Úloha: Nájdite krivku ležiacu v prvom kvadrante, pre ktorú platí, že v každom bode je vzdialenosť dotyčnice od súčinu n fixných bodov je konštantná (BÚNV 1).

Rovnica dotyčnice v bode $(x, y(x))$ je $Y - y(x) = y'(x)(X - x)$. Vzdialenosť bodu (x_i, y_i) od tejto priamky

$$d_i = \frac{|y_i - y - y'(x_i - x)|}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Teda riešime problém $\prod_{i=1}^n d_i^2 = 1$.

Prípad 1 bodu, teda $n = 1$:

Riešme rovnicu $(y_1 - y - y'(x_1 - x))^2 = 1 + (y')^2$ substitúciou $y' = p, p = p(x)$ a derivovaním dostaneme

$$-2\,(y_1 - y(x) - (x_1 - x)\,p(x))\,(x_1 - x)\,\frac{d}{dx}p(x) - 2\,p(x)\,\frac{d}{dx}p(x) = 0,$$

čo je ekvivalentné rovnici

$$2\left(\frac{d}{dx}p(x)\right)((x_1 - x + 1)\,(x_1 - x - 1)\,p(x) + (x_1 - x)\,(y(x) - y_1)) = 0,$$

z ktorej dostaneme

$$p' = y'' = 0 \text{ alebo } p = y' = \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{(x_1 - x + 1)\,(x_1 - x - 1)}.$$

Z prvej rovnice je

$$y(x) = c(x - x_1) + y_1 \pm \sqrt{c^2 + 1}.$$

Druhá rovnica je separovateľná a jej riešenie je

$$y(x) = y_1 \pm \sqrt{(x - 1 + x_1)(1 + x - x_1)}.$$

Prípad 2 bodov, teda $n = 2$:
Riešme rovnicu $(y_1 - y - y'(x_1 - x))^2(y_2 - y - y'(x_2 - x))^2 = 1 + (y')^2$ substitúciou $y' = p, p = p(x)$ a derivovaním dostaneme

$$p'\,(2\,((x - x_2)\,(x - x_1) - 1)\,p - 2\,yx + yx_1 + yx_2 + y_1x + y_2x - x_1y_2 - x_2y_1) = 0$$

z ktorej dostaneme

$$p' = y'' = 0 \text{ alebo } p = y' = \frac{2\,yx - y_1x - y_2x - yx_1 - yx_2 + x_1y_2 + x_2y_1}{2\,(x - x_2)(x - x_1) - 2}.$$

Z prvej rovnice je

$$y(x) = c(x - x_1) + y_1 \pm \sqrt{c^2 + 1}.$$

Druhá rovnica lineárna 1. rádu a jej riešenie je

$$y(x) = c\sqrt{(x - x_2)(x - x_1) - 1} + \frac{(x_1 - x_2)((y_1 - y_2)\,x + x_1y_2 - x_2y_1) + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 - x_2)^2 + 4}.$$