# Séria úloh 1

Množiny a zobrazenia: množinová algebra, nekonečné operácie, obrazy množín

14. 2. 2019

| | |
|---|---|
| **Axióma extenzionality** | $A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \equiv x \in B)$<br>t. j., množiny $A$ a $B$ majú rovnaké prvky |
| **Inklúzia** | $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \to x \in B)$<br>t. j., každý prvok množiny $A$ patrí do $B$<br>$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$ |
| **Zjednotenie množín** | $z \in A \cup B \Leftrightarrow (z \in A \vee z \in B)$ |
| **Karteziánsky súčin množín** | $(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in B)$ |
| **Prienik množín** | $z \in A \cap B \Leftrightarrow (z \in A \wedge z \in B)$ |
| **Rozdiel množín** | $z \in A \setminus B \Leftrightarrow (z \in A \wedge z \notin B)$ |
| **Zjednotenie systému** | $x \in \bigcup \mathcal{F} \Leftrightarrow (\exists A \in \mathcal{F})\ x \in A$ |
| **Prienik systému** | $x \in \bigcap \mathcal{F} \Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{F})\ x \in A$ |
| **Zjednotenie indexovaného systému** | $x \in \bigcup\limits_{t \in S} F_t \Leftrightarrow (\exists t \in S)\ x \in F_t$ |
| **Prienik indexovaného systému** | $x \in \bigcap\limits_{t \in S} F_t \Leftrightarrow (\forall t \in S)\ x \in F_t$ |

| | |
|---|---|
| $f : A \to B$ | $y \in f^{\to}(X) \Leftrightarrow (\exists x \in X)\ f(x) = y$ |
| $X \subseteq A,\ Y \subseteq B$ | $x \in f^{\leftarrow}(Y) \Leftrightarrow (\exists y \in Y)\ f(x) = y$ |

**Príklad 1.** *Nájdite* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \cap C$, $B \setminus C$, $(B \cup C) \setminus A$, $(A \cap C) \setminus B$, $C \setminus (A \cup B)$, $A \times B$, *ak*

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 3, 4\}$; $C = \{5, 4\}$

b) $A = \{\{1, 2\}, 3\}$; $B = \{3, 4\}$; $C = \{\{1\}\}$

c) $A = \{10, 11, \{12\}\}$; $B = \{1, 10\}$; $C = \{\emptyset, 3, 4\}$

d) $A = \{\{1, \{1\}\}, 1\}$; $B = \{1, \{1\}\}$; $C = \emptyset$

**Príklad 2.** *Vypíšte všetky prvky množiny.*

a) $\{4, 5, 8\}$

b) $\{\emptyset\}$

c) $\{\{5\}\}$

d) $\{\{5, 7, 9\}, 3\}$

e) $\{\{\{1\}\}, \{1\}, 1\}$

f) $\{\{1, 2\}, \{\{1, 2\}\}, \emptyset\}$

**Príklad 3.** *Majme množiny* $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x;\ (\exists k \in \mathbb{N})\ x = 2k\}$, $C = \{x \in \mathbb{N};\ x < 6\}$. *Ktoré z nasledujúcich tvrdení sú pravdivé?*

a) $\{4, 3, 2\} \subseteq A$

b) $3 \in B$

c) $A \subseteq C$

d) $\{2\} \in A$

e) $C \subseteq B$

f) $\{2, 4, 6, 8\} \subseteq B$

g) $C \subseteq A$

h) $A = C$

**Príklad 4.** *Ktoré z nasledujúcich tvrdení dovoľuje urobiť záver, že* $x \in A \cup B$*?*

a) $x \in A$ a $x \in B$.

b) $x \in A$ alebo $x \in B$.

c) Ak $x \in A$, tak $x \in B$.

d) Ak $x \notin A$, tak $x \in B$.

**Príklad 5.** *Ktoré z nasledujúcich tvrdení dovoľuje urobiť záver, že* $x \in A \cap B$*?*

a) $x \in A$ a $x \in B$.

b) $x \in A$ alebo $x \in B$.

c) Ak $x \in A$, tak $x \notin A \setminus B$.

d) Ak $x \in A$, tak $x \in B$.

**Príklad 6.** *Ktoré z nasledujúcich tvrdení dovoľuje urobiť záver, že* $x \in A \setminus B$*?*

a) $x \in A$ a $x \notin B \setminus A$.

b) $x \in A \cup B$ a $x \notin B$.

c) $x \in A \cup B$ a $x \notin A \cap B$.

d) $x \in A$ a $x \in A \cap B$.

**Príklad 7.** *Doplňte vynechané časti dôkazu.*

a) *Majme množiny* $A, B \subseteq U$. *Potom platí, že*

$$A \cap (U \setminus B) = A \setminus B.$$

Dôkaz.
Najprv ukážeme, že ak $x \in A \cap (U \setminus B)$, tak $x \in A \setminus B$. Ak $x \in A \cap (U \setminus B)$, tak $x \in A$ a $x \in$ __________, z definície prieniku. Ale $x \in U \setminus B$ znamená, že $x \in U$ a $x \in$ __________. Keďže $x \in A$ a $x \notin B$, dostávame $x \in$ __________, ako sme chceli. Teda $A \cap (U \setminus B) \subseteq A \setminus B$.
Naopak musíme ukázať, že $A \setminus B \subseteq A \cap (U \setminus B)$. Ak __________, tak $x \in A$ a $x \notin B$. Keďže $A \subseteq U$, dostávame $x \in$ __________. Z toho $x \in U$ a $x \notin B$, preto __________. Ale potom __________ a $x \in U \setminus B$, takže $x \in A \cap (U \setminus B)$. Záverom dostávame $A \setminus B \subseteq A \cap (U \setminus B)$.

b) *Majme množiny* $A, B, C$. *Potom platí, že*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Dôkaz.
Najprv ukážeme, že $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Ak $x \in$ __________, tak $x \in A$ alebo $x \in B \cap C$. Ak $x \in A$, tak určite $x \in A \cup B$ a $x \in A \cup C$. Takže $x \in$ __________. Na druhej strane, ak __________, tak $x \in B$ a $x \in C$. Ale to znamená, že $x \in A \cup B$ a __________, takže $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Záverom máme $A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Naopak, ak $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, tak __________ a __________. Rozlíšime dva prípady: keď $y \in A$ a keď $y \notin A$. Ak $y \in A$, tak $y \in A \cup (B \cap C)$ a táto časť je hotová. Na druhej strane, ak __________, tak z $y \in A \cup B$ máme $y \in B$. Podobne, keďže $y \in A \cup C$ a $y \notin A$, máme __________. Takže __________ a to znamená, že $y \in A \cup (B \cap C)$. Záverom dostávame $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subseteq A \cup (B \cap C)$.

**Príklad 8.** *Ukážte, že* $A \cap B$ *a* $A \setminus B$ *sú disjunktné, a že* $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

**Príklad 9.** *Sú nasledujúce vzťahy pravdivé pre ľubovoľné množiny* $M, N, P, Q \subseteq X$? *Svoje tvrdenie podložte dôkazom alebo kontrapríkladom.*

a) $M \setminus (M \setminus N) = N \setminus (N \setminus M)$

b) $M \setminus (N \setminus M) = N \setminus (M \setminus N)$

c) $(M \setminus N) \cap (P \setminus Q) = (M \setminus P) \setminus (N \setminus Q)$

d) $(M \cup N) \setminus P = (M \setminus P) \cup N$

e) $(M \cap N) \times (P \cap Q) = (M \times P) \cap (N \times Q)$

**Príklad 10.** *Nech* $S = \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}$. *Pre* $x \in S$ *označme* $A_x = (-\frac{1}{x}, \frac{1}{x})$. *Nájdite* $\bigcap_{x \in S} A_x$.

**Príklad 11.** *Overte, že nasledujúce vzťahy platia pre ľubovoľné množiny $A, B, C, D \subseteq X$.*

a) $X \setminus (X \setminus A) = A$

b) $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$

c) $A \cup (X \setminus A) = X$

d) $(A \cap (B \cup C)) = ((A \cap B) \cup (A \cap C))$

e) $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

f) $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$

g) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq C) \Rightarrow A \cup B \subseteq C$

h) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$

**Príklad 12.** *Zapíšte množiny tak, aby sa vo výslednom zápise nevyskytovali operácie zjednotenia a prieniku.*

a) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [5 + \frac{1}{n+1}, 7 - \frac{1}{n+1}]$

b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (8 + \frac{1}{2^n}, 9 - \frac{1}{3^n})$

c) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-1 - \frac{1}{5^n}, 1 + \frac{1}{5^n}]$

d) $\bigcup_{a\in[1,2]} [0, 3a]$

e) $\bigcap_{a\in\mathbb{R}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = ax + 5\}$

f) $\bigcup_{b\in[-2,2]} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = x + b\}$

g) $\bigcup_{a\in[1,3]} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = a\}$

**Príklad 13.** *Nájdite všeobecný prienik a zjednotenie nasledujúcich systémov množín cez indexové množiny $\mathbb{N}$ a $[0, \infty)$.*

a) $A_t = \{x;\ 0 \le x \le \frac{1}{t+1}\}$

b) $A_t = \{x;\ \sqrt{t} \le x \le \sqrt{2t}\}$

c) $A_t = \{x;\ \sin x = t\}$

d) $A_t = \{x;\ t^2 < x < (t + 1)^2\}$

**Príklad 14.** *Nájdite všeobecný prienik a zjednotenie nasledujúcich systémov množín cez indexovú množinu $\mathbb{R}$.*

a) $A_t = \{x;\ \mathrm{tg}\ x = t\}$

b) $A_t = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \ge t^2\}$

c) $A_t = \{(x, y);\ x = t \cdot y\}$

**Príklad 15.** *Nájdite* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$ *a* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,m}$, *kde* $A_{n,m} = \{x;\ n^2 \le x \le m^2\}$.

**Príklad 16.** *Nájdite* $\bigcup \mathcal{F}$ *a* $\bigcap \mathcal{F}$.

a) $\mathcal{F} = \{[1, 1 + \frac{1}{n+1}];\ n \in \mathbb{N}\}$

b) $\mathcal{F} = \{(1, 1 + \frac{1}{n+1});\ n \in \mathbb{N}\}$

c) $\mathcal{F} = \{[2, x];\ x \in \mathbb{R} \wedge x > 2\}$

d) $\mathcal{F} = \{[0, 3], (1, 5), [2, 4)\}$

**Príklad 17.** *Ukážte, že pre ľubovoľné množiny* $I, J, K, M, N$, *ľubovoľné systémy množín* $\langle P_t;\ t \in I\rangle$, $\langle Q_t;\ t \in J\rangle$ *platia nasledujúce tvrdenia.*

a) Ak $K \subseteq I$, tak $\bigcup\limits_{t \in K} P_t \subseteq \bigcup\limits_{t \in I} P_t$.

b) Ak $K \subseteq I$, tak $\bigcap\limits_{t \in K} P_t \subseteq \bigcap\limits_{t \in I} P_t$.

c) Ak $t_0 \in I$, tak $\bigcap\limits_{t \in I} P_t \subseteq P_{t_0} \subseteq \bigcup\limits_{t \in I} P_t$.

**Príklad 18** (de Morganove zákony)**.** *Ukážte, že pre ľubovoľné množiny* $I, X$ *a ľubovoľný systém množín* $\langle P_t;\ t \in I\rangle$ *platia nasledujúce tvrdenia.*

a) $X \setminus \bigcup\limits_{i \in I} P_i = \bigcap\limits_{i \in I} (X \setminus P_i)$

b) $X \setminus \bigcap\limits_{i \in I} P_i = \bigcup\limits_{i \in I} (X \setminus P_i)$

**Príklad 19** (Distributívne zákony)**.** *Ukážte, že pre ľubovoľné množiny* $I, P$ *a ľubovoľný systém množín* $\langle P_t;\ t \in I\rangle$ *platia nasledujúce tvrdenia.*

a) $P \cap \bigcup\limits_{i \in I} P_i = \bigcup\limits_{i \in I} (P \cap P_i)$

b) $P \cup \bigcap\limits_{i \in I} P_i = \bigcap\limits_{i \in I} (P \cup P_i)$

c) $P \times \bigcup\limits_{i \in I} P_i = \bigcup\limits_{i \in I} (P \times P_i)$

d) $P \times \bigcap\limits_{i \in I} P_i = \bigcap\limits_{i \in I} (P \times P_i)$

e) $\bigcup\limits_{i \in I} P_i \times P = \bigcup\limits_{i \in I} (P_i \times P)$

f) $\bigcap\limits_{i \in I} P_i \times P = \bigcap\limits_{i \in I} (P_i \times P)$

**Príklad 20.** *Vypočítajte* $f(5)$, $\mathcal{D}(f)$, $\mathcal{H}(f)$, $f^{\rightarrow}(\{5\})$, $f^{\leftarrow}(\{9, 8, 10\})$, $f^{\rightarrow}((0, 1))$, $f^{\leftarrow}((0, 1))$ *ak*

a) $f:\ y = x^2$

b) $f:\ y = \sqrt{x}$

**Príklad 21.** *Nech $X, Y$ sú ľubovoľné množiny, $f : X \to Y$ a $P, P_1, P_2 \subseteq X$, $Q, Q_1, Q_2 \subseteq Y$. Zistite, ktoré z inklúzií medzi množinami $C$ a $D$ platia. Svoje tvrdenia podložte dôkazom alebo kontrapríkladom.*

a) $C = f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}(P))$, $\quad D = P$

b) $C = f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}(Q))$, $\quad D = Q$

c) $C = f^{\rightarrow}(P_1 \cup P_2)$, $\quad D = f^{\rightarrow}(P_1) \cup f^{\rightarrow}(P_2)$

d) $C = f^{\rightarrow}(P_1 \cap P_2)$, $\quad D = f^{\rightarrow}(P_1) \cap f^{\rightarrow}(P_2)$

e) $C = f^{\leftarrow}(Q_1 \cup Q_2)$, $\quad D = f^{\leftarrow}(Q_1) \cup f^{\leftarrow}(Q_2)$

f) $C = f^{\leftarrow}(Q_1 \cap Q_2)$, $\quad D = f^{\leftarrow}(Q_1) \cap f^{\leftarrow}(Q_2)$

g) $C = f^{\leftarrow}(Y \setminus Q)$, $\quad D = X \setminus f^{\leftarrow}(Q)$

## References

[1] Lay St. R., Analysis: with an introduction to proof, Upper Saddle River, New Jersey, 2005.

[2] Onyszkiewicz J., Marek W., Elementy logiky i teorii mnogości w zadaniach, PAN, Warszawa, 1975.