Dynamické systémy | PF UPJŠ ÚMAT/DYS/19 | Semester 5/1

Prednášajúci : J. Kiseľák | | Rok: 2022–2023

Sada úloh na precvičenie I

Séria úloh 1: Zistite, ktoré zobrazenia sú kontrakciami na X, prípadne kontrahujúce.

(a) $T:\ x \mapsto \sqrt{x},\ X = \mathbb{R}^+$

(b) $T:\ x \mapsto x^2 - x + 1,\ X = [0,1]$

(c) $T:\ x \mapsto x^2,\ X = [0, \frac{1}{3}]$

(d) $T:\ x \mapsto x + \dfrac{e^x}{1+e^x},\ X = \mathbb{R}$

(e) $T:\ x \mapsto \cos(\cos x),\ X = \mathbb{R}$

(f) $T:\ x \mapsto e^{-x} + x,\ X = \mathbb{R}^+$

(g) $T(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ X = [0, \pi]$

(h) $T:\ x \mapsto \sin(\sin x),\ X = \mathbb{R}$

(i) $T:\ x \mapsto |x| + \dfrac{1}{1+|x|},\ X = \mathbb{R}$

(j) $T:\ x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N},\ X = (0,1)$

(k) $T\ :\ (x_1, x_2) \mapsto (ax_1 - cx_2, cx_1 + ax_2),\ (a-1)^2 + c^2 \neq 0,\ X = \mathbb{R}^2$

(l) $T(\mathbf{x}) = (2 + \alpha \sin x_1, \alpha \cos x_2),\ |\alpha| < 1,\ X = \mathbb{R}^2$

(m) $T(0) = 2^{-1},\ T(2^{-n}) = 2^{-n-1},\ X = \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$

Séria úloh 2: Určte podmienky matice A, tak aby $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ bolo kontraktívne zobrazenie, ak

(a) $d_\infty(x, y) = \max_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|$

(b) $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$

(c) $d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

je príslušná metrika v $\mathbb{R}^n$.

Séria úloh 3: Nech $a > 0$. Určte najmenšie $b > 0$ tak, aby $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ bola kontrakcia na (b, ∞).

Séria úloh 4: Zistite, či rovnice majú jediné riešenie.

(a) $5x^3 - 20x = -3 \quad \text{na } [0,1]$

(b) $x = \dfrac{1}{9}\sin(3x) + \sqrt{x} \quad \text{pre } x \geqslant \dfrac{8}{9}$

(c) $x^2 + 4xy = 1,\ x^2 + 3y^2 = 9 \quad \text{na } [0,1] \times [1,2]$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + f(x)^2\right) + \sin(\ln(x+2)) \quad \text{na } C([-1,1])$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sin f(x) + \sin\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) + 1 \quad \text{na } C\left(\left[0, \dfrac{1}{2}\right]\right)$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}f(3x) + \dfrac{1}{2}, & 0 \le x \le 1/3 \\ g(x), & 1/3 < t \le 2/3 \\ \dfrac{1}{2}f(3x-2) - \dfrac{1}{2}, & 2/3 < x \le 1 \end{cases}$ na $C([0,1])$, pričom graf g je úsečka spájajúca body $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}f(1) + \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}f(0) - \dfrac{1}{2}\right)$

(g) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-sx}\cos(\alpha f(s))\,\mathrm{d}s,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le \alpha \le 1 \quad \text{na } C([0,1])$

(h) $f(u) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(v)\,\mathrm{d}v}{(u-v)^2 + 1},\ 0 < a < \infty \quad \text{na } C([-a,a])$

(i) $f(x) = \dfrac{3}{(b^3 - a^3)}\displaystyle\int_a^x t^3 f(t)\,\mathrm{d}t,\ 0 < a < b \quad \text{na } C([a,b])$

(j) $u(x) = f(x) + \lambda \displaystyle\int_X K(x,y)u(y)dy$ na $\mathcal{L}^2(X)$, X je ohraničená, otvorená v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{L}^2(X),\ K \in \mathcal{L}^2(X \times X)$

Séria úloh 5: Nech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \neq 0 \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, ukážte, že úloha $\dot{x} = f(x),\ \ x(0) = 0$ nemá riešenie na žiadnom intervale $[-\delta, \delta],\ \delta > 0$.

Séria úloh 6: Ukážte, že úloha $\dot{y} = \dfrac{2y-2}{t}$, $x(0) = C$ má nekonečne veľa riešení ak $C = 1$ a nemá riešenie ak $C \neq 1$.

Séria úloh 7: Stanovte oblasti, na ktorých je zaručená existencia a jednoznačnosť riešení DR

(a) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

(b) $y' = \tan y + 1$

(c) $y' = \sqrt[3]{y} + x$

(d) $y' = \sin x + \cos y$

(e) $y' = 3y^{\frac{2}{3}} + x$

(f) $y' = \dfrac{y-2}{x+y}$

Séria úloh 8: Ktoré z nasledujúcich Cauchyho úloh majú jediné riešenie (lokálne)?

(a) $\dot{y} = (1+y)^{\frac{3}{2}}$, $y(0) \geq 0$

(b) $\dot{y} = \begin{cases} y^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{y}, & \text{ak } y \neq 0 \\ 0, & \text{inak} \end{cases}$, $y(0) \geq 0$

(c) $\dot{y} = \dfrac{1}{1+|y|}$, $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

(d) $\dot{x} = y + \sqrt{t}$, $x(0) \geq 0$
$\dot{y} = t(1-|x|)y - x$, $y(0) \geq 0$

(e) $\dot{y} = \sqrt{y} + y^{\frac{3}{2}}$, $y(0) \geq 0$

(f) $\ddot{y} = \sqrt{y-1}(1+y)^2$, $y(0) \geq 1$

(g) $\dot{y} = \begin{cases} e^{x-y}, & \text{ak } y > 0 \\ e^{x}, & \text{inak} \end{cases}$, $y(0) = 0$

(h) $\dot{x} = \sqrt{x-y}$, $x(0) \geq 0$
$\dot{y} = t^2 + tx$, $y(0) \geq 0$

Séria úloh 9: Stanovte prvé 3 členy Picardovej aproximácie riešenia DR

(a) $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$

(b) $y' = y^2 - 3x^2 - 1$, $y(0) = 1$

(c) $y' = x^3 - y^3$, $y(1) = 1$

(d) $y' = x^2 + xy^2$, $y(0) = y(t_0) = 0$

(e) $y_1' = y_2 y_3, y_2' = -y_1 y_3, y_3' = y_1 y_2$,
$\mathbf{y}(0) = (0, 1, 0)$

Séria úloh 10: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = |x|$

(b) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{x + x^2}}$

(c) $y' = \dfrac{x}{1 + x^2 + \sqrt{1 + x^2}}$

(d) $y' = \dfrac{1}{\sin x}$

(e) $y' = \dfrac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}$

(f) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x + \cos x}$

Séria úloh 11:

(a) Čiastočné náklady na výrobu x-tej škatule CD nosičov sú dané vzťahom $10 + x + \dfrac{1}{x^2}$. Celkové náklady na výrobu 100 škatúľ sú 10000 eur. Nájdite funkciu celkových nákladov $C(x)$.

(b) Aká je trajektória objektu, ktorý štartuje napravo od iného objektu, pohybujúceho sa smerom hore a tiahnúceho prvý objekt na nenatiahnuteľnej strune za sebou ?

Séria úloh 12: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = 2^{-y}$

(b) $y' = b\,y^n, \quad b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

(c) $y' = 1 + \dfrac{1}{y^2}$

(d) $y' = 2\sqrt{|y|}$

(e) $y^3 - y' + 1 = 0$

(f) $y' = y \ln y$

(g) $y(x) = \displaystyle\int_1^x \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{d}t + 1$

(h) $\sqrt{y(x)} = \displaystyle\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$

(i) $y'\,(2y + \cos y) = 6x^2$

(j) $(x - xy)\,y' + y + xy = 0$

(k) $x^2\sqrt{1+y^2} + y^2\sqrt{1+x^2}\,y' = 0$

(l) $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

(m) $1 - y^2 - 2xy\,y' = 0$

(n) $\mathrm{e}^x + 2x + y' \sin y = 0$

(o) $\mathrm{e}^{x+y}(1 - \mathrm{e}^{-y}) + (1 + \mathrm{e}^x)^2\,y' = 0$

(p) $\sqrt{y(x)} - x = \displaystyle\int_0^x y(t)\,\mathrm{d}t$

Séria úloh 13: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = x + y + 1$

(b) $y' = (4x + y - 1)^2$

(c) $y' = \sqrt{y - x}$

(d) $y' = \dfrac{1}{x + y - 1}$

(e) $y' = \mathrm{e}^{x+y} - 1$

(f) $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x$

Séria úloh 14:

(a) Je známe, že rýchlosť rozpadu rádia je úmerná jeho množstvu. Nájdite zákon rozpadu rádia, ak viete, že o 1600 rokov zostane polovica pôvodného množstva. Koľko percent sa rozpadne za 100 rokov?

(b) Nájdite krivku, ktorá prechádza cez bod $[2, 0]$ a má tú vlastnosť, že dĺžka úseku jej dotyčnice medzi dotykovým bodom a osou o_y je 2!

(c) Nájdite krivky, pre ktoré tangens uhla zovretého dotyčnicou a kladným smerom osi o_x je priamo úmerný y-ovej súradnici dotykového bodu.

(d) Nájdite krivky, pre ktoré súčet normály a subnormály je veličinou stálou, rovnajúcou sa a.

(e) Nájdite krivky, pre ktoré úsek vyťatý súradnicovými osami na dotyčnici je dotykovým bodom rozpolený. Určte krivku prechádzajúcu bodom $[2, 3]$.

(f) Miestnosť pojme $V = 10800\,m^3$ vzduchu. Po ukončení schôdze obsahoval tento vzduch $0,12\%$ CO_2. Koľko kubických metrov vzduchu obsahujúceho $0,04\%$ CO_2 treba vháňať za minútu do miestnosti, aby po uplynutí 10 minút obsahoval vzduch v miestnosti len $0,06\%$ CO_2 ?

(g) Nájdite krivku ležiacu v I. a II. kvadrante, pre ktoré obsah plochy ohraničenej ňou, priamkami $X = a, X = x$ a osou o_X je pomerný dĺžke krivky vymedzenej danými priamkami.

(h) Nech $y = f(x)$ definuje krivku prechádzajúcu počiatkom, ktorá má vlastnosť, že objem telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej touto krivkou, priamkami $X = 0, X = x$ okolo osi o_X je rovnaký ako objem telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej touto krivkou, priamkami $Y = 0, Y = y$ okolo osi o_Y.

Séria úloh 15: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $x(x+2y) + (x^2 - y^2)\, y' = 0$

(b) $x\, y' = 3y - 2x - 2(xy - x^2)^{\frac{1}{2}}$

(c) $(py - qx) - (px + qy)\, y' = 0$

(d) $y' = \dfrac{ax + by}{x}, \quad b \neq 0$

(e) $y' = \dfrac{y}{x + y}$

(f) $y' = \dfrac{y^2 - 4xy}{2x^2 - 2xy + 2y^2}$

(g) $x\, y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

(h) $y' = \mathrm{e}^{-\frac{y}{x}} + \dfrac{y}{x}$

(i) $2x - y + 1 + (2y - x - 1)\, y' = 0$

(j) $x - y + (2y - x + 1)\, y' = 0$

(k) $x + y + 1 + (2x + 2y - 1)\, y' = 0$

(l) $(y^4 - 3x^2)\, y' + xy = 0$

(m) $2(x^2 - xy^2)\, y' + y^3 = 0$

(n) $(x^2y^2 - 1)\, y' + 2xy^3 = 0$

(o) $\left(1 + \sqrt{\dfrac{y^2}{x} - 1}\right) - 2y\, y' = 0$

(p) $y' \, \dfrac{x}{y} + \ln y = \ln x$

(q) $y \,\mathrm{d}x + x \ln \dfrac{y}{x} \,\mathrm{d}y = 2x \,\mathrm{d}y$

Séria úloh 16:

(a) Nájdite krivku, pre ktorú trojuholník vytvorený osou o_y, dotyčnicou a sprievodičom dotykového bodu je rovnoramenný!

(b) Nájdite krivku, pre ktorú pomer úseku vyťatého dotyčnicou na osi o_y a úseku vyťatého normálou na osi o_x má konštantnú hodnotu k ! Krivku vyjadrite v polárnych súradniciach !

(c) Pilot riadi lietadlo tak, aby nos lietadla stále ukazoval smerom k mestu T na západ od východiskového bodu vzdialeného a km od mesta T. Rýchlosť lietadla je v km h^{-1} a vietor fúka z juhu rýchlosťou w km h^{-1}. Nájdite funkciu popisujúcu trajektóriu pohybu lietadla a nakreslite ju v závislosti od pomeru $\dfrac{w}{v}$.

Séria úloh 17: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = \dfrac{2x}{1+x^2}\, y$

(b) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$

(c) $x\, y' + ay = \mathrm{e}^{mx}$

(d) $x\, y' = ax + by$

(e) $(1+x^2)\, y' - 2xy = (1+x^2)^2$

(f) $(x - 2xy - y^2)\, y' + y^2 = 0$

(g) $y' + \tan y = \dfrac{x}{\cos y}$

(h) $\displaystyle\int_a^x t y(t)\,\mathrm{d}t = x^2 + y(x)$

Séria úloh 18: Určte všetky riešenia rovníc odhadnúc najprv jedno partikulárne riešenie

(a) $y' + y = x + 1$

(b) $y' + y = 2\mathrm{e}^x$

(c) $y' + y = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}$

(d) $y' - \dfrac{1+2x}{x+x^2}\, y = \dfrac{1+2x}{x+x^2}$

Séria úloh 19:

(a) Koľko eur musíte (pri spojitom zloženom úročení) vložiť do banky, ak uvažujeme 5% úrok a každoročný výber 3600 eur po dobu 20 rokov a chceme aby celá istina bola vyčerpaná, pričom

i) výbery pri počítaní prebiehajú spojite;

ii) výbery započítavame v pomere 300 eur mesačne, prvý mesiac po vklade.

(b) Nájdite krivku, ak jej dotyčnica vytína na osi O_y úsek rovnajúci sa $\frac{1}{m}$-tine súčtu súradníc dotykového bodu !

(c) Nájdite krivku AM, aby sa $x-$ová súradnica ťažiska plochy $OAMP$ rovnala $3/4$ x-ovej súradnice bodu M !

(d) Oceľová gulička, zahriata na 100 $°C$, je v čase $t = 0$ umiestnená do prostredia s teplotou 20 $°C$. Predpokladajme, že gulička je taká, že v každom okamihu je teplota v celej guličke rovnaká. Ako závisí teplota T na čase t ?[a]

(e) Je treba navrhnúť betonový stĺp, ktorý ma podoprieť bremeno vážiace m kg vo výške h metrov, pričom kubický meter betónu má hmotnosť k kg. Predpokladajme, že bremeno bude na vrchole stĺpa rozložené rovnomerne. Bezpečnostné predpisy nedovoľujú, aby tlak prevyšoval P $\mathrm{N\,m^{-2}}$. V dolnej časti stĺpa bude k hmotnosti bremena postupne pribúdať aj hmotnosť hornej časti stĺpa. Ak chceme navrhnúť čo najviac úsporný stĺp, musí plocha $A(z)$ prierezu stĺpa vo výške z metrov nad zemou závisieť od z. Nájdite a vyriešte DR rovnicu, ktorú plocha $A(z)$ prierezu stĺpa spĺňuje.[b]

(f) Nájdite funkciu $y(x)$ z rovnice $x\int_0^x y\,\mathrm{d}x = (x+1)\int_0^x xy\,\mathrm{d}x$.

[a] Hint: časová zmena teploty guličky je priamo úmerná rozdielu teplotu guličky a teploty okolného prostredia.

[b] Ukážte, že $P\,A(z) = mg + kg\displaystyle\int_z^h A(u)\,\mathrm{d}u$.

Séria úloh 20: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' - 2xy = 2x^3y^2$

(b) $y' + xy = \dfrac{x}{y^3}$

(c) $xy' + y = y^2 \ln x$

(d) $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$

(e) $y' + \dfrac{x}{1-x^2}\, y = x\sqrt{y}$

(f) $3y^2y' + y^3 + x = 0$

(g) $xy' + y = xy^2$

(h) $\left(1 - x^3\right) y' - 2(1+x)y = y^{\frac{5}{2}}$

(i) $(xy + x^2y^3)y' = 1$

(j) $y' = \dfrac{2x}{x^2 \cos(y) + a \sin(2y)}$

Séria úloh 21:

(a) Nájdite krivky, pre ktoré v každom bode subnormála je aritmetickým priemerom štvorcov súradníc tohto bodu !

(b) Nájdite krivky, pre ktoré úsek na osi O_x, vyťatý normálou, rovná sa pomeru štvorca y-ovej súradnice dotykového bodu a x-ovej súradnice dotykového bodu!

(c) Nájdite krivky, pre ktoré úsek na osi O_y, vyťatý dotyčnicou, rovná sa štvorcu y-ovej súradnice dotykového bodu !

Séria úloh 22: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y = xy' + (y')^2$

(b) $2yy' = x[(y')^2 + 4]$

(c) $y = x(1 + y') + (y')^2$

(d) $2y(y' + 2) = x(y')^2$

(e) $y = xy' - a\sqrt{1 + (y')^2}$

(f) $y = xy' + \sqrt{1 - (y')^2}$

(g) $y = xy' + y' + \mathrm{e}^{y'}$

(h) $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$

Séria úloh 23:

(a) Nájdite krivku, ktorej úsek dotyčnice medzi súradnicovými osami má konštantnú dĺžku $a > 0$!

(b) Nájdite krivky, pre ktoré súčin vzdialeností dotyčnice od dvoch daných bodov je konštantný!

(c) Nájdite krivku, ktorej dotyčnica spolu so súradnicovými osami vytvára trojuholník s plošným obsahom $2a^2$.

Séria úloh 24: Nájdite všetky riešenia rovníc

1. $(2x - y + 1)\,\mathrm{d}x + (2y - x - 1)\,\mathrm{d}y = 0$
2. $2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}y = 0$
3. $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)\,\mathrm{d}x - \sqrt{x^2 - y}\,\mathrm{d}y = 0$
4. $\dfrac{y}{x}\,\mathrm{d}x + (y^3 + \ln x)\,\mathrm{d}y = 0$
5. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0$
6. $\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x - (2y + x\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}y = 0$
7. $(2 - 9xy^2)x\,\mathrm{d}x + (4y^2 - 6x^3)y\,\mathrm{d}y = 0$
8. $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}\,\mathrm{d}y = 0$
9. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right)\,\mathrm{d}x - \dfrac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$
10. $(1 + \mathrm{e}^z)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^z(1 - z)\,\mathrm{d}y = 0,\ z = \dfrac{x}{y}$

Séria úloh 25: Nájdite všetky riešenia rovníc

1. $(x^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$
2. $(xy^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$
3. $\left(\dfrac{x}{y} + 1\right)\,\mathrm{d}x + \left(\dfrac{x}{y} - 1\right)\,\mathrm{d}y = 0$
4. $(x^2 + y^2)(x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x) = (a + x)x^9\,\mathrm{d}x$
5. $(y\sin y - x\cos y)\,\mathrm{d}y = (x\sin y + y\cos y)\,\mathrm{d}x$
6. $(2xy^2 - y)\,\mathrm{d}x + (x + y + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$

Séria úloh 26: Nájdite všetky riešenia rovníc

1. $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3)\,\mathrm{d}x + (-x^2 - x^3 + xy^2 + 2xy + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$

2. $(xy - y)\,\mathrm{d}x + (xy - x)\,\mathrm{d}y = 0$
3. $xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2y - x)\,\mathrm{d}y = 0$
4. $(x^2 + y^2 + 1)\,\mathrm{d}x - 2xy\,\mathrm{d}y = 0$
5. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$
6. $(2x^3y^2 - y)\,\mathrm{d}x + (2x^2y^3 - x)\,\mathrm{d}y = 0$
7. $2y\,\mathrm{d}x + \dfrac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{(x+y)^2} + (3y + x)\,\mathrm{d}y = 0$

Séria úloh 27: Ukážte, že homogénna diferenciálna rovnica

$$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = 0,$$

kde $Mx + Ny \neq 0$ **a** $N_x \neq M_y$ **má IF v tvare** $\mu = \dfrac{1}{Mx + Ny}$**.**

Séria úloh 28: Ukážte, že diferenciálna rovnica

$$m(xy)y\,\mathrm{d}x + n(xy)x\,\mathrm{d}y = 0,$$

kde $m(xy)x - n(xy)y \neq 0$ **a** $(n(xy)x)_x \neq (m(xy)y)_y$ **má IF v tvare**

$$\mu = \frac{1}{m(xy)x - n(xy)y}.$$

Na základe toho vyriešte rovnicu

$$(y - xy^2)\,\mathrm{d}x - (x + x^2y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Séria úloh 29:

(a) Pri rovinnom prúdení je tvar prúdnic určený DR

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x(x,y)} - \frac{\mathrm{d}y}{v_y(x,y)} = 0.$$

Určte ich tvar, ak sú zložky rychlostí $v_x = 2ax, \quad v_y = -2ay, \; a \in \mathbb{R}$.

(b) Na osi O_x sú v n bodoch x_i bodové náboje e_i. Elektrické siločiary v rovine R_{xy} určené DR

$$E_y(x,y)\,\mathrm{d}x - E_x(x,y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

pričom sú zložky intenzity elektrického poľa dané Coulombovým zákonom[a]. Integrujte danú rovnicu.

[a] $E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{x-x_i}{((x-x_i)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon}\sum_{i=1}^{n} e_i \frac{y}{((x-x_i)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$