Systémy diferenciálnych rovníc

1. Nájdite lineárny homogénny diferenciálny systém, ak je daný jeho fundamentálny systém riešení (udajte aj nejaký interval I, na ktorom daný systém existuje !).

a) $Y_1 = (e^x, e^x)$, $Y_2 = \left(3e^{-x}, 5e^{-x}\right)$ ... $y_1' = 4y_1 - 3y_2$, $y_2' = 5y_1 - 4y_2$

b) $Y_1 = (1, -x)$, $Y_2 = (x, 1)$ ... $y_1' = \dfrac{x}{1+x^2}y_1 + \dfrac{1}{1+x^2}y_2$, $y_2' = -\dfrac{1}{1+x^2}y_1 + \dfrac{x}{1+x^2}y_2$

c) $Y_1 = (\cos 2x, -\sin 2x)$, $Y_2 = (\sin 2x, \cos 2x)$ ... $y_1' = 2y_2$, $y_2' = -2y_1$

d) $Y_1 = \left(1+x^2, x\right)$, $Y_2 = \left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{2}{1+x^2}\right)$ ... $y_1' = \dfrac{1+5x^2}{x(1+x^2)}y_1 - \dfrac{1+3x^2}{x^2}y_2$, $y_2' = \dfrac{2+6x^2}{(1+x^2)^2}y_1 - \dfrac{1+5x^2}{x(1+x^2)})y_2$

e) $Y_1 = (3, 1, 2)$
$Y_2 = (4\sin x + 9\cos x, \sin x + 3\cos x, 2\sin x + 7\cos x)$
$Y_3 = (9\sin x - 4\cos x, 3\sin x - \cos x, 7\sin x - 2\cos x)$
... $y_1' = -9y_1 + 19y_2 + 4y_3$, $y_2' = -3y_1 + 7y_2 + y_3$, $y_3' = -7y_1 + 17y_2 + 2y_3$

2. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych homogénnych diferenciálnych systémov (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = -y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$ ... $y_1 = c_1e^x + c_2xe^x$, $y_2 = -c_1e^x - c_2(x+1)e^x$

b) $y_1' = y_1 + y_2$, $y_2' = -5y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$, $y_2 = (-c_1 + 2c_2)\cos 2x - (2c_1 + c_2)\sin 2x$

c) $y_1' = 2y_1 + y_2$, $y_2' = 3y_1 + 4y_2$ ... $y_1 = c_1e^{5x} + c_2e^x$, $y_2 = 3c_1e^{5x} - c_2e^x$

d) $y_1' = -5y_1 + 2y_2$, $y_2' = y_1 - 6y_2$ ... $y_1 = 2c_1e^{-4x} - c_2e^{-7x}$, $y_2 = c_1e^{-4x} + c_2e^{-7x}$

e) $y_1' = 2y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + 2y_2$ ... $y_1 = e^{2x}(c_1\cos x + c_2\sin x)$, $y_2 = e^{2x}(c_1\sin x - c_2\cos x)$

f) $y_1' = 3y_1 - y_2$, $y_2' = y_1 + y_2$ ... $y_1 = e^{2x}(c_1 + c_2x)$, $y_2 = e^{2x}(c_1 - c_2 + c_2x)$

g) $y_1' = -3y_1 + y_2$, $y_2' = -y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1e^{-2x} + c_2e^{-2x}(x-1)$, $y_2 = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}$

h) $y_1' = y_1 - 2y_2$, $y_2' = 2y_1 + y_2$ ... $y_1 = c_1e^x\cos 2x + c_2e^x\sin 2x$, $y_2 = c_1e^x\sin 2x - c_2e^x\cos 2x$

i) $y_1' = 2y_1 + 4y_2$, $y_2' = y_1 - y_2$ ... $y_1 = 4c_1e^{3x} - c_2e^{-2x}$, $y_2 = c_1e^{3x} + c_2e^{-2x}$

j) $y_1' = 2y_1 + y_2$ ... $y_1 = c_1 e^{2x} - c_2 e^{3x}\cos x - c_3 e^{3x}\sin x$
$y_2' = y_1 + 3y_2 - y_3$ $\quad y_2 = c_2 e^{3x}(\sin x - \cos x) - c_3 e^{3x}(\sin x + \cos x)$
$y_3' = -y_1 + 2y_2 + 3y_3$ $\quad y_3 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}(-2\cos x - \sin x) + c_3 e^{3x}(-2\sin x + \cos x)$

k) $y_1' = y_2$ ... $y_1 = c_1 + e^{x}(2c_2 - c_3 + 2c_3 x)$
$y_2' = 4y_1 + 3y_2 - 4y_3$ $\quad y_2 = e^{x}(2c_2 + c_3 + 2c_3 x)$
$y_3' = y_1 + 2y_2 - y_3$ $\quad y_3 = c_1 + e^{x}(3c_2 - c_3 + 3c_3 x)$

l) $y_1' = -y_1 + y_2$ ... $y_1 = 4c_1 + c_2 e^{-3x} + c_3(x+1)e^{-3x}$
$y_2' = -y_2 + 4y_3$ $\quad y_2 = 4c_1 - 2c_2 e^{-3x} + c_3(-2x-1)e^{-3x}$
$y_3' = -4y_3 + y_1$ $\quad y_3 = c_1 + c_2 e^{-3x} + c_3 x e^{-3x}$

m) $y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3$ ... $y_1 = 8c_1 e^{x} + 7c_2 e^{2x} + 3c_3 e^{3x}$
$y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3$ $\quad y_2 = 4c_1 e^{x} + 3c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x}$
$y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3$ $\quad y_3 = -8c_1 e^{x} - 8c_2 e^{2x} - 3c_3 e^{3x}$

n) $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3$ ... $y_1 = c_1 e^{x} + c_2 \sin x - c_3 \cos x$
$y_2' = -y_1$ $\quad y_2 = -c_1 e^{x} + c_2 \cos x + c_3 \sin x$
$y_3' = y_1 + y_2 - y_3$ $\quad y_3 = c_2 \sin x - c_3 \cos x$

3. Nájdite partikulárne riešenie lineárnych homogénnych diferenciálnych systémov, ktoré vyhovuje daným počiatočným podmienkam (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = -3y_1 - y_2$ ... $y_1 = (1-2x)e^{-2x}$
$y_2' = y_1 - y_2$ $\quad y_2 = (2x+1)e^{-2x}$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1$

b) $y_1' = 2y_1 + y_2$ ... $y_1 = 2e^{3x} - e^{x}$
$y_2' = y_1 + 2y_2$ $\quad y_2 = 2e^{3x} + e^{x}$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 3$

c) $y_1' = 2y_1 - 3y_2$ ... $y_1 = e^{2x}(\cos 3x + \sin 3x)$
$y_2' = 3y_1 + 2y_2$ $\quad y_2 = e^{2x}(\sin 3x - \cos 3x)$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -1$

d) $y_1' = y_2 + y_3$ ... $y_1 = 0$
$y_2' = y_1 + y_3$ $\quad y_2 = -e^{-x}$
$y_3' = y_1 + y_2$ $\quad y_2 = e^{-x}$
$y_1(0) = 0,\ y_2(0) = -1,\ y_3(0) = 1$

4. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych systémov (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = 2y_2 - y_1$ ... $y_1 = c_1 e^{x} + 2c_2 e^{2x} - e^{x}\ln(e^{2x}+1) + 2e^{2x}\operatorname{arctg} e^{x}$
$y_2' = 4y_2 - 3y_1 + \dfrac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$ $\quad y_2 = c_1 e^{x} + 3c_2 e^{2x} - e^{x}\ln(e^{2x}+1) + 3e^{2x}\operatorname{arctg} e^{x}$

b) $y_1' = y_1 - 4y_2$ ... $y_1 = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x}(2x+1) - 2e^{-x} - 4xe^{-x} - 4x^2 e^{-x}$
$y_2' = y_1 - 3y_2 + 2e^{-x}$ $\quad y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - 2x^2 e^{-x}$

c) $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \dfrac{2}{e^x - 1}$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 + 2c_2 e^{-x} + 2e^{-x} \ln(e^x - 1)$

$y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \dfrac{3}{e^x - 1}$ $\qquad y_2 = -2c_1 - 3c_2 e^{-x} - 3e^{-x} \ln(e^x - 1)$

d) $y_1' = 4y_1 - y_2 - 5x + 1$ ... $y_1 = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + x$

$y_2' = y_1 + 2y_2 + x - 1$ $\qquad y_2 = c_1 e^{3x} + c_2 e^{3x}(x - 1) - x$

e) $y_1' = 2y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1 e^x + c_2 e^{3x} + e^x(2\cos x - \sin x)$

$y_2' = -y_1 + 2y_2 - 5e^x \sin x$ $\qquad y_2 = c_1 e^x - c_2 e^{3x} + e^x(3\cos x + \sin x)$

f) $y_1' = y_2 + \sin x$ ... $y_1 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x \sin x$

$y_2' = -y_1 + \cos x$ $\qquad y_2 = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + x \cos x$

g) $y_1' = -y_1 + 5y_2$ ... $y_1 = c_1(\cos 2x + 2\sin 2x) + c_2(2\cos 2x - \sin 2x) + 10x$

$y_2' = -y_1 + y_2 + 8x$ $\qquad y_2 = c_1 \cos 2x - c_2 \sin 2x + 2x + 2$

h) $y_1' = 2y_1 + 3y_2 + 8e^x$ ... $y_1 = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} + e^x - 3x + \dfrac{12}{5}$

$y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 5x$ $\qquad y_2 = c_1 e^{-x} + c_2 e^{5x} - 3e^x + 2x - \dfrac{13}{5}$

i) $y_1' = y_2 + x^2$ ... $y_1 = c_1 e^x - c_2 e^{-x} + (x - 0,5)e^x - 2x$

$y_2' = y_1 + 2e^x$ $\qquad y_2 = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x e^x + 0,5e^x - x^2 - 1$

j) $y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x$ ... $y_1 = c_1(1 + 2x) - 2c_2 - 2\cos x - 3\sin x$

$y_2' = -y_1 - 2y_2 + \sin x$ $\qquad y_2 = -c_1 x + c_2 + 2\sin x$

k) $y_1' = -y_2 + \operatorname{tg} x$ na intervale $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ... $y_1 = -c_1 \sin x + c_2 \cos x + 2$

$y_2' = y_1 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $\qquad y_2 = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \operatorname{tg} x$

5. Nájdite partikulárne riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych systémov, ktoré vyhovuje daným počiatočným podmienkam (**bez použitia eliminačnej metódy !**).

a) $y_1' = y_1 + y_2 - \cos x$ ... $y_1 = (1 - x)\cos x - \sin x$

$y_2' = -2y_1 - y_2 + \sin x + \cos x$ $\qquad y_2 = (x - 2)\cos x + x \sin x$

$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -2$

b) $y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2e^{-x}$ ... $y_1 = e^x + 2e^{2x} - 2e^{-x}$

$y_2' = 3y_1 + 4y_2 + e^{-x}$ $\qquad y_2 = -e^{-x} - 3e^{2x} + e^{-x}$

$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = -3$

6. Nájdite všeobecné riešenie lineárneho nehomogénneho diferenciálneho systému na intervale I, ak poznáte fundamentálny systém riešení príslušného homogénneho diferenciálneho systému.

a) $y_1' = \dfrac{3}{x} y_1 - \dfrac{2}{x} y_2 + \dfrac{2e^x - 3}{x}$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 x + \dfrac{c_2}{2x} + 1$

$y_2' = \dfrac{4}{x} y_1 - \dfrac{3}{x} y_2 + \dfrac{3e^x - 4 + x e^x}{x}$ $\qquad y_2 = c_1 x + \dfrac{c_2}{x} + e^x$

FSR príslušného homogénneho DS: $Y_1 = (x, x)$, $Y_2 = \left(\dfrac{1}{2x}, \dfrac{1}{x}\right)$

b) $y_1' = \frac{1}{2x}y_1 - \frac{1}{2x^2}y_2 + x^2$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 - c_2x + \frac{5}{12}x^3 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}x\ln x$

$y_2' = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2x}y_2 - 5x$ $\quad y_2 = c_1x + c_2x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}x^2\ln x$

FSR príslušného homogénneho DS: $Y_1 = (1, x)$, $Y_2 = (-x, x^2)$

c) $y_1' = \frac{\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}y_1 + \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}y_2 + \mathrm{e}^x$ na $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1x + c_2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$

$y_2' = -\frac{\mathrm{e}^{-x}(x+1)}{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}y_1 + \frac{\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^{-x}}{x(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})}y_2 + \mathrm{e}^{-x}$ $\quad y_2 = -c_1x + c_2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$

FSR príslušného homogénneho DS: $Y_1 = (x, -x)$, $Y_2 = (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{-x})$

7. **Eliminačnou metódou** nájdite všeobecné riešenie lineárnych diferenciálnych systémov.

a) $y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x$ ... $y_1 = -2c_1 + c_2(-2x-1) - 2\cos x - 3\sin x$

$y_2' = -y_1 - 2y_2 + \sin x$ $\quad y_2 = c_1 + c_2x + 2\sin x$

b) $y_1' = y_1 - 2y_2$ ... $y_1 = -2c_1\mathrm{e}^{2x} - c_2\mathrm{e}^{3x}$

$y_2' = y_1 + 4y_2$ $\quad y_2 = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2\mathrm{e}^{3x}$

c) $y_1' = -7y_1 + y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^{-6x}\cos x + c_2\mathrm{e}^{-6x}\sin x$

$y_2' = -2y_1 - 5y_2$ $\quad y_2 = (c_1 + c_2)\mathrm{e}^{-6x}\cos x + (c_2 - c_1)\mathrm{e}^{-6x}\sin x$

d) $y_1' = 3y_1 - 2y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^x + c_2x\mathrm{e}^x$

$y_2' = 2y_1 - y_2$ $\quad y_2 = c_1\mathrm{e}^x + c_2(x - 0,5)\mathrm{e}^x$

e) $y_1' = 2y_1 + y_2 + 2\mathrm{e}^x$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{3x} + x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{4x}$

$y_2' = y_1 + 2y_2 - 3\mathrm{e}^{4x}$ $\quad y_2 = -c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x(x+1) - 2\mathrm{e}^{4x}$

f) $y_1' = 2y_1 - 3y_2 + x$ ... $y_1 = 3c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} - 3x^2 - 2x - 7$

$y_2' = y_1 - 2y_2 - x^2$ $\quad y_2 = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} - 2x^2 + x - 4$

g) $y_1' = 4y_1 - y_2$ ... $y_1 = \mathrm{e}^{2x}(c_1 + c_2x + c_3x^2)$

$y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3$ $\quad y_2 = \mathrm{e}^{2x}(2c_1 + c_2(2x-1) + c_3(2x^2 - 2x))$

$y_3' = y_1 + y_3$ $\quad y_3 = \mathrm{e}^{2x}(c_1 + c_2(x-1) + c_3(x^2 - 2x + 2))$

h) $y_1' = \frac{3}{x}y_1 - \frac{2}{x}y_2$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1x + c_2\frac{1}{2x}$

$y_2' = \frac{4}{x}y_1 - \frac{3}{x}y_2$ $\quad y_2 = c_1x + c_2\frac{1}{x}$

i) $y_1' = y_2$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x$

$y_2' = -\frac{1}{x^2}y_1 - \frac{1}{x}y_2$ $\quad y_2 = -\frac{c_1\sin\ln x}{x} + \frac{c_2\cos\ln x}{x}$

j) $y_1' = y_1 - y_2$ ... $y_1 = c_1\mathrm{e}^x + c_2\cos x + c_3\sin x$

$y_2' = y_1 - y_3$ $\quad y_2 = c_2(\cos x + \sin x) + c_3(\sin x - \cos x)$

$y_3' = y_1$ $\quad y_3 = c_1\mathrm{e}^x + c_2\sin x - c_3\cos x$

8. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych systémov na intervale I (**Návod:** všeobecné riešenie príslušného homogénneho diferenciálneho systému nájdite **elimi-**

načnou metódou a potom použite **metódu variácie konštánt** na nájdenie partikulárneho riešenia nehomogénneho diferenciálneho systému).

a) $y_1' = \dfrac{x}{x+1} y_1 - \dfrac{1}{x+1} y_2 + \dfrac{1}{x}$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 + c_2 \dfrac{1}{1+x} + \ln x$

$y_2' = (x+1) y_1 - y_2 + 1$ $\qquad$ $y_2 = c_1 x + c_2 + x \ln x$

b) $y_1' = -y_2 + 1$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y_1 = c_1 x^2 + c_2 \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}$

$y_2' = -\dfrac{2}{x^2} y_1 + \dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $y_2 = -2 c_1 x + c_2 \dfrac{1}{x^2} + 1$