, y)$ tak je sedlovým bodom (centrom) daného Hamiltonovho systému. Navyše, ak nedegenerovaný singulárny bod je sedlovým bodom (ostrým lokálnym maximom, ostrým lokálnym minimom) potenciálu $U(x, y)$ tak je sedlovým bodom (nestabilným uzlom, stabilný uzlom) daného gradientného systému.

Veta 23 (Grobmanova-Hartmanova).

Nech $\boldsymbol{y}_*$ je hyperbolický singulárny bod systému (7). Nech $\boldsymbol{f} \in C^1(E)$, $\boldsymbol{y}_* \in E \subset \mathbb{R}^n$ a $U, V \subset \mathbb{R}^n$ sú také, že $\boldsymbol{y}_* \in U, V$, $t_* = 0 \in I$. Potom existuje homeomorfizmus $h : U \to V$ tak, že pre všetky začiatočné hodnoty $\boldsymbol{y}^0 \in U$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$, že pre všetky $\left(\boldsymbol{y}^0, t_0\right) \in U \times I$ platí

$$h(\psi(t, t_0, \boldsymbol{y}^0)) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} h(\boldsymbol{y}^0)$$

(systém (7) je lokálne topologicky ekvivalentný so svojou linearizáciou).



Obr.: Lokálna topologická ekvivalencia systému (7) a jeho linearizácie.

Poznámka 24.

Tento homeomorfizmus zobrazuje komponenty súvislosti prienikov trajektórií systému (7) s U na komponenty súvislosti prienikov trajektórií svojej linearizácie s V (zachováva sa aj orientáciu).

Vyšetriť stabilitu aj v okolí bodov, ktoré nie sú hyperbolické je možné nájdením tzv Ljapunovovej funkcie. Táto metóda je zovšeobecnením Lagrangeovho tvrdenia, že postačujúcou podmienkou stability rovnovážneho stavu sústavy je, aby celková energia sústavy bola v tomto stave minimálna. Teda celková energia sústavy pri pohybe smerom k rovnovážnemu stavu sústavy klesá, ak je tento stav stabilný.
Pozrieme sa na to, kedy máme zaručenú neexistenciu periodických trajektórií riešení (tzv. limitných cyklov).

Veta 26 (Bendixsonova)**.**

Nech D je jednoducho súvislá oblasť fázového priestoru systému $x' = f(x,y),\ y' = g(x,y),\ f,g \in C^1$. Potom, ak $\operatorname{div}(f,g)$ nemení znamienko s.v. v D, tento systém nemá periodickú trajektóriu v D.

Príklad.

Majme systém $x' = y + x^3,\ y' = x + y + y^3$. Zrejme $\operatorname{div}(f,g) = 3x^2 + 1 + 3y^2 \geq 1 > 0$ na $\mathbb{R}^2$. Tento systém teda nemá periodickú trajektóriu.

Veta 27 (Poincaré)**.**

Nech D je jednoducho súvislá oblasť fázového priestoru systému $x' = f(x,y),\ y' = g(x,y)$ a C je jeho jednoduchá uzavretá fázová trajektória, ktorá leží v D, potom aspoň jeden stacionárny bod leží v $\operatorname{int} D$.

Predchádzajúca veta hovorí, že ak oblasť je jednoducho súvislá a nemá žiadne stacionárne body, potom nemôže obsahovať žiadne uzavreté trajektórie.

Veta 28 (Dulacov test).

Nech D je jednoducho súvislá oblasť fázového priestoru systému $x' = f(x, y),\ y' = g(x, y)$ a $\rho(x, y)$ je taká funkcia, že $\rho f, \rho g \in C^1$. Potom, ak $\operatorname{div}(\rho f, \rho g)$ nemení znamienko s.v. v D, tento systém nemá periodickú trajektóriu v D.

Príklad.

Majme systém $x' = y,\ y' = ax + by + cx^2 + dy^2,\ b, d \neq 0$. Zrejme $\operatorname{div}(e^{-2d\,x} f, e^{-2d\,x} g) = e^{-2d\,x} b \neq 0$ na $\mathbb{R}^2$. Tento systém teda nemá periodickú trajektóriu.

Poznámka 29.

O existencii periodických trajektórií planárnych systémov hovorí Poincarého-Bendixsonova veta, ktorej overenie si však vyžaduje značnú námahu a tak ju vynechávame.

Veta 30 (Postačujúce podmienky (ne)stability pre disktrétne systémy).

Nech $U \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená a $x^* \in U$ je pevný bod zobrazenia $F : U \to U$. Nech existuje$r > 0$: F je diferencovateľné na $B(x^*, r) \setminus \{x^*\}$.

- Ak je tam $||F'|| \leq 1$. Potom je x^* stabilné.
- Ak je tam $F \in C^1$ a $\rho(F'(x^*)) < 1$, potom je pozitívny atraktor (angl. sink).
- Ak má F spojitú deriváciu v x^* a $|\lambda| > 1\ \forall\lambda \in \sigma(F'(x^*))$, potom je x^* repeler (source).

Bifurkácie

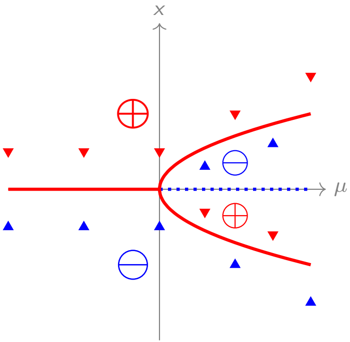
Majme dynamiku

$$\boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x}; \mu) \tag{8}$$

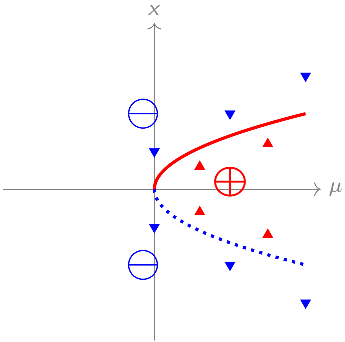
kde $\mu \in \mathbb{R}$ je parameter (tzv. **bifurkačný parameter**). Bod $(\boldsymbol{x}_0, \mu_0)$ nazveme **bodom bifurkácie**, pokiaľ pre $\mu = \mu_0$ nastáva podstatná zmena chovania riešenia v okolí bodu $\boldsymbol{x}_0$ - zmenu počtu a/alebo typu stability stacionárnych bodov.

Bifurkační diagram:

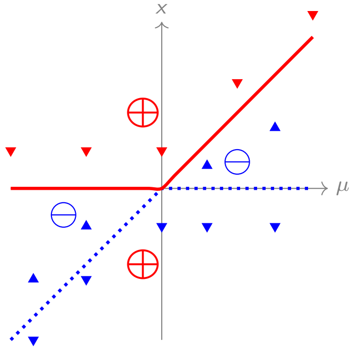
zobrazuje hodnoty dosiahnuté alebo ku ktorým sa približujeme asymptoticky (pevné body, periodické trajektórie alebo aj chaotické atraktory) systému ako graf funkcie parametra bifurkácie v danom systéme.



Obr.: $x' = \mu x - x^3$: superkritický prípad **vidlicovej** bifurkácie: červené čiary - stabilné body, bodkovaná modrá čiara - nestabilný bod (+ znamienka derivácie).



Obr.: $x' = \mu - x^2$: superkritický prípad bifurkácie typu **sedlo - uzol**: červené čiary - stabilný bod, bodkovaná modrá čiara - nestabilný bod.



Obr.: $x' = x^2 - \mu x$: superkritický prípad **transkritickej** bifurkácie: červená čiara - stabilný bod, bodkovaná modrá čiara - nestabilný bod.

Poznámka 1.

Z predchádzajúcich príkladov vidíme, že každý bod bifurkácie (x_0, μ_0) je stacionárny bod spĺňajúci $\partial_x f(x_0, \mu_0) = 0$.

Ak platí $f(x_0, \mu_0) \neq 0$, je pre parametre μ blízke μ_0 tiež $f(x_0, \mu) \neq 0$, takže riešenie je stále rovnaké. V bode (x_0, μ_0) potom nedochádza k bifurkácii.

Veta 2.

Nech $f \in \mathcal{C}^1$ na okolí bodu $(0,0)$ a $\boldsymbol{x}_0 = 0$ je hyperbolický stacionárny bod rovnice (8). Potom existujú kladné konštanty δ, Δ také, že pre každé $\mu \in U(0,\delta)$ existuje práve jeden hyperbolický stacionárny bod $\boldsymbol{x}(\mu) \in U(0,\Delta)$ rovnice (8). Naviac $\boldsymbol{x}(t;\mu)$ má stále rovnaký typ stability a $\mu \mapsto \boldsymbol{x}(t;\mu)$ je triedy $\mathcal{C}^1$.

Z poznámky 1 a vety 2 plynie, že nutnou podmienkou bifurkácie je prítomnosť nehyperbolického stacionárneho bodu.

Veta 3.

Majme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ triedy $\mathcal{C}^2$ na okolí bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Nech ďalej platí

$$f(0;0) = 0, \quad \partial_x f(0;0) = 0,$$
$$\partial_\mu f(0;0) \neq 0, \quad \partial^2_{xx}(0;0) \neq 0.$$

potom rovnica $x' = f(x;\mu)$ má v bode $(0,0)$ bifurkáciu typu sedlo-uzol.

Veta 4.

Majme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ triedy $\mathcal{C}^2$ na okolí bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Nech ďalej platí

$$f(0;0) = 0 \quad f(0;\mu) = 0 \quad \forall \mu \in U(O, \widetilde{\delta})$$
$$\partial_x f(0;0) = 0 \quad \partial_\mu f(0;0) = 0$$
$$\partial^2_{xx} f(0;0) \neq 0 \quad \partial^2_{x\mu} f(0;0) \neq 0$$

Potom rovnica $x' = f(x;\mu)$ má v bode $(0,0)$ transkritickú bifurkáciu.

Veta 5.

Majme funkciu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ triedy $\mathcal{C}^3$ na okolí bodu $(0,0) \in \mathbb{R}^2$. Nech ďalej platí

$$f(0;0) = 0 \quad f(0;\mu) = 0 \quad \forall \mu \in U(0,\widetilde{\delta})$$
$$\partial_x f(0;0) = 0 \quad \partial_\mu f(0;0) = 0$$
$$\partial^2_{xx} f(0;0) = 0 \quad \partial^2_{x\mu} f(0;0) \neq 0$$
$$\partial^3_{xxx} f(0;0) \neq 0$$

Potom rovnica $x' = f(x;\mu)$ má v bode $(0,0)$ vidlicovú bifurkáciu.

Príklad.

Majme teraz 2D systém.

$$x' = \mu x - y, \quad A_\mu = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$
$$y' = x + \mu y, \quad \sigma(A_\mu) = \{\mu \pm i\}$$

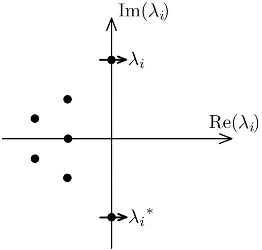
Riešenia v závislosti od parametra μ :

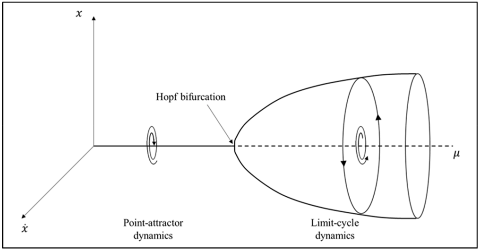
- $\mu < 0$: stabilný počiatok priťahujúci všetky riešenia
- $\mu = 0$: periodické riešenia okolo počiatku
- $\mu > 0$: nestabilný počiatok, všetky riešenia mieria z neho

Študujme teraz systém:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \boldsymbol{f}(x, y; \mu) \tag{9}$$

Označme $A_\mu = \nabla_{x,y}\boldsymbol{f}(0, 0; \mu)$ a $\sigma(A_\mu) := \{\alpha(\mu) \pm \omega(\mu)\}$.





Obr.: Komplexné vlastné hodnoty - v prípade Hopfovej bifurkácie pretínajú imaginárnu os dve komplexne konjugované vlastné hodnoty. Van der Polov oscilátor :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} - \mu(1 - x^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 0,$$

Veta 6 (Hopfova bifurkácia)**.**

Majme funkciu $\boldsymbol{f}(x, y; \mu) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ triedy $\mathcal{C}^2$ na okolí bodu $(0, 0, 0)$ spĺňajúcu $\boldsymbol{f}(0, 0; \mu) = (0, 0)$. Predpokladajme, že $\alpha, \omega \in \mathcal{C}^2, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0, \omega(0) > 0$. Potom existujú kladné konštanty δ, Δ a $\mathcal{C}^1$ funkcia $a \mapsto \mu(a); (0, \delta) \to (-\Delta, \Delta)$ taká, že pre všetky $a \in (0, \delta)$ existuje netriviálne periodické riešenie (9) prechádzajúce bodom $(x_0, y_0) = (a, 0)$ pre $\mu = \mu(a)$.

Veta 7 (Hopfova).

Nech sú splnené predpoklady vety 6 a naviac

$$A_0 = \nabla_{x,y} \boldsymbol{f}(0,0;0) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 \\ \omega_0 & 0 \end{pmatrix}$$

Potom existuje hladká (nelineárna) zámena súradníc taká, že v polárnych súradniciach má systém tvar

$$r' = c\mu r + ar^3 + O\left(r^5\right),$$

pričom pre r, μ malá môžeme členy piateho a vyšších rádov zanedbať. Naviac $c = \alpha'(0)$ a

$$16a = f^1_{xxx} + f^1_{xyy} + f^2_{xxy} + f^2_{yyy} + \frac{1}{\omega_0}\left[f^1_{xy}\left(f^1_{xx} + f^1_{yy}\right)\right.$$
$$\left. -f^2_{xy}\left(f^2_{xx} + f^2_{yy}\right) - f^1_{xx}f^2_{xx} + f^1_{yy}f^2_{yy}\right] \text{ celé v bode } (0,0,0).$$

Abstrakná teória DS

Nech $\mathcal{T}$ je **grupoid**[1], t.j. neprázdna množina spolu s binárnou operáciou $\oplus : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (tá teda spĺňa vlastnosť uzavretosti: $\forall s, t \in \mathcal{T}$ platí $s \oplus t \in \mathcal{T}$ a aj $\forall s, t \in \mathcal{T} \exists u \in \mathcal{T} : s \oplus t = u$.) My navyše chceme, aby obsahovala neutrálny prvok (identitu) t_0. Potom $\mathcal{T}$ predstavuje **časový** priestor (zvyčajne je to monoid alebo pologrupa, či dokonca grupa).

Definícia 1.

Dynamickým systémom rozumieme trojicu $(X, \mathcal{T}, g)$, kde $X \neq \emptyset$ označuje **stavový (fázový)** priestor a $g : U \subseteq X \times \mathcal{T} \to X$, $\mathrm{proj}_1(U) = X$, je **evolučná funkcia** spĺňajúca $\forall x \in X : g(x, t_0) = x, \; t_0 \in I(x)$, kde $I(x) := \{t \in \mathcal{T} : (t, x) \in U\}$.

Pre "ľubovoľný" t_0-časový stav $x^0 \in X$ evolučná funkcia špecifikuje stav $g(x^0, t)$ dynamického systém v čase $t \in I(x^0)$.

- Prvým krokom pri modelovaní dynamického systému je identifikácia stavových premenných.
- Presnejšia špecifikácia vyžaduje určenie vlastností stavového priestoru X, typ časového priestoru $\mathcal{T}$ a evolučnej funkcie g.
- Zvyčajne je najprv potrebné opísať interakciu medzi premennými a tak formulovať dynamické rovnice.

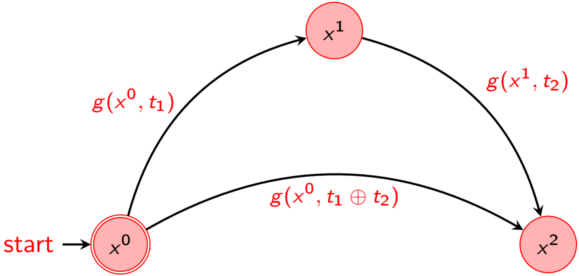
---

[1] Niekedy nazývaná aj magma.

Definícia 2.

DS je **autonómny**, ak $\forall x \in X \;\; \forall t, s \in \mathcal{T}: \;\; t, \;\; t \oplus s \in I(x), \;\; s \in I(g(x,t)):$ $g(x, t \oplus s) = g(g(x,t), s)$.

Autonómny = časovo invariantný systém - modeluje proces, ktorý sa odohráva v podmienkach nemeniacich sa v priebehu času.
Ak $\mathcal{T}$ je grupa a $U = \mathcal{T} \times X$, potom sa zobrazenie g nazýva **akcia grupy** $\mathcal{T}$ na množine X (pôsobenie $\mathcal{T}$ na X), alebo **jednoparametrická trieda transformácií**.



Veta 3.

Ak je $\tilde{g}_t$ evolučná funkcia autonómneho dynamického systému s počiatočnou podmienkou $\tilde{g}_{t_1} = \xi_1$, potom $g_t = \tilde{g}_{t \oplus t_1}$ je evolučná funkcia toho istého systému s počiatočnou podmienkou $g_{t_0} = \xi_1$.

Teda pri autonómnych systémoch nezáleží na tom aký čas zvolíme za počiatok. Viaceré systémy majú aj vlastnosť $g(x, t \oplus s) = g(x, s \oplus t)$, ak aj $s \oplus t \in I(x)$ v prípade komutativity operácie $\oplus$.

Veta 4.

Sústavy rovníc (11) a (10) generujú autonómne DS.

Príklad.

Majme $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{T} = \mathbb{N}_0^+$ $(\mathbb{Z})$ a sústavu

$$\boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n)) \tag{10}$$

a podmienku $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0$. Potom pre $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0, n) := \boldsymbol{x}(n)$ je $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0, 0) = \boldsymbol{x}^0$, pričom $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, 1)$, lebo

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(n)) = \boldsymbol{x}(n+1) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0, n+1) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0, n), 1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}^0, n))$$

Príklad.

Majme $X = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{T} = \mathbb{R}_0^+$ $(\mathbb{R})$ a sústavu

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \tag{11}$$

a podmienku $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$, $\boldsymbol{f}$ je lokálne lipschitzovské vzhľadom na $\boldsymbol{y}$. Potom je $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t) := \boldsymbol{y}(t)$ a $\boldsymbol{f} : X \to X$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) = \dfrac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}(\boldsymbol{y}, 0)$ je tzv. lokálne pravidlo zmeny stavu v čase. Zrejme $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, 0) = \boldsymbol{y}^0$ a

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t+\varepsilon) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t), \varepsilon) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t), 0)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t), 0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^0, t)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}(t))$$

- Budeme písať $g_x(t) \equiv g(x, t)$ a $g_t(x) \equiv g(x, t)$ ak je jedna z premenných fixovaná.
- $g_x : I(x) \to X$ sa nazýva **tok** cez bod x a jeho graf zasa **trajektória** cez bod x.
- Množina $orb(x) \equiv \{g_t(x),\ t \in I(x)\}$ sa nazýva **orbita** cez bod x, teda orbita cez bod x je obrazom toku cez x.
- X nazývame **fázový priestor** a **fázová krivka** je vlastne trajektória - stav systému.
- V literatúre sa trajektória a orbita často stotožňujú (definujú to isté).

Veta 5.

Majme autonómny dynamický systém a ľubovoľné $x, y, z \in X$. Ak $z \in orb(x)$ a $z \in orb(y)$, tak $orb(z) \subseteq orb(x)$ a $orb(z) \subseteq orb(y)$.

Intuitívne: ak je systém deterministický a dve dráhy majú a spoločný stav, potom sa od tohto stavu musia zhodovať; teda deterministický systémy nepripúšťajú kríženie orbít. Samozrejme, ak sa odlišné orbity neautonómnych systémov krížia, musia sa krížiť v rôznych časoch, aby to bolo v súlade so všeobecnou teorémou o jedinečnosti . Nasledovný výrok zdôrazňuje dva zaujímavé dôsledky.

Veta 6.

Majme autonómny dynamický systém a ľubovoľné $t \in \mathcal{T}$. Ak k nemu existuje inverzný prvok $\ominus t$, potom

1. g_t je bijekcia;
2. $g_{\ominus t}$ je inverzia g_t vzhľadom na operáciu skladania funkcií, a teda $g_{\ominus t} = (g_t)^{-1}$.

Definícia 7.

- Bod x je **ekvilibrium** systému (alebo aj stacionárny, kritický), ak $orb(x) = \{x\}$;
- x nazveme **periodický bod** systému, ak pre nejaké $t \in \mathcal{T}, t \neq t_0$ a $g_t(x) = x$; t je potom **perióda** bodu x;
- r je **periodická orbita** systému, ak pre nejaké $x \in X$, $r = orb(x)$ a x je periodický bod.

Všimnime si, že, ak t je perióda bodu x, potom je periodický. Naopak, ak x je periodický bod, existuje aspoň jedno t také, že je periódou bodu x. Tiež, ak t je perióda bodu x a existuje inverzia $\ominus t$ k t, potom $\ominus t$ je tiež jeho periódou.

Veta 8.

Ak x je ekvilibrium systému, potom je periodickým bodom a ľubovoľné $t \neq t_0$ je jeho periódou.

Disipatívne systémy

- Už vieme, že konzervatívne systémy sú neoddeliteľnou súčasťou hamiltonovskej mechaniky.
- Dichotómia dynamických systémov, konzervatívne verzus disipatívne systémy, je veľmi dôležitá.
- Zvláštnu pozornosť si zaslúžia aj disipatívne systémy.
- T.j. systémy, ktoré majú tú vlastnosť, že ak sa počiatočný stav nachádza kdekoľvek vo fázovom priestore, s rastúcim časom sa trajektórie sťahujú do určitej časti tohoto priestoru s nulovým objemom.
- Presnejšie povedané objem sledovanej oblasti fázového priestoru s časom klesá k nule (div vzhľadom na premennú fázového priestoru je záporná).
- Sú týmito oblasťami, zvanými atraktory, priťahované.

Veta 1 (Ljapunova).

Nech $\boldsymbol{f} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\boldsymbol{f}(0) = 0$, $U \subset \mathbb{R}^n$ je okolie bodu $\boldsymbol{y} = 0$ a existuje funkcia $V \in C^1(U, \mathbb{R})$ taká, že platí:

1. $V(\boldsymbol{y}) \geq 0$ pre všetky $\boldsymbol{y} \in U$, pričom $V(\boldsymbol{y}) = 0, \boldsymbol{y} \in U \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = 0$
2. Existuje funkcia $W \in C(U, \mathbb{R})$ taká, že $W(\boldsymbol{y}) \geq 0$ pre všetky $\boldsymbol{y} \in U$, pričom $W(\boldsymbol{y}) = 0, \boldsymbol{y} \in U \Leftrightarrow \boldsymbol{y} = 0$ a

$$\dot{V} = \langle \nabla V(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} f_i(\boldsymbol{y}) \leq -\beta\, W(\boldsymbol{y})$$

   pre všetky $\boldsymbol{y} \in U$, kde $\beta \geq 0$. Potom, ak $\beta = 0$ ($\beta > 0$), tak triviálne riešenie rovnice (7) je stabilné (asymptoticky stabilné).
3. Ak $\dot{V}$ je pozitívne definitná na U, potom je triviálne riešenie rovnice (7) nestabilné.

Poznámka 2.

Nevýhodou uvedenej metódy je, že nemáme návod ako túto funkciu nájsť. Pozor - nie je ani zaručené, že oblasť stavového priestoru, v ktorom platí uvedená podmienka stability reprezentuje celú skutočnú oblasť stability (voľba Ljapunovej funkcie nie je jednoznačná).

Príklad.

Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1\, x_2^4, \\ x_2' &= -x_1^2\, x_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Funkcia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ zrejme spĺňa prvú podmienku predchádzajúcej vety a $\dfrac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = -2x_1^2 x_2^4 \leq 0$ pre všetky $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Teda bod $(0, 0)$ je stabilný.

Príklad.

Uvažujme systém

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1^3 - x_2, \\ x_2' &= x_1 - x_2^3. \end{aligned} \tag{13}$$

Funkcia $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ zrejme spĺňa prvú podmienku predchádzajúcej vety a $\dfrac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \dfrac{\partial V}{\partial x_2} f_2 = -2(x_1^4 + x_2^4)$. Ak definujeme $W(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ a $\beta = -2$, potom z druhej podmienky vety je singulárny bod $(0, 0)$ asymptoticky stabilný.

Definícia 3.

Nech X je Banachov priestor, alebo jeho uzavretá podmnožina. Množina $B_0 \subset X$ sa nazýva **absorbujúca** v X, ak $\forall B \subset X$ ohraničenú $\exists\ t(B) : g_s B \subset B_0,\ \forall s \geq t$. DS je **disipatívny**, ak obsahuje ohraničenú absorbujúcu množinu.

Množina je teda absorbujúca, ak trajektórie v každej ohraničenej množine v X do nej po určitom čase vstúpia.

Definícia 4.

DS je **asymptoticky kompaktný**, ak platí: $t_n \to \infty$, $\{x_n\} \subset X$ ohraničená implikuje $g_{t_n}(x_n)$ má hromadný bod v X.

Poznámka 5.

Ak $\dim X < \infty$, tak disipativita $\Leftrightarrow$ asymptotickou kompaktnosťou.

Definícia 6.

$A \subset X$ nazveme **globálny atraktor** DS (X, g_t), ak

1. A je kompaktná
2. A je úplne invariantná (t.j. $g_t A = A\ \forall t > 0$)
3. $\mathrm{dist}(g_t B, A) \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \forall B \subset X$ ohraničená

Poznámka 7.

Globálny atraktor existuje najviac jeden. Je to najmenšia množina popisujúca chovanie DS pre $t \to \infty$.

Veta 8.

Nech DS g_t je disipatívny a asymptoticky kompaktný, potom existuje jeho globálny atraktor $A \neq \emptyset$ a je to súvislá množina. Navyše $A = \bigcap_{s \geq 0} \overline{\bigcup_{t \geq s} g_t B}$, kde B je ohraničená absorbujúca množina DS.

Disipativitu dynamického systému možno spravidla odvodiť z existencie funkcie Ljapunovho typu vo fázovom priestore.

Veta 9.

Nech existuje spojitá $U : X \to \mathbb{R}$ taká, že $\phi_1(||x||) \leq U(x) \leq \phi_2(||x||)$, kde $\phi_j \in C(\mathbb{R}^+)$ a $\lim_{r \to \infty} \phi_1(r) = \infty$. Ďalej nech existujú $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(g_t x)$, $t > 0$ a kladné α, ρ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(g_t x) \leq -\alpha \text{ pre } ||g_t x|| > \rho.$$

Potom je DS (X, g_t) disipatívny.

Ak je operátor disipatívny znamená to, že energia systému je nerastúca v čase (Disipácia (z lat. dissipatio, rozptyľovanie) označuje nevratnú zmenu energie na inú.). Mieru disipácie možno označiť ako podiel stratenej energii na celkovej energii (je to teda účinnosť využitia energie). Príklad je šírenie tepla prúdením. Systém vlastne absorbuje ''zásoby'' (energie).
Majme abstraktnú Cauchyho úlohu

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U = TU \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

a zvoľme priestor $(H, \|\cdot\|_H)$ tak, aby bola energia systému bola

$$E(t) = \|U(t)\|_H^2 = \langle U(t), U(t) \rangle_H.$$

Potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t), U(t) \right\rangle_H + \left\langle U(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} U(t) \right\rangle_H = 2\mathrm{Re}\Big(\langle TU(t), U(t) \rangle_H \Big).$$

Definícia 10.

Operátor $T : H \to H$ nazveme **disipatívny**[a], ak $\operatorname{Re}\langle Tx, x\rangle \leq 0 \quad \forall x \in D_T$.

[a] Operátor T je **akretívny**, ak $-T$ je disipatívny.

Príklad.

Majme $H = \mathcal{L}^2(0,1)$ a $Au = u'$ tak, že $D_A = \{u \in \mathcal{L}^2(0,1) : u' \in \mathcal{L}^2(0,1),\ u(1) = 0\}$. Potom per-partes dáva

$$\langle Au, u\rangle = \int_0^1 u(x)u'(x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}u(0)^2 \leq 0.$$

(POZOR tento operátor nie je vo všeobecnosti samoadjungovaný).

Príklad (1963 - Lorenzov systém).

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \tag{14}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z, \tag{16}$$

kde $\sigma, \rho, \beta > 0$, x je rýchlosť cirkulácie, y horizontálna a z vertikálna výchylka teploty.

Veta 11.

Lorenzov systém má globálny atraktor $A_L \subset \mathbb{R}^3$, keďže $X = \mathbb{R}^3, \dim X < \infty$.

Poznámka 12.

Pre $M \subset \mathbb{R}^3$ je $\lambda_3(g_t M) = \int_M \mathrm{e}^{\int_0^t (\operatorname{div} F)(g_s \eta)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\eta$, a teda

$$\lambda_3(A_L) = \lambda_3(g_1 A_L) = \int_{A_L} \mathrm{e}^{\int_0^t (-\sigma - 1 - \beta\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}\eta = \lambda_3(A_L)\mathrm{e}^{-\sigma - 1 - \beta}.$$

Ale A_L je ohraničená: $\lambda_3(A_L) < \infty$ a tak $\lambda_3(A_L) = 0$.

Ergodická teória

Pripomeňme, že Hamiltonovské systémy zachovávajú objem (mieru). Nasledujúca veta hovorí, že určité dynamické systémy sa po dostatočne dlhom, ale konečnom čase vrátia do stavu ľubovoľne blízkeho (pre systémy so spojitým stavom) alebo presne rovnakého (pre systémy s diskrétnym stavom) ich počiatočnému stavu. Je to vlastne matematická formulácia myšlienky večného návratu.

Veta 1 (Poincarého rekurentný teorém)**.**

Nech (X, Σ, μ) je priestor s konečnou mierou a $g_t : X \to X$ je transformácia zachovávajúca mieru. Potom pre ľubovoľnú $E \in \Sigma : \ \mu(E) > 0$ platí, že $\{x \in E : \exists \tilde{t} : \forall t > \tilde{t}, g_t(x) \in A^c\}$ je nulovej miery.

To znamená, že množina bodov $x \in E$, ktorá sa nikdy nevráti do E, má mieru nulu, alebo inak - μ-takmer každý bod $x \in E$ sa vráti do E.
V prípade diskrétnych DS: pre ľubovoľnú $E \in \Sigma : \ \mu(E) > 0$, je množina tých bodov $x \in E$, pre ktoré existuje $N \in \mathbb{N}$ tak, že $g^{[n]}(x) \notin E$ pre všetky $n > N$, nulovej miery.

Poznámka 2.

Platí viac:

- takmer každý bod vracia do E nekonečne často;
- na to stačí dokonca tzv. nestlačiteľnosť: $A \subset g_t^{-1}(A) \longrightarrow \mu(g_t^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Aká je ale frekvenciu návštev bodu $x \in X$ do množiny A? To je celkom prirodzená otázka, súvisiaca s predstavou, že ak 'turista' x putuje po svete X a pritom neuprednostňuje žiadnu časť sveta pred inou, tak veľkú krajinu bude navštevovať častejšie ako malú krajinu. Ak krajina A má veľkosť $\mu(A) = (1/100)\mu(X)$, tak takýto turista ju bude navštevovať s frekvenciou 0.01 (len jedno percento času strávi v A). Ak nás zaujíma dynamika v systéme (X, Σ, μ, g), tak by nám uľahčilo prácu, keby bol systém rozložiteľný v tom zmysle, že by X bolo možné rozložiť na dve disjunktné, navzájom neinteragujúce časti.

Definícia 3.

Nech (X, Σ, μ) je priestor s mierou a $g : X \to X$ je merateľné zobrazenie. Systém (X, Σ, μ, g) sa nazýva **ergodický**, sa X nedá vyjadriť v tvare $X = A \cup B$, kde $\mu(A) > 0, \mu(B) > 0$ a $g(A) \subseteq A, T(B) \subseteq B$. V takom prípade tiež hovoríme, že miera μ je ergodická (pre g) alebo že zobrazenie g je ergodické (vzhľadom na μ).

Ergodicita je ekvivalentná s vlastnosťou, že pre akúkoľvek $A \in \mathcal{B}$ takú, že $g^{-1}(A) = A$ buď $\mu(A) = 0$ alebo $\mu(A) = 1$. Slovo ergodický pochádza z gréckych slov *ergon* = práca, energia a *odos* = cesta. Napr. Lebesguova miera v rovine nie je ergodická pre posunutie).

Veta 4 (Birkhoffova–Chinčinova-Hopfova o ergodicite)**.**

Nech (X, Σ, μ) je priestor so σ-konečnou mierou a $g\colon X \to X$ je transformácia zachovávajúca mieru.

- Potom pre ľubovoľnú funkciu $f \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$, limita $\hat{f}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(g^{[j]}x)$ existuje pre skoro všetky $x \in X$ a $\hat{f} \in \mathcal{L}^1(X, \Sigma, \mu)$.
- Ak $\mu(X) < \infty$, potom $\int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int_X \hat{f} \,\mathrm{d}\mu$, a ak navyše je g ergodické, tak $\hat{f} = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ (Boltzmannova ergodická hypotéza).
- Navyše, ak $\mu(X) = 1$, potom $\hat{f}(x) = \mathrm{E}[f \mid \mathcal{C}](x)$, kde $\mathcal{C}$ je σ-algebra invariantných množín g.

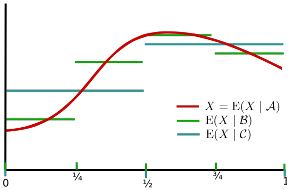
$\hat{f}$ je **časový priemer**, alebo **priemer pozdĺž trajektórie**. Veta vlastne hovorí, že pre každý bod existuje stredný počet vstupov do ľubovoľnej merateľnej množiny. Označme $\mathrm{frekv_A(x)}$ frekvenciu, s akou bod $x \in X$ navštevuje množinu A.

Dôsledok 5.

Ak platia predpoklady vety 4 a $A \in \Sigma$, tak $\mathrm{frekv}_\mathrm{A}(\mathrm{x})$ existuje pre s.v. $x \in X$. Ak je μ konečná, tak $\int_X \mathrm{frekv}_\mathrm{A}(\mathrm{x})\,\mathrm{d}\mu = \mu(\mathrm{A})$. Ak g je ergodické, potom $\mathrm{frekv}_\mathrm{A}(\mathrm{x}) = \dfrac{\mu(\mathrm{A})}{\mu(\mathrm{X})}$ pre s.v. $x \in X$ a $\mathcal{C}$ je triviálna σ-algebra, a teda s pravdepodobnosťou 1 platí $\mathrm{E}[f \mid \mathcal{C}]$ je konštantné a $\hat{f} = \mathrm{E}[f]$.

Príklad.

Hádžme spravodlivou kockou. Nech $A = 1$ v párnom prípade a $A = 0$ inak. Ďalej nech $B = 1$, ak je to prvočíslo a $B = 0$ inak. Nepodmienečné očakávanie A je $\mathrm{E}[A] = 3/6 = 1/2$, ale očakávanie A podmienené $B = 1$ je $\mathrm{E}[A \mid B = 1] = 1/3$.



Obr.: $([0,1], \Sigma, \lambda)$. Nech $\mathcal{A} = \Sigma$, $\mathcal{B}$ je σ-algebra generovaná intervalmi s koncovými bodmi $0, 1/4, 1/23/4, 1$ a $\mathcal{C}$ je σ-algebra generovaná intervalmi s koncovými bodmi $0, 1/2, 1$. Podmienené očakávanie je tu spriemernenie na minimálnych množínách σ-algebry.

Definícia 6.

Nech (X, Σ, μ) je pravdepodobnostný priestor. Podmienená stredná hodnota $\mathsf{E}(X \mid \mathcal{H})$ náhodnej premennej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ vzhľadom na danú sub-σ-algebru $\mathcal{H} \subseteq \Sigma$, je ľubovoľná $\mathcal{H}$ merateľná funkcia $\Omega \to \mathbb{R}$, ktorá spĺňa:

$$\int_H \mathsf{E}(X \mid \mathcal{H})\,\mathrm{d}\mu = \int_H X\,\mathrm{d}\mu$$

pre každú $H \in \mathcal{H}$.

Poznámka 7.

V spojitom prípade $\hat{f}(x) := \lim\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(g_t(x))\,\mathrm{d}t$

Dôsledok 8 (Štatistická ergodická veta)**.**

Nech (X, Σ, μ) je priestor s pravdepodobnostnou mierou a $g\colon X \to X$ je transformácia zachovávajúca mieru. Potom pre ľubovoľnú funkciu $f \in \mathcal{L}^p(X, \Sigma, \mu)$, $p \in [1, \infty)$, platí

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f \circ g^{[j]} - \mathsf{E}[f|\mathcal{C}] \right\|_{\mathcal{L}^p} = 0.$$

Chaos, fraktály

- Čo znamená zložité chovanie systému?
- Voľne povedané - chovanie, ktoré je ohraničené, neutíchajúce, neperiodické.
- Štatistická predvídateľnosť: fyzikálne veličiny síce podliehajú nepredvídateľným fluktuáciám, ale charakteristiky týchto veličín (napr. stredné hodnoty) je možné predpovedať pomerne jednoducho (integrácia vo fázovom priestoru).
- Neexistuje konsenzus o presnej definícii chaotického správania medzi matematikmi a fyzikmi.

Definícia 1.

F má v $U \subset X$ **citlivú závislosť od počiatočných podmienok**, ak existuje $r > 0$ také, že $\forall x \in U$ a $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in B(x, \varepsilon)$ a $t \in \mathbb{R}^+ : ||g_t x - g_t y|| > r$.

Pozor, y nemusí byť nevyhnutne v U. Ak U je ohraničená a uzavretá, $F \in C(U, U)$, potom citlivosť od počiatočných podmienok je ekvivalentná s nestabilitou trajektórií v U.

Definícia 2.

F je v $U \subset X$ **topologicky tranzitívne**, ak.

Navyše, ak U je ohraničená a uzavretá, $F \in C(U, U)$, potom je topologická tranzitívnosť v U ekvivalentná s existenciou $x_0 \in U$, ktorého orbita je hustá v U.

Definícia 3.

$F : C(U, U),\ U \subseteq \mathbb{R}^n$ je **chaotické** v U v Devaneyovom zmysle, ak

a) je topologicky tranzitívne v U,
b) periodické body sú husté v U,
c) má citlivú závislosť od počiatočných podmienok.

Poznámka 4.

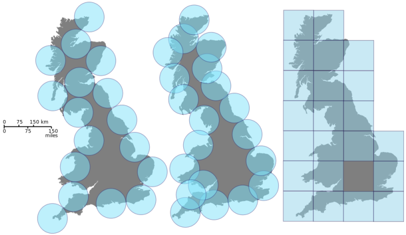
Pre chaos nie je postačujúca iba vlastnosť citlivosti na počiatočné podmienky. Nutná podmienka chaotického chovania je nelinearita dynamiky.

Nech $N^X(A,\varepsilon)$ je najmenší počet uzavretých gúľ s polomerom ε a stredom v A.

Definícia 5.

Fraktálna dimenzia množiny $A \subset X$

$$\dim_{fr}^X(A) := \limsup_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\ln N^X(A,\varepsilon)}{-\ln \varepsilon}$$



Obr.: Ball and box counting dimensions.

Lema 6.

Nech $A = B(0, R)$, $\dim(A) = n$, $r \leq R$, potom

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq N^{\mathbb{R}^n}(A, r) \leq \left(\frac{3R}{r}\right)^n$$

Dôsledok 7.

$\dim_{fr}^{\mathbb{R}^n}(A) = n.$

Veta 8 (O exponenciálnom atraktore)**.**

Nech $g \in \mathrm{Lip}_K(U, U)$, potom $\exists c > 0, \eta \in (0, 1), K \geq 1$ a kompaktná $E \subset X :\ g(E) \subset E,\ \forall t > 0\ \mathrm{dist}^X(g_t U, E) \leq ce^{-\eta t}$ a $\dim_{fr}^X(E) \leq \dfrac{\ln K}{-\ln \eta}$.

Ljapunove exponenty

- Asymptotické chovanie trajektórií lineárnych systémov ležiacich blízko nejakej fixnej trajektórie je dané asymptotickým chovaním fundamentálnej matice.
- Pre nelineárne systémy uvažujme dotykové priestory bodov, cez ktoré trajektória prechádza.
- Vektory tvoriace k-rovnobežnosten označme $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$.
- Fázový tok premiestni bod $\boldsymbol{x}_0$ za čas t do bodu $g_t\boldsymbol{x}_0$ a vektory sa zobrazia tiež na $J_t^{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{e}_1, \dots, J_t^{\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{e}_k$, kde $J_t^{\boldsymbol{x}_0} = \frac{\partial g_t}{\partial \boldsymbol{x}}|_{\boldsymbol{x}_0}$, pričom vytvoria nový rovnobežnosten.
- Je známe, že objem rovnobežnostena generovaného vektormi $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k$ je daný gramiánom.

Definícia 9.

Nech $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, potom pre k vektorov z $\mathbb{R}^n$ definujeme **Gramovu maticu (determinant - gramián)**

$$G(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k) = \begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_k \rangle \\ \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_2 \rangle & \dots & \langle \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_k \rangle \end{bmatrix}.$$

Poznámka 10.

Gramova matica je vlastne súčin matíc $\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X}$ a taktiež sa dá definovať pomocou zovšeobecnenia vektorového súčinu.
Ak je $\boldsymbol{Q}$ ortogonálna matica (tj. $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{I} \leftrightarrow \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{Q}^{-1}$), potom $G(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}_k) = G(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k)$ pre všetky $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Definícia 11.

Nech $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}$ sú lineárne nezávislé vektory z $\mathbb{R}^n$. Ich **vektorovým súčinom** nazývame vektor $\boldsymbol{x}_1 \wedge \dots \wedge \boldsymbol{x}_n$ s $i-$tou zložkou $v_i := (-1)^{n+i} \det V_i$, kde V_i je matica, ktorú dostaneme z matice $(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1})$ vynechaním i-teho riadku.

Poznámka 12.

Platí

$$[\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}] = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & \boldsymbol{e}_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & \boldsymbol{e}_n \end{vmatrix}.$$

Ak $n = 3$, tak ide o štandardný vektorový súčin.

Veta 13.

Pre k-rovnobežnosten generovaný vektormi $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n$ platí

$$S_k(P) = \sqrt{\det G(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k)} = \|\boldsymbol{x}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_k\| > 0,$$

kde pre $k = n$ zrejme $S_n(P) = \lambda_n(P)$.

Definícia 14.

Ak existuje limita

$$\lambda(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_k) := \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\left\| J_t^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge J_t^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{e}_k \right\|}{\|\boldsymbol{e}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_k\|}$$

nazýva sa k-**rozmerný Ljapunov exponent** trajektórie sústavy $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

Je mierou rýchlosti zmeny objemu rovnobežnostena pri jeho posúvaní pozdĺž danej trajektórie. Je dobré si uvedomiť, že nezávisí od výberu k-tice vektorov dotykového priestoru.

Veta 15.

- a) Jednorozmerné Ljapunove exponenty (spektrum) môžu nadobúdať najviac n rôznych hodnôt $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_n$.
- b) k-rozmerné Ljapunove exponenty môžu nadobúdať najviac $\binom{n}{k}$ rôznych hodnôt a každý z nich je súčtom k jednorozmerných Ljapunových exponentov.

Poznámka 16.

Jednorozmerné Ljapunove exponenty: zrejme

$$\lambda(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{e}_1) := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\left\| J_t^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{e}_1 \right\|}{\|\boldsymbol{e}_1\|} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln \left\| J_t^{\boldsymbol{x}_0} \boldsymbol{e}_1 \right\|.$$

$\lambda(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{e}_1)$ popisuje chovanie trajektórií, ktoré prechádzajú bodmi $\boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{e}_1$, $|\varepsilon| \ll 1$, voči danej trajektórii prechádzajúcej bodom $\boldsymbol{x}_0$. Ak je $\lambda(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{e}_1) < 0$, znamená to ich približovanie pre $t \to \infty$. Naopak, ak je $\lambda(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{e}_1)$ kladné, tak sa vzďaľujú s exponenciálnou rýchlosťou (citlivosť závislosti chovania systému na počiatočných podmienkach).

Možno si to predstaviť tak, že guľa (kocka) vo fázovom priestore se bude v jednom (alebo viacerých) smeroch rozťahovať a v iných zasa zmršťovať. Počet smerov, v ktorých se rozťahuje, je rovný počtu kladných Ljapunových exponentov.
Niekedy sa dajú Ljapunove exponenty spočítať (o.i. aj cez ergodickú vetu).

Najväčší kladný Ljapunov exponent sa zvyčajne považuje za indikáciu, že systém je chaotický (avšak za predpokladu, že sú splnené niektoré ďalšie podmienky, napr. kompaktnosť fázového priestoru).
Ak je systém konzervatívny, objem množiny vo fázovom priestore zostane rovnaký pozdĺž trajektórie. Teda súčet všetkých Ljapunových exponentov teda musí byť nula.
Ak je systém disipatívny, súčet Ljapunových exponentov je záporný.
Zo znalosti Ljapunovho spektra je možné získať takzvanú Ljapunovu dimenziu (alebo Kaplan-Yorkeovu dimenziu) D_{KY}, ktorá je definovaná nasledovne:

$$D_{KY} = k + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i}{|\lambda_{k+1}|}$$

kde k je maximálne celé číslo, tak že súčet k najväčších exponentov je stále nezáporný.

Poznámka 17.

Pre diskrétny systém $x_{n+1} = f(x_n)$ začínajúci v x_0 je analogicky Ljapunov exponent definovaný ako

$$\lambda(x_0) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Príklad (Bernoulli's shift).

Nech $x_{n+1} = f(x_n)$, kde $f(x) = 2x \mod 1,\ x \in [0,1)$. Zrejme $f'(x) = 2$ s.v. a teda $\lambda(x_0) = \ln 2$ nezávisle na $x_0 \in [0,1)$.

Definícia 1.

Normovaným lineárnym priestorom (NLP) nazývame lineárny (vektorový) priestor X nad telesom $\mathbb{K}$, na ktorom je daná nezáporná reálna funkcia $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_0^+$ s nasledujúcimi vlastnosťami

- $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ pre každé $\|\boldsymbol{x}\|, \|\boldsymbol{y}\| \in X$
- $\|\lambda\, \boldsymbol{x}\| = |\lambda|\, \|\boldsymbol{x}\|$ pre každé $\boldsymbol{x} \in X,\ \lambda \in \mathbb{K}$
- $\|\boldsymbol{x}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = 0$.

Takúto funkciu voláme **norma** a priestor vlastne tvorí dvojica $(X, \|\cdot\|)$.

Lema 2.

Každý NLP je tiež metrický priestor.

Poznámka 3.

Pozor, na rozdiel od metrického priestoru, nie každá podmnožina lineárneho priestoru je lineárny priestor. Musí byť uzavretá na operácie sčítania a skalárneho násobenia.

Lema 4.

V konečnorozmerných priestoroch sú všetky normy ekvivalentné.

Príklad.

Na reálnom Euklidovom priestore $\mathbb{R}^n$ možno zaviesť niekoľko noriem. Euklidovskou p-**normou** nazývame výraz $\|\boldsymbol{x}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$, $p \geq 1$ a podobne pre $p = \infty$ definujeme $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup_i |x_i|$. Pre fixované $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ sa dá zaviesť tzv. eliptická norma: $\|\boldsymbol{x}\|_e = \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i^2}}$.

Na komplexnom priestore $\mathbb{C}^n$ možno definovať aj tzv. hermitovskú normu $\|\boldsymbol{z}\|_2 = \sqrt{z_1\overline{z_1} + \cdots + z_n\overline{z_n}}$.

Problém 5.

Ktorý z priestorov $(\mathbb{R}^n, \max\{\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_e\}), (\mathbb{R}^n, \min\{\|\boldsymbol{x}\|_1, \|\boldsymbol{x}\|_e\})$ je normovaný?

Zavádzame asi najdôležitejší pojem z funkcionálnej analýzy, ktorý je pomenovaný po poľskom matematikovi Stefanovi Banachovi.

Definícia 6.

NLP $(X, \|\cdot\|)$ nazývame **Banachov**, ak je **úplný** (vzhľadom k metrike $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$), t.j. každá cauchyovská postupnosť $\{\boldsymbol{u}_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ konverguje k nejakému prvku $\boldsymbol{u} \in X$.

Definícia 7.

Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{P}$ (napr. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$), potom zobrazenie $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{P}$ nazývame **skalárny súčin**, ak $\forall\; x, y, z \in V$ a $\forall \alpha \in \mathbb{P}$

a) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$,
b) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$,
$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
c) $\langle x, x\rangle \geq 0$, pričom rovnosť je len pre $x = 0$.

Priestor so sklalárnym súčinom nazývame **unitárny priestor.**

Príklad.

Euklidovský priestor dimenzie $n \in \mathbb{N}$, spolu so skalárnym súčinom

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

je dôležitým príkladom unitárneho priestoru.

Príklad.

Priestor štvorcových matíc, kde definujeme $\langle A, B\rangle := \mathrm{tr}(AB^T)$ je priestor so skalárnym súčinom.

Príklad.

Pre náhodné premenné X, Y definujeme strednú hodnotu ich súčinu

$$\langle X, Y\rangle := \mathrm{E}(XY),$$

čo je skalárny súčin, pričom $\langle X, Y\rangle = 0$ akk $Pr(X = 0) = 1$ (t.j., $X = 0$ s.v.).

Veta 8 (Cauchyho-Buňakovského-Schwarzova nerovnosť)**.**

Na unitárnom priestore V so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot\rangle$ platí:

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \quad \forall x, y \in V.$$

Poznámka 9.

Unitárny priestor V je aj NLP s normou $\|x\|^2 := \langle x, x\rangle$ a teda aj metrickým priestorom, kde pre prvky $x, y \in V$ definujeme metriku ako

$$d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Definícia 10.

Nech X je nejaká množina. **Okruhom** nazývame systém podmnožín $\mathcal{S} \subset 2^X$, pre ktorý platí

- a) $A, B \in \mathcal{S} \ \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$
- b) $A, B \in \mathcal{S} \ \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S}$

Okruh $\mathcal{S}$ sa nazýva σ-**okruhom**, ak pre každú postupnosť prvkov $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ z $\mathcal{S}$ je aj

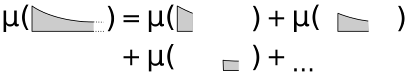
$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}.$$

Definícia 11.

Množinová funkcia τ na okruhu $\mathcal{S} \neq \emptyset$ je **aditívna**, ak pre každé disjunktné $A, B \in \mathcal{S}$ platí $\tau(A \cup B) = \tau(A) + \tau(B)$. Množinová funkcia τ_s na σ-okruhu $\mathcal{S} \neq \emptyset$ je σ-**aditívna**, ak pre každé po dvoch disjunktné $A_i \in \mathcal{S}, \ i = 1, 2, \ldots$ platí

$$\tau_s\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_s(A_i).$$

Nezáporná σ-aditívna množinová funkcia μ definovaná na σ-okruhu $\mathcal{S}$ sa nazýva **miera**. **Priestor s mierou** je trojica $(X, \mathcal{S}, \mu)$.



Obr.: σ-aditivita množinovej funkcie μ.

Príklad.

- (a) triviálna miera - $X \neq 0,\ \mu(A) = 0$ pre každú $A \in \mathcal{S}$
- (b) Diracova miera - $X \neq 0,\ \mathcal{S} = 2^X,\ x \in X,\ \mu(A) = \delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$, pre každú $A \subset X$.
- (c) aritmetická (sčítacia) miera - $X \neq 0,\ \mu(A) = \#A$ pre každú $A \in \mathcal{S}$
- (d) pravdepodobnostná miera - normovaná miera $(\mu(X) = 1)$