Dynamické systémy | PF UPJŠ ÚMAT/DYS/19 | Semester 5/1
Prednášajúci : J. Kiseľák | | Rok: 2022–2023

Sada úloh na precvičenie IV

Séria úloh 1: Uvažujme úlohu (vedenie tepla na tyči s izolovanými koncami) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t > 0, x \in (0,\pi)$ **s okrajovou podmienkou** $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(t,\pi) = 0$ **a počiatočnou podmienkou** $u(0,x) = u_0(x), x \in (0,\pi)$**.**

Ukážte, že pre $X = \mathcal{L}^2(0,\pi)$ **a** $u_0 \in X$ $(u_0(x) = \sum_k a_k \phi_(x))$ **je**

$$g_t(u_0) = \sum_k a_k \mathrm{e}^{-k^2 t} \phi_k(x),\ \ a_k = \int_0^\pi \phi(x)\, u_0(x)\, \mathrm{d}x$$

tok daného DS a autonómnosť. Potom zistite, čo sa deje pre $t \to \infty$ **(sumy aj konvergencia je v zmysle priestora** X**).**

Séria úloh 2: Ukážte, že T **zachováva mieru** μ **na** $X = [0,1]$**, pričom** $\Sigma = \mathcal{B}(0,1)$

(a) $T(x) = 1 - |2x-1|,\ \ \mu = \lambda$

(b) $T(x) = 4x(1-x),\ \ \mu(A) = \displaystyle\int_A \frac{\mathrm{d}x}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$

(c) $T(x) = \dfrac{1}{x} - \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor,\ \ \mu(A) = \dfrac{1}{\ln 2}\displaystyle\int_A \frac{\mathrm{d}x}{1+x}$

(d) $T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x}, & x \in [0,1/2] \\ \dfrac{1-x}{x}, & x \in [1/2,1] \end{cases},\ \ \mu(A) = \displaystyle\int_A \frac{\mathrm{d}x}{x}$

Séria úloh 3:
Nech $T : [0,1] \to [0,1]$ je lineárna na $[0,1/4]$, $[1/4,1/2]$, $[1/2,1]$ a $T(0) = 0$, $T(1/4) = 1/2$, $T(1/2) = 0$, $T(1) = 1/2$. Ukážte, že λ nie invariantná pre T a žiaden bod z $(1/2,1]$ sa do $(1/2,1]$ nevráti.

Séria úloh 4: Vyšetrite ergodičnosť zobrazení:

(a) $T(x) = x+1$, $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \#)$

(b) $T(x) = x+2$, $(\mathbb{Z}, 2^{\mathbb{Z}}, \#)$

(c) $T(x) = x+1$, $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$

Séria úloh 5: Nech $T : [0,1] \to [0,1]$, $T(x) = x^2$. Pomocou vhodného rozkladu $[0,1] = A \uplus B$ ukážte, že Lebesguova miera na borelovských množinách nie je ergodická pre T.

Séria úloh 6: Nech $T : [0,1] \to [0,1]$ je zobrazenie stan $(1 - |2x-1|)$. Dokážte, že pre λ-skoro každé $x \in [0,1]$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^{[k]}(x) = \frac{1}{2}.$$

Séria úloh 7: Zistite, ktoré zo systémov sú gradientné/Hamiltonove a nájdite potenciál/Hamiltonián.

(a) $\dot{x} = -2x\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$
$\dot{y} = -2y\,\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$

(b) $\dot{x} = y + x^2 y$
$\dot{y} = -x + 2xy$

(c) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = y^3$

(d) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = -y - x^3$

(e) $\dot{x} = \sin y$
$\dot{y} = x\cos y$

(f) $\dot{x} = y + 2xy$
$\dot{y} = x + x^2 - y^2$

(g) $\dot{x} = -x + 2y^3 - 2y^4$
$\dot{y} = -x - y + xy$

(h) $\dot{x} = 3x^2 - 1 - \mathrm{e}^{2y}$
$\dot{y} = -2x\mathrm{e}^{2y}$

Séria úloh 8: Ukážte, že systém je Hamiltonov, nájdite Hamiltonián a načrtnite fázový portrét.

(a) $x' = -3x + 5y, \quad y' = -2x + 3y$

(b) $x' = y, \quad y' = -x^3 + x$

(c) $x' = x^2 - 2xy, \quad y' = y^2 - 2xy$

(d) $x' = x^2 y, \quad y' = -x(1 + y^2)$

(e) $x' = 3y^2 - 3x, \quad y' = -3x^2 + 3y$

(f) $x' = y + x^2 - y^2, \quad y' = -x - 2xy$

(g) $x' = x\cos y, \quad y' = -\sin y$

(h) $\omega' = \phi, \quad \phi' = -\frac{g}{l}\sin\omega, \quad g, l > 0$

Séria úloh 9: Ukážte, že pre Duffingovu rovnicu

$$x'' + x' + \beta x^3 = \gamma\cos\omega t$$

existuje Hamiltonián.

[Hint: $H = H(x, x', t)$]

Séria úloh 10: Ukážte, že je splnená nutná podmienka a nájdite Hamiltonián.

(a) $x_1' = \sin x_2 + 2x_3x_4, \quad x_2' = 1, \quad x_3' = x_4^2 + 2x_3x_2, \quad x_4' = 1 - 2x_2x_4$

(b) $q_1'' = -2q_1 + q_2, \quad q_2'' = q_1 - 2q_2$

(c) $q_1'' = -\dfrac{q_1}{||\mathbf{q}||^3}, \quad q_2'' = -\dfrac{q_2}{||\mathbf{q}||^3}$

(d) $x' = u, \quad y' = v, \quad u' = -Ax + 2xy, \quad v' = -By + \epsilon y^2 + x^2, \qquad A, B, \epsilon \in \mathbb{R}, A, B > 0$

(e) $q_1'' = -q_1(q_1^2 + aq_2^2), \quad q_2'' = -q_2(q_2^2 + aq_1^2), \quad a \in \mathbb{R}$

(f) $q_1'' = q_1 - q_1(q_1^2 + q_2^2), \quad q_2'' = q_2 - q_2(q_2^2 + q_1^2)$

(g) $q_1'' = -\nu q_1 + aq_1^2, \quad q_2'' = -\nu q_2 - aq_2^2, \quad a, \nu \in \mathbb{R}$

Séria úloh 11: Využite Routheove-Stodolove-Hurwitzove kritérium na určenie regiónu asymptotickej stability systémov.

(a) $x' = px - y, \quad y' = x + py$

(b) $x' = px - y, \quad y' = rx + py$

(c) $x' = px - y, \quad y' = x + py, \quad z' = px + y + z$

(d) $x' = -ax + y + bz, \quad y' = x - 2y + bz, \quad z' = -by + az$

(e) $x''' + abx'' + ax' + bx = 0$

(f) $x^{(4)} + 2ax''' + bx'' + 7x' + bx = 0$

Séria úloh 12: Nakreslite fázový portrét rovnice $\ddot{x} + 3|\dot{x}| + 2x = 0.$

Séria úloh 13: Nakreslite fázové portréty systémov.

(a) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 1 + x^2 - (1-x)y$

(b) $\dot{x} = y\mathrm{e}^y, \quad \dot{y} = 1 - x^2$

(c) $\dot{x} = 1 - xy, \quad \dot{y} = (x-1)y$

(d) $\dot{x} = (1 + x - 2y)x, \quad \dot{y} = (x-1)y$

(e) $\dot{x} = -6y + 2xy - 8, \quad \dot{y} = y^2 - x^2$

(f) $\dot{x} = \sin y, \quad \dot{y} = -\sin x$

(g) $\dot{x} = \sin x \cos y, \quad \dot{y} = \sin y \cos x$

(h) $\dot{x} = 4 - 4x^2 - y^2, \quad \dot{y} = 3xy$

Séria úloh 14: Ukážte, že nulové riešenie systému

$$\dot{x} = -x - \frac{y}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\dot{y} = -y + \frac{x}{\ln\sqrt{x^2+y^2}},$$

je stabilná špirála, aj keď je dikritickým uzlom jeho linearizácie.

Hint: polárne súradnice

Séria úloh 15: Ukážte, že systém

$$\dot{x} = x\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{2}y\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right),$$

$$\dot{y} = y\left(1 - \sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{1}{2}x\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)$$

má dve ekvilibriá. Nakreslite fázový portrét.

Hint: polárne súradnice

Séria úloh 16: Ukážte, že systém

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = \frac{4x^2}{1+3x^2} - y$$

má tri ekvilibriá. Nakreslite fázový portrét a región, kde je $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0.$

Séria úloh 17:

Vyšetrite stabilitu nelineárnych systémov

13) $x_1' = -x_1 + x_2 + 2x_1x_2$
$x_2' = 2x_1 - 3x_2 + 5x_1^4 + x_2^3$

14) $x_1' = -2x_1 + x_1^2 + x_2^2,$
$x_2' = -x_1 + 3x_2 + 3x_2^2$

15) $x_1' = e^{x_1+2x_2} - \cos 3x_1,$
$x_2' = \sqrt{4+8x_1} - 2e^{x_2}$

16) $x_1' = 2\sqrt{x_1+1} - 2e^{x_1+x_2}$
$x_2' = \sin x_1 + \ln(1-4x_2)$

Pri akých hodnotách parametrov je triviálne riešenie asymptoticky stabilné?

17) $x_1' = ax_1 - 2x_2 + x_1^2$
$x_2' = x_1 + x_2 + x_1x_2$

18) $x_1' = ax_1 + x_2 + x_1^2$
$x_2' = x_1 + ax_2 + x_2^2$

19) $x_1' = x_2 + \sin x_1$
$x_2' = ax_1 + bx_2$

20) $x_1' = x_1 + ax_2 + x_2^2$
$x_2' = bx_1 + -3x_2 - x_1^2$

Vyšetrite stabilitu triviálneho riešenia pomocou Ljapunovovej funkcie

21) $x_1' = x_2 + 2x_1^5$
$x_2' = -3x_1 + x_2^3$

22) $x_1' = x_2$
$x_2' = \sin(x_1 + x_2)$

23) $x_1' = -x_1^5 + 2x_2^3$
$x_2' = -x_1 - x_2^3 + x_2^5$

Séria úloh 18: Ukážte, že systémy nemajú periodické riešenia.

(a) $\dot{x} = y + x^3, \quad \dot{y} = x + y + y^3$

(b) $\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y - 2xy$

(c) $\dot{x} = -(1-x)^3 + xy^2, \quad \dot{y} = y + y^3$

(d) $\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (1+x^2)y + x^3$

(e) $\dot{x} = 2xy + x^3, \quad \dot{y} = -x^2 + y - y^2 + y^3$

(f) $\dot{x} = x^2 + y^2, \quad \dot{y} = y^2 + x^2 e^x$

Séria úloh 19: Ukážte, že sa HB problému

$$\ddot{x} + x = -F_0 \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad x(t_0) = x_0 > 0, \quad \dot{x}(t_0) = 0, \quad F_0 > 0$$

otočí práve n-krát okolo ekvilibria kým ho dosiahne, ak $(4n-1)F_0 < x_0 < (4n+1)F_0$.

Séria úloh 20: Preskúmajte fázový portrét sústavy pre rôzne hodnoty parametra a. Nájdite bifurkačniú hodnotu parametra a nakreslite bifurkačný diagram.

(a) $x' = a - x^2$

(b) $x' = ax - x^2$

(c) $x' = a - x^2,$
$y' = -y$

(d) $x' = a^2 + y^2 - a,$
$y' = -y$

(e) $x' = x^2 + y,$
$y' = x - y + a$

(f) $x' = y,$
$y' = -x - ax^3$

(g) $x' = ax + (a-1)y,$
$y' = x + ay$

(h) $x' = y,$
$y' = a - \mathrm{e}^x$

(i) $x' = ax - x^3$

(j) $x' = y,$
$y' = (x-a)(x^2 - a)$

(k) $x' = ax^3 + x^2 y,$
$y' = -y + x^2 y$

(l) $x' = ax + y + \sin x,$
$y' = x - y$

(m) $x' = a(1-y^2)x - y,\ y' = x$

(n) $x' = -x + y + x^2 y,$
$y' = a - y - x^2 y$

(o) $x' = ax - y + x(x^2+y^2),$
$y' = x + ay + y(x^2+y^2)$

(p) $x' = x(1-x^2-y^2) - y(1+a+x),$
$y' = x(1+a+x) + y(1-x^2-y^2)$

Séria úloh 21: Určte, pre aké hodnoty parametra sú systémy disipatívne.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ax - x^3$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y,$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -w^2 x$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = y,$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -by - w^2 x$

(d) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a(y-x),$
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(b-z) - y,$
$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - cz$