Úloha

Nech je daná rovnica (zrejme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$)

$$(x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3.$$

Použitím transformácie

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

máme pre $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} = r'\cos\theta - r\sin\theta \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta},$$

kde $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$. *Z toho po úprave zasa*

$$y'' = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}y'}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}} = \frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3}.$$

Nakoniec bude mať rovnica tvar

$$r^4\frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^3} = \left(r\cos\theta + r\sin\theta\,\frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta}\right)^3$$

a teda

$$r(r^2 + 2(r')^2 - rr'') = (r')^3.$$

V tejto rovnici nevystupuje explicitne θ. *Teda ďalej použijeme substitúciu* $r' = z$. *Zrejme*

$$r'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = z\dot{z}.$$

Máme nakoniec rovnicu prvého rádu

$$r(r^2 + 2z^2 - rz\dot{z}) = z^3,$$

ktorá je homogénna a dá sa previesť na separovateľnú.