Séria úloh 2

Metrické priestory: metrika, topologické pojmy

24. februára 2023

Príklad 1. *Dokážte, že vlastnosti metriky sú navzájom nezávislé.*

Príklad 2. *Nájdite predpis nasledujúcich metrík na množine* $(0,1)$*. Rozhodnite o úplnosti daného metrického priestoru. Ako vyzerá množina* $\mathrm{B}(\frac{3}{4},\frac{1}{2})$ *v jednotlivých metrických priestoroch?*

a) Euklidovská metrika.

b) Diskrétna metrika.

c) Euklidovská metrika množiny $(100,200)$.

d) Euklidovská metrika množiny $(2016,\infty)$.

e) Euklidovská metrika množiny $(10,20]$.

f) Euklidovská metrika množiny $[2016,\infty)$.

g) Euklidovská metrika množiny $\mathbb{R}$.

h) Metrika, ktorá vznikne ako mnimum Euklidovskej metriky a $\frac{1}{2}$.

Príklad 3. *Uvažujme množinu* $X=\{O,A,B,C\}$ *a zobrazenie* $d:\ X\times X\to\mathbb{R}$ *definované nasledujúcimi rovnosťami:*

$$d(A,B)=d(B,C)=d(C,A)=1,$$
$$d(O,A)=d(O,B)=d(O,C)=\xi.$$

a) Pre ktoré hodnoty $\xi>0$ je funkcia d metrika?

b) Ak $\xi=\frac{1}{2}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$ s euklidovskou metrikou?

c) Ak $\xi=\frac{4}{7}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathbb{R}^3$ s euklidovskou metrikou?

d) Ak $\xi=\frac{1}{2}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathscr{C}[0,1]$ s metrikou $\rho:\ \mathscr{C}[0,1]\times\mathscr{C}[0,1]\to\mathbb{R}$ definovanou rovnosťou $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$?

e) Ak $\xi=\frac{4}{7}$, môže byť X podpriestorom priestoru $\mathscr{C}[0,1]$ s metrikou $\rho:\ \mathscr{C}[0,1]\times\mathscr{C}[0,1]\to\mathbb{R}$ definovanou rovnosťou $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[0,1]}|f(x)-g(x)|$?

Príklad 4. *Nech* (X, d) *je metrický priestor a funkcia* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je definovaná predpisom*

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot (2x + 1 - 2|x-1| - |x-2| + |x-3|).$$

a) Dokážte, že $f \circ d$ je metrika na množine X.

b) Ak X je množina všetkých reálnych čísel s euklidovskou metrikou, popíšte podpriestor $M = \{0, 1, 2, 5\}$.

Príklad 5. *Nech* $X \neq \emptyset$ *a* d_1, d_2 *sú metriky na* X.

a) Je funkcia d definovaná ako $d(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ metrikou na X?

b) Je funkcia d_a definovaná ako $d_a(x,y) = \min\{a; d(x,y)\}$ metrikou na X?

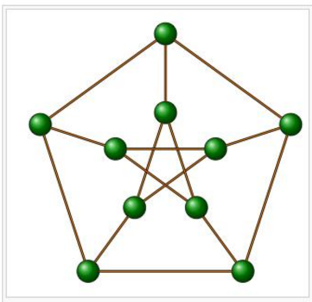
c) Sú funkcie $d_1 + d_2$, $\max\{d_1, d_2\}$ a $\min\{d_1, d_2\}$ metrikami na X?

d) Je funkcia ad definovaná ako $(ad)(x,y) = a \cdot d(x,y)$ metrikou na X?

Príklad 6. *Majme graf* (G, E).

a) Ukážte, že funkcia udávajúca počet hrán na najkratšej ceste medzi dvoma vrcholmi grafu (G, E) je metrika.

b) Popíšte otvorené gule s polomerom 1, 2, 3 pre Petersenov graf.



Príklad 7. *Ukážte, že funkcia* d *definovaná vzťahom*

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|,$$

je metrika na množine $\{0,1\}^n$ *všetkých binárnych kódov dĺžky* n *(tzv. Hammingova vzdialenosť dvoch kódov). Koľko kódov obsahuje* $B(x;q)$, *kde* $x \in \{0,1\}^n$, $q \in \mathbb{N}$*?*

Príklad 8. *Rozhodnite, či v Euklidovom priestore sú nasledujúce množiny otvorené alebo uzavreté a nájdite ich všetky hromadné body (deriváciu množiny), vnútorné body (vnútro množiny), hraničné body (hranicu množiny) a izolované body.*

a) $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}, \, y = 3, \, n \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = (-1)^n \dfrac{2n-2}{5n+3}, \, y = m, \, n \in \mathbb{N}, \, m \in \mathbb{Z}\right\}$;

c) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = k, \, y = k^2 \vee x = k, \, y = k^2 - \dfrac{1}{n}, \, k \in \mathbb{Z}, \, n \in \mathbb{N}\right\}$;

d) $E = \mathbb{Q}^2$;

e) $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, -1 < x \leq 1, \, y + 2x = 4\}$;

f) $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y - 5x = k, \, k \in \mathbb{Z}\}$;

g) $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, \max\{x,y\} = 2, \, x \neq y\}$;

h) $CH = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x < \dfrac{1}{y}\right\}$;

ch) $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x < y^3\}$;

i) $J = (2,3] \times [-5,6]$;

j) $K = \left\{\dfrac{1}{n}, \, n \in \mathbb{N}\right\} \times [-5,6]$;

k) $L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y < \sin x, \, y > 0\}$;

l) $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 2x \leq y \leq -x + 3, \, 1 < x \leq 2\}$;

m) $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 < 3, \, x \notin \mathbb{Z}, \, y \notin \mathbb{Z}\}$;

n) $O = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \leq |x| \leq 2, \, 1 \leq |y| \leq 2\}$;

o) $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \leq |x| + |y| \leq 2\}$;

p) $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 \leq |x| \leq 2, \, 1 \leq |y| \leq 2, \, x^2 + y^2 \leq 2\}$;

q) $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 < |x| + |y| < 2, \, y \neq 1\}$;

r) $S = (2,5] \times (0,2)$;

s) $T = (2,5] \times [0,2)$;

t) $U = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$;

u) $V = \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$.

v) $W = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

w) $X = \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Príklad 9. *Rozhodnite, či je množina $P \subseteq M$ otvorená alebo uzavretá v metrickom priestore (M, σ) a nájdite jej všetky hromadné body (deriváciu množiny), vnútorné body (vnútro množiny), hraničné body (hranicu množiny) a izolované body.*

a) $P = \{[2,3]\}$, $M = \mathbb{R}^2$, σ - Euklidovská metrika

b) $P = \{[2,3]\}$, $M = \{[2,3]\}$, σ - Euklidovská metrika

c) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = \mathbb{R}^2$, σ - Euklidovská metrika

d) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = [5,7] \times [2,3]$, σ - Euklidovská metrika

e) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = [5,7) \times [2,3]$, σ - Euklidovská metrika

f) $P = (5,7) \times [2,3]$, $M = (5,7) \times [2,3]$, σ - Euklidovská metrika

Príklad 10. *Vypíšte všetky obojaké množiny (i otvorená i uzavretá množina) nasledujúcich metrických priestorov. $\rho_{\mathbb{E}^n}$ označuje metriku n-rozmerného Euklidovského priestoru.*

a) $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})$,

b) $([-1,1], \rho_{\mathbb{E}^1})$

c) $((-\infty,0) \cup (0,\infty), \rho_{\mathbb{E}^1})$

d) $\left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \rho_{\mathbb{E}^1}\right)$

e) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{E}^1})$

f) $(((0,2) \cup (3,4))^2, \rho_{\mathbb{E}^2})$

g) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \rho_{\mathbb{E}^2})$

h) $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \rho_{\mathbb{E}^2})$

Príklad 11. *Nájdite 2 uzavreté podmnožiny $M, N \subset \mathbb{R}^2$ tak, že $M \oplus N$ nie je uzavretá a* $\mathrm{dist}(M,N) = 0$.

Príklad 12. *Rozhodnite, či množina P je riedka, hustá, prvej kategórie alebo druhej kategórie v metrickom priestore $(M, \rho_{\mathbb{E}^n})$, kde $\rho_{\mathbb{E}^n}$ označuje metriku n-rozmerného Euklidovského priestoru.*

a) $P = (\mathbb{Z} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{Z})$, $M = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

b) $P = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{R}$, $n = 1$

c) $P = \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$, $n = 1$

d) $P = \mathbb{R}^2 \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{R})$, $M = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

e) $P = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1)\right) \times \{1\}$, $M = \mathbb{R}^2$, $n = 2$

f) $P = \mathbb{R}^2 \times \{2\}$, $M = \mathbb{R}^3$, $n = 3$

g) $P = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $M = \mathbb{R}$, $n = 1$

h) $P = \{1\}$, $M = \{1\}$, $n = 1$

Príklad 13. *Nech X je neprázdna množina. Na množine ${}^{\mathbb{N}}X$ všetkých nekonečných postupností prvkov množiny X definujeme Bairovu metriku predpisom*

$$\rho(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \alpha \neq \beta \wedge n = \min\{k;\ \alpha(k) \neq \beta(k)\} \\ 0 & \textit{ináč.} \end{cases}$$

a) Ukážte, že ρ je metrika.

b) Ukážte, že ρ je ultrametrika, t.j. $\rho(\alpha,\beta) \leq \max\{\rho(\alpha,\gamma); \rho(\gamma,\beta)\}$ pre ľubovoľné $\alpha, \beta, \gamma \in {}^{\mathbb{N}}X$.

c) Popíšte otvorené gule v priestore $({}^{\mathbb{N}}X, \rho)$.

d) Popíšte uzavreté gule v priestore $({}^{\mathbb{N}}X, \rho)$.

e) Ukážte, že množina $B(\alpha, r)$ pre $\alpha \in {}^{\mathbb{N}}X$ a $r > 0$ je obojaká množina, t.j. i otvorená i uzavretá.

f) Ak $X = \mathbb{N}$, tak priestor $({}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}, \rho)$ sa nazýva Bairov priestor. Ukážte, že postupnosť $\langle \alpha_n;\ n \in \mathbb{N}]$, kde

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} 2 & k < n, \\ 5 & n \leq k \end{cases}$$

konverguje ku konštantnej postupnosti s hodnotou 2.

g) Ak $X = \{0, 1\}$, tak priestor $({}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}, \rho)$ sa nazýva Cantorov priestor. Ukážte, že postupnosť $\langle \alpha_n;\ n \in \mathbb{N}]$, kde

$$\alpha_n(k) = \begin{cases} 0 & k < n, \\ 1 & n \leq k \end{cases}$$

konverguje ku konštantnej postupnosti s hodnotou 0.

h) Nájdite netriviálnu postupnosť funkcí Cantorovho priestoru, ktorá konverguje k funkcii α, kde

$$\alpha(k) = \begin{cases} 0 & 2/k, \\ 1 & \text{ináč.} \end{cases}$$

i) Je množina $\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\};\ \alpha(n) = 0\}$ pre fixné $n \in \mathbb{N}$ otvorená alebo uzavretá?

j) Je množina $\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N};\ \alpha(n) = 10\}$ pre fixné $n \in \mathbb{N}$ otvorená alebo uzavretá?

k) Nech $a \in X$. Ukážte, že množina

$$\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}X;\ (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > k \to \alpha(n) = a)\}$$

je hustá množina v priestore $({}^{\mathbb{N}}X, \rho)$.

l) Ukážte, že množina $\{\alpha \in {}^{\mathbb{N}}\mathbb{N};\ (\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ \alpha(n) = k\}$ je riedka v Bairovom priestore.

m) Ukážte, že zobrazenie $f:\ {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\} \times {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\} \to {}^{\mathbb{N}}\{0, 1\}$ definované ako $f(\alpha, \beta)(n) = \min\{\alpha(n) + \beta(n); 1\}$, je spojité.

Príklad 14. *Majme Hilbertovu kocku, t.j. metrický priestor* $({}^{\mathbb{N}}[0, 1], \sigma)$*, kde*

$$\sigma(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} |\alpha(m) - \beta(m)|.$$

a) Ukážte, že $({}^{\mathbb{N}}[0, 1], \sigma)$ je metrický priestor.

b) Ukážte, že postupnosť $\langle \alpha_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$, kde $\alpha_n(k) = \frac{1}{n}$ pre $k < n$ a $\alpha_n(k) = 1$ pre $k \geq n$ konverguje k nulovej postupnosti.

c) Nájdite netriviálnu postupnosť Hilbertovej kocky, ktorá konverguje ku konštantnej postupnosti s hodnotou 1.

Príklad 15. *Nech* M *označuje množinu ohraničených integrovateľných funkcí na množine* $[-1, 1]$.

a) Je funkcia d_1 definovaná ako $d_1(f,g) = \int\limits_{-1}^{1} |f(t) - g(t)| \; \mathbf{d}t$ metrika na M? Ako sa zmení situácia, keď uvažujeme množinu $\mathscr{C}[-1,1]$?

b) Je funkcia funkcia d_2 definovaná ako $d_2(f,g) = \sqrt{\int\limits_{-1}^{1} |f(t) - g(t)|^2 \; \mathbf{d}t}$ metrika na M? Ako sa zmení situácia, keď uvažujeme množinu $\mathscr{C}[-1,1]$?

c) Je funkcia funkcia d_∞ definovaná ako $d_\infty(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)|;\ -1 \leq t \leq 1\}$ metrika na M?

d) Vypočítajte vzdialenosť funkcií F a G v jednotlivých metrikách, kde $F:\ y = x$ a $G:\ y = x^2$.

e) Vypočítajte vzdialenosť funkcií F a G v jednotlivých metrikách, kde $F:\ y = \lfloor x \rfloor$ a $G:\ y = \sin x$.

Majme postupnosť $\langle f_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ funkcií z M definovanú predpisom

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{n} < |t| \leq 1, \\ 1 + nt & -\frac{1}{n} \leq t \leq 0, \\ 1 - nt & 0 \leq t \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

f) Nájdite bodovú limitu postupnosti $\langle f_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$.

g) Zistite, či je postupnosť $\langle f_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ konvergentná v metrikách d_1, d_2 a d_∞.

h) Vypočítajte vzdialenosti $d_1(f_n, f_m)$, $d_2(f_n, f_m)$ a $d_\infty(f_n, f_m)$.

i) Nájdite postupnosť funkcií $\langle g_n^1;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ takú, že $d_1(g_n^1, g_{n+1}^1) = \frac{1}{n}$.

j) Nájdite postupnosť funkcií $\langle g_n^2;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ takú, že $d_2(g_n^2, g_{n+1}^2) = \frac{1}{n}$.

k) Nájdite postupnosť funkcií $\langle g_n^\infty;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ takú, že $d_\infty(g_n^\infty, g_{n+1}^\infty) = \frac{1}{n}$.

V ïalšom uvažujme metriky d_1, d_2 d_∞ na množine $\mathscr{C}[-1,1]$.

l) Graficky znázornite množinu $B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon)$, kde $f_a(x) = a$ pre $x \in [-1,1]$.

m) Popíšte nekonečne veľa funkcií z množiny $B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon) \setminus B_{d_1}(f_a;\varepsilon)$.

n) Popíšte nekonečne veľa funkcií z množiny $B_{d_1}(f_a;\varepsilon) \setminus B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon)$.

o) Je množina $\{f_a;\ a \in \mathbb{Q}\}$ hustá v niektorom z priestrov $(\mathscr{C}[-1,1], d_1)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_2)$ alebo $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$?

p) Popíšte nekonečne veľa funkcií z množiny $B_{d_1}(f_a;\varepsilon) \cap B_{d_\infty}(f_a;\varepsilon)$.

q) Nájdite homeomorfizmus (bijekcia, ktorá je spojitá i k nej inverzná funkcia je spojitá) z priestorov $(\{f_a;\ a \in \mathbb{R}\}, d_1)$, $(\{f_a;\ a \in \mathbb{R}\}, d_2)$, $(\{f_a;\ a \in \mathbb{R}\}, d_\infty)$ do priestoru $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})$.

r) Nájdite iné podpriestory priestorov $(\mathscr{C}[-1,1], d_1)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_2)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$, ktoré sú homeomorfné s priestorom $(\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})$.

s) Rozhodnite o uzavretosti a otvorenosti množiny $\{f \in \mathscr{C}[-1,1];\ f(0) = 1\}$ v priestoroch $(\mathscr{C}[-1,1], d_1)$, $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$.

t) Ukážte, že žiadny bod množiny $\{f \in \mathscr{C}[-1,1];\ f(0) = f(1)\}$ nie je vnútorným v priestore $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$.

u) Nájdite uzáver a množinu všetkých hraničných bodov množiny $\{f \in \mathscr{C}[-1,1];\ f(0) = f(1)\}$ v priestore $(\mathscr{C}[-1,1], d_\infty)$.

Príklad 16. *Pre každé $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definujme funkciu $||\cdot||$ ako*

$$||n|| = \frac{1}{\max\{k \in \mathbb{N};\ 1/n \wedge \cdots \wedge k/n\}}$$

a $||0|| = 0$. Dokážte nasledujúce tvrdenia.

a) Funkcia d definovaná ako $d(x,y) = ||x-y||$ je metrika na $\mathbb{Z}$.

b) $\mathcal{H}(d) = \{0\} \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$.

c) Ak $\frac{1}{n+1} < r \leq \frac{1}{n}$, tak $B(a;r) = B(a;\frac{1}{n+1})$.

d) Ak $1 < r$, tak $B(a;r) = \mathbb{Z}$.

e) Ak $b \in B(0;\frac{1}{n})$, tak $1/b, \ldots, n/b$.

f) Ak $1/b, \ldots, n+1/b$, tak $b \in B(0;\frac{1}{n})$.

g) $n! \in B(0;\frac{1}{n-1})$.

h) $B(a;r) = a + B(0;r)$, kde $a + M = \{a+b;\ b \in M\}$.

i) $a + b\mathbb{Z} \subseteq B(a;r)$ pre $b \in B(0;r)$, kde $a + b\mathbb{Z} = \{a+bn;\ n \in \mathbb{Z}\}$.

j) $a + n!\mathbb{Z} \subseteq B(a;\frac{1}{n-1})$.

k) $\{n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 0$, $\{2^n n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 0$, $\{5+(n!)^n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 5$, $\{2+2n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 2$, $\{2+3n!\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 2$.

l) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{d} 0$ práve vtedy, keï

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\exists n_k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > n_k \rightarrow k/n).$$

m) Postupnosti $\{2^{n!}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{n^n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{3^{n!}\}_{n=1}^{\infty}$ nekonvergujú k 0.

n) Množina $a + b\mathbb{Z}$ je obojaká pre ľubovoľné $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$.

o) Žiadna množina obsahujúca aspoň dva rôzne body nie je súvislá.

p) $B(a;\frac{1}{n!}) \subseteq a + n!\mathbb{Z} \subseteq B(a;\frac{1}{n+1})$.

Príklad 17. *Pre $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ položme $||(x,y)|| = \max\left(|y|, \left|x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right|, \left|x - \frac{y}{\sqrt{3}}\right|\right)$. Ukážte, že je to norma a nakreslite tvar jednotkovej kružnice.*

Príklad 18. *Nájdite normu prvku u v LNP priestore $(X, ||\cdot||)$ (s prirodzenou normou, ak nie je povedané inak), ak*

a) $X = \mathcal{L}^2([0,1]^2),\ u = u(x,y) = x^2 + y^2$

b) $X = C^1([0,1]^2),\ u = u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$

c) $X = \ell^2,\ u = (1, 1/2, 1/3, \dots, 1/k, \dots)$

d) $X = \mathcal{L}^2_w(\mathbb{R}),\ u = (-1)^n \mathrm{e}^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \mathrm{e}^{-x^2}$ a $w = \mathrm{e}^{-x^2},\quad n \in \mathbb{N}$ [hint: vzťah Hermiteových polynómov]

e) $X = \mathcal{M}^{3\times 3}, u$ je matica

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$$

a norma je *a)* $\|A\|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ *b)* $\|A\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$

f) $X = \{u \in \mathcal{L}^2(0,1) : u' \in \mathcal{L}^2(0,1)\},\ u = u(x) = x^{\frac{2}{3}}$ a norma je $||u|| = \sqrt{||u||_2^2 + ||u'||_2^2}$

g) $X = C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}),\ u = \arctan x + 1$

h) $X = \mathcal{P}_n,\ u = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$

i) $X = c,\ u = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} :\quad x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}, n \in \mathbb{N},\ 0 < a < b$

Príklad 19. *Preverte, či nasledujúce priestory sú normované.*

a) $(\mathbb{R}, \lfloor x \rfloor)$ a $(\mathbb{R}, \mathrm{e}^x)$

b) $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, kde

$$\|x\| = \begin{cases} x, & \text{ak } x \ge 0 \\ -2x, & \text{ak } x < 0 \end{cases}$$

c) $(C(\mathbb{R}_0^+), \|\cdot\|)$, kde $\|f\| = \sup\limits_{t\ge 0} \mathrm{e}^{kt}|f(t)|,\quad k \in \mathbb{R}$

d) $\left(X, \frac{\|\cdot\|}{1+\|\cdot\|}\right)$, kde $\|\cdot\|$ je pôvodná norma na LNP X

e) $(X, \|\cdot\|_1 + \|\cdot\|_2)$, kde $\|\cdot\|_k,\ k = 1, 2$ sú normy na LNP X

f) $(C_{\mathrm{Lip}}(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, kde $\|f\| := |f(0)| + c_f,\quad c_f := \sup\left\{\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} : x, y \in \mathbb{R}, x \ne y\right\}$

g) $(C(0,1], \|\cdot\|)$, kde $||f|| = \sup\limits_{x\in(0,1]} \dfrac{|f(x)|}{|x|}$

h) $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$, kde $||f|| = \displaystyle\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t$

i) $(C^1([a,b]), \|\cdot\|)$, kde $||f|| = \displaystyle\int_a^b \{|f(t)| + |f'(t)|\}\, \mathrm{d}t$

j) $(X, \|\cdot\|)$, kde $X = \{f \in C^1([a,b]) : f(a) = f(b) = 0\}$ a $||f|| = \displaystyle\int_a^b |f'(t)|^2\mathrm{d}t$

k) $(\ell^p, \|\cdot\|)$, kde $||\mathbf{x}|| = \sqrt[p]{\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x_i|^p},\quad p \in (0,1)$

l) $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{x}\| = |x_1|$

m) $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{z}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^{\frac{1}{2}}\right)^2$

n) $(\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{x}\| = 2|x_1| + \sqrt{3|x_2|^2 + \max(|x_3|, 2|x_4|)^2}$

o) $(\mathcal{P}_n, \|\cdot\|)$, kde $\|Q\| = \left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^{1-p} |a_i|^p\right]^{1/p}$ pre $Q(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

p) $(\mathbb{H}, \|\cdot\|) \approx (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$, kde $\|\mathbf{q}\| = \sqrt{\mathbf{q}\mathbf{q}^*}$, $\mathbf{q} = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$, $\mathbf{q}^* = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k$, pričom platí $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

Príklad 20. *Nájdite vzdialenosť prvku x od množiny A v LNP priestore X, ak*

a) $X = \mathbb{R}$, $x = \sqrt{2}$ a $A = \mathbb{Q}$

b) $X = c$, $x = (2/3, 3/4, 4/5, \dots, k/(k+1), \dots)$ a $A = c_0$

c) $X = C([0,1])$, $x = x(t) = t$ a A je množina koštantných funkcií

d) $X = C([0,1])$, $x = x(t) = t$ a A je množina lineárnych funkcií

e) $X = \mathcal{L}(0,\pi)$, $x = x(t) = \sin t$ a A je množina kvadratických funkcií

f) $X = \ell^2$, $x = (1, 1/4, 1/9, \dots, 1/k^2, \dots)$ a $A = \left\{\mathbf{x} \in \ell^2 : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$

g) $X = \mathcal{L}^1(0,1), x = 1$ a $A = \{f \in \mathcal{L}^1(0,1) : \int_0^1 t f(t)\mathrm{d}t = 0\}$

h) $X = \mathcal{L}^2(0,1)$, $x = x(t) = t^2$ a $A = \left\{f \in \mathcal{L}^2(0,1) : \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$

Príklad 21. *Nech $M = \{f \in C([0,1]) : f(0) = 0\}$, $g = 1$ na $[0,1]$. Nájdite prvky $h \in M$, tak aby $||g - h|| = \operatorname{dist}(g, M)$. s*

Príklad 22. *Nech $p \in [1,\infty)$ a $a_n > 0, n \in \mathbb{N}$. Nájdite nutnú a postačujúcu podmienku na to, aby elipsoid $E = \left\{\mathbf{x} \in \ell^p : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{a_n^p} < 1\right\}$ bol ohraničený (v ℓ^p).*

Literatúra

[1] Bukovský L., The Structure of the Real Line, Monogr. Mat., Springer-Birkhauser, Basel, 2011.

[2] Doboš J., „BABY“ FUNKCIONÁLNA ANALÝZA, elektronický dokument k cvičeniam z Funkcionálnej analýzy, UPJŠ Košice, 2016.

[3] Lovas L., Mezö I., *On an exotic topology of the integers*, http://arxiv.org/abs/1008.0713.

[4] Mojsej I., PRÍKLADY KU PREDMETU MATEMATICKÁ ANALÝZA 2 PRE INFORMATIKOV A FYZIKOV, elektronický dokument k cvičeniam z predmetu ÚMV/MAN3b/10, UPJŠ Košice, 2012.

[5] Šalát T., Metrické priestory, Alfa, Bratislava, 1981.

[6] http://zeus.elf.stuba.sk/Katedry/KM/predmety/ufa/prikl1.pdf.