DIFERENCIÁLNE ROVNICE | PF UPJŠ ÚMV/DFR/10 | Semester 5/1

Prednášajúci : J. Kiseľák | Rok: 2016–2017

Sada úloh na precvičenie II

## Séria úloh 1: Nájdite ortogonálne trajektórie systému kriviek

(a) $x^2 + y^2 - 2\alpha\, x = 0$

(b) $y = \alpha\, \mathrm{e}^{-x}$

(c) $y^2 - 4(x - \alpha) = 0$

(d) $y = c\, x^5$

(e) $(x^2 - y^2)^2 - a^2 xy = 0$[a]

(f) $x^3 + (x - 2a)y^2 = 0$

(g) $2x^2 + y^2 = \alpha^2$

(h) $x^2 + y^2 = \alpha^2$

(i) $(x^2 + y^2)^2 - 2\alpha^2(x^2 - y^2) = 0$

(j) $\sin y = k\, \mathrm{e}^{x^2}$

[a] Hint: polárne súradnice

## Séria úloh 2:

Nájdite krivky pretínajúce polpriamky vychádzajúce z počiatku pod uhlom $\dfrac{\pi}{4}$.

Nájdite krivky pretínajúce paraboly $y = a\, x^2$ pod uhlom $\dfrac{\pi}{4}$.

Nájdite krivky pretínajúce krivky $y^2 + 2xy - x^2 = k$ pod uhlom $\dfrac{\pi}{4}$.

Načrtnite obrázky.

## Séria úloh 3: Riešte DR

(a) $y^{(4)} = y''$

(b) $y'' + \dfrac{2(y')^2}{1-y} = 0$

(c) $x^2 y'' = (y'')^2$

(d) $x^2 y'' = y'$

(e) $xy'' + \dfrac{(y'')^2}{4} - y' = 0$

(f) $1 + (y')^2 = 2yy''$

(g) $y'' = 3y^2$

(h) $y'' = \dfrac{y'}{x} + x^2$

(i) $(y'')^2 - y'y''' = \left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$

(j) $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = \sqrt{2}$

## Séria úloh 4: Riešte systémy DR

(a) $y' = 1 - \dfrac{1}{z}, \quad z' = \dfrac{1}{y-x}$

(b) $y' = 2xy^2, \quad z' = \dfrac{z-x}{x}$

(c) $y' = \mathrm{e}^{x-y}, \quad z' = \dfrac{2z}{2x - z^2}$

(d) $y' = \dfrac{2xy}{1+x^2}, \quad z' = x + y - \dfrac{z}{x}$

(e) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}, \quad z' = \dfrac{y+z}{z^2 - x}$

(f) $x' = \sqrt{x}, \quad y' = \sqrt{y}, \quad z' = \dfrac{1}{2}$

**Séria úloh 5: Zistite, ktoré zobrazenia sú kontrakciami na $X$, prípadne kontrahujúce.**

(a) $T: x \mapsto \sqrt{x},\ X = \mathbb{R}^+$

(b) $T: x \mapsto x^2 - x + 1,\ X = [0,1]$

(c) $T: x \mapsto x^2,\ X = [0, \frac{1}{3}]$

(d) $T: x \mapsto x + \dfrac{e^x}{1+e^x},\ X = \mathbb{R}$

(e) $T: x \mapsto \cos(\cos x),\ X = \mathbb{R}$

(f) $T: x \mapsto e^{-x} + x,\ X = \mathbb{R}^+$

(g) $T(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ X = [0,\pi]$

(h) $T: x \mapsto \sin(\sin x),\ X = \mathbb{R}$

(i) $T: x \mapsto |x| + \dfrac{1}{1+|x|},\ X = \mathbb{R}$

(j) $T: x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N},\ X = (0,1)$

(k) $T : (x_1, x_2) \mapsto (ax_1 - cx_2, cx_1 + ax_2),\ (a-1)^2 + c^2 \neq 0,\ X = \mathbb{R}^2$

(l) $T(\mathbf{x}) = (2 + \alpha \sin x_1, \alpha \cos x_2),\ |\alpha| < 1,\ X = \mathbb{R}^2$

(m) $T(0) = 2^{-1},\ T(2^{-n}) = 2^{-n-1},\ X = \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$

**Séria úloh 6: Určte podmienky matice A, tak aby $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{b}$ bolo kontraktívne zobrazenie, ak**

(a) $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$

(b) $d_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$

(c) $d_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

je príslušná metrika v $\mathbb{R}^n$.

**Séria úloh 7:** Nech $a > 0$. Určte najmenšie $b > 0$ tak, aby $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ bola kontrakcia na $(b, \infty)$.

**Séria úloh 8: Zistite, či rovnice majú jediné riešenie.**

(a) $5x^3 - 20x = -3$ na $[0,1]$

(b) $x = \dfrac{1}{9}\sin(3x) + \sqrt{x}$ pre $x \geqslant \dfrac{8}{9}$

(c) $x^2 + 4xy = 1,\ x^2 + 3y^2 = 9$ na $[0,1]\times[1,2]$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + f(x)^2\right) + \sin(\ln(x+2))$ na $C([-1,1])$

(e) $f(x) = \dfrac{x}{2}\sin f(x) + \sin\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right) + 1$ na $C\left(\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\right)$

(f) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}f(3x) + \dfrac{1}{2}, & 0 \le x \le 1/3 \\ g(x), & 1/3 < t \le 2/3 \\ \dfrac{1}{2}f(3x-2) - \dfrac{1}{2}, & 2/3 < x \le 1 \end{cases}$ na $C([0,1])$, pričom graf $g$ je úsečka spájajúca body $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}f(1) + \dfrac{1}{2}\right)$, $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{2}f(0) - \dfrac{1}{2}\right)$

(g) $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-sx}\cos(\alpha f(s))\,\mathrm{d}s,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le \alpha \le 1$ na $C([0,1])$

(h) $f(u) = 1 + \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a} \frac{f(v)\,\mathrm{d}v}{(u-v)^2+1},\ 0 < a < \infty$ na $C([-a,a])$

(i) $f(x) = \dfrac{3}{(b^3 - a^3)}\displaystyle\int_a^x t^3 f(t)\,\mathrm{d}t,\ 0 < a < b$ na $C([a,b])$

(j) $u(x) = f(x) + \lambda\displaystyle\int_X K(x,y)u(y)dy$ na $\mathcal{L}^2(X)$, $X$ je ohraničená, otvorená v $\mathbb{R}^n$, $f \in \mathcal{L}^2(X),\ K \in \mathcal{L}^2(X\times X)$

**Séria úloh 9:** Nech $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \neq 0 \\ 1, & \text{ak } x = 0 \end{cases}$, ukážte, že úloha $\dot{x} = f(x),\ \ x(0) = 0$ nemá riešenie na žiadnom intervale $[-\delta,\delta],\ \delta > 0$.

**Séria úloh 10:** Ukážte, že úloha $\dot{y} = \dfrac{2y-2}{t}$, $x(0) = C$ má nekonečne veľa riešení ak $C = 1$ a nemá riešenie ak $C \neq 1$.

**Séria úloh 11: Stanovte oblasti, na ktorých je zaručená existencia a jednoznačnosť riešení DR**

(a) $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

(b) $y' = \tan y + 1$

(c) $y' = \sqrt[3]{y} + x$

(d) $y' = \sin x + \cos y$

(e) $y' = 3y^{\frac{2}{3}} + x$

(f) $y' = \dfrac{y-2}{x+y}$

**Séria úloh 12: Ktoré z nasledujúcich Cauchyho úloh majú jediné riešenie (lokálne)?**

(a) $\dot{y} = (1+y)^{\frac{3}{2}}, \quad y(0) \geq 0$

(b) $\dot{y} = \begin{cases} y^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{y}, & \text{ak } \ y \neq 0 \\ 0, & \text{inak} \end{cases}, \ y(0) \geq 0$

(c) $\dot{y} = \dfrac{1}{1+|y|}, \quad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$

(d) $\dot{x} = y + \sqrt{t}, \quad x(0) \geq 0$
$\dot{y} = t(1-|x|)y - x, \quad y(0) \geq 0$

(e) $\dot{y} = \sqrt{y} + y^{\frac{3}{2}}, \quad y(0) \geq 0$

(f) $\ddot{y} = \sqrt{y-1}(1+y)^2, \quad y(0) \geq 1$

(g) $\dot{y} = \begin{cases} \mathrm{e}^{x-y}, & \text{ak } \ y > 0 \\ \mathrm{e}^{x}, & \text{inak} \end{cases}, \ y(0) = 0$

(h) $\dot{x} = \sqrt{x-y}, \quad x(0) \geq 0$
$\dot{y} = t^2 + tx, \quad y(0) \geq 0$

**Séria úloh 13: Zistite, či riešenia DR sú predĺžiteľné na celú reálnu os (sú globálne).**

(a) $y' = t + \cos y$

(b) $y' = |y|$

(c) $y' = \sin(t+y)$

(d) $x'' + x' + x + x^3 = 0$

(e) $y' = \sqrt{1+y^4} - |y|^\alpha$

(f) $x' = \mathrm{e}^{-y^2} \sin(x^n + y^n),$
$y' = x^n \sin(x^n + y^n)$

**Séria úloh 14: Ktoré z nasledujúcich Cauchyho úloh majú globálne riešenie (predĺžiteľné riešenie na $[t_0, \infty)$) ?**

(a) $\dot{y} = -y^4, \quad y(1) = 1$

(b) $\dot{x} = -x, \quad x(0) \in \mathbb{R}$
$\dot{y} = 2y + x^2, \quad y(0) \in \mathbb{R}$

(c) $\dot{x} = -y + x(1 - x^2 + y^2), \quad x(0) \in \mathbb{R}$
$\dot{y} = x + y(1 - x^2 + y^2), \quad y(0) \in \mathbb{R}$

(d) $\dot{y} = \arctan y + t, \quad y(0) \geq 0$

(e) $\dot{x} =, \quad x(0) = 1$

(f) $\dot{y} = ay^3 + bz, \quad y(0) \in \mathbb{R}$
$\dot{z} = cz^5 - by, \quad z(0) \in \mathbb{R}$
$a < 0, \; c < 0, \; b \in \mathbb{R}$

**Séria úloh 15: Stanovte prvé 3 členy Picardovej aproximácie riešenia DR**

(a) $y' = x - y^2, \quad y(0) = 0$

(b) $y' = y^2 - 3x^2 - 1, \quad y(0) = 1$

(c) $y' = x^3 - y^3, \quad y(1) = 1$

(d) $y' = x^2 + xy^2, \quad y(0) = y(t_0) = 0$

(e) $y_1' = y_2 y_3, y_2' = -y_1 y_3, y_3' = y_1 y_2,$
$\mathbf{y}(0) = (0, 1, 0)$