Séria úloh 3

Metrické priestory: metrika, topologické pojmy, konvergencia, zobrazenia

March 30, 2023

Príklad 1. *Uvažujme nasledujúce funkcie definované pre vhodné dvojice postupností reálnych čísel z intervalu* $[0,1]$*:*

$$d_p(\alpha,\beta) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(k)-\beta(k)|^p}, p \in \mathbb{N},$$

$$d_\infty(\alpha,\beta) = \sup\{|\alpha(k)-\beta(k)|;\ k \in \mathbb{N}\},$$

$$\sigma(\alpha,\beta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}|\alpha(m)-\beta(m)|,$$

$$\rho(\alpha,\beta) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \alpha \neq \beta \wedge n = \min\{k;\ \alpha(k) \neq \beta(k)\} \\ 0 & \textit{ináč.} \end{cases}$$

a) Určte vhodné definičné obory funkcií d_p, d_∞, ρ, σ.

b) Ukážte, že funkcie d_p, d_∞, ρ, σ sú na vhodných množinách metrikami.

c) Zistite, či sú postupnosti $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentné v jednotlivých metrikách, kde $\alpha_n(k) = \frac{1}{2^k}$, $\beta_n(k) = \frac{1}{3^k\sqrt{n}}$, $\gamma_n(k) = \frac{1}{5^k n^k}$, $\xi_n(k) = \frac{n}{6^k}$.

d) Rozhodnite o súvislosti metrického priestoru $({}^{\mathbb{N}}[0,1], \rho)$.

e) Popíšte nekonečne veľa postupností z množiny $B_{d_\infty}(\mathbf{0};\varepsilon) \setminus B_{d_1}(\mathbf{0};\varepsilon)$.

f) Popíšte nekonečne veľa postupností z množiny $B_{d_\infty}(\mathbf{0};\varepsilon) \cap B_{d_1}(\mathbf{0};\varepsilon) \cap B_\sigma(\mathbf{0};\varepsilon) \cap B_\rho(\mathbf{0};\varepsilon)$.

Príklad 2. *Popíšte všetky otvorené gule priestoru* $[1,2]$ *s euklidovskou metrikou.*

Príklad 3. *Ukážte, že ak* X *obsahuje aspoň dva prvky a* d *je diskrétna metrika na* X*, tak* (X,d) *je nesúvislý.*

Príklad 4. *Rozhodnite o súvislosti nasledujúcich metrických priestorov.* $\rho_{\mathbb{E}^n}$ *označuje metriku* n*-rozmerného Euklidovského priestoru.*

a) $(\mathbb{R}^2, \rho_{\mathbb{E}^2})$,

b) $([-1,1], \rho_{\mathbb{E}^1})$

c) $((-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty), \rho_{\mathbb{E}^1})$

d) $\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi), \rho_{\mathbb{E}^1}\right)$

e) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \rho_{\mathbb{E}^1})$

f) $(((0,2) \cup (3,4))^2, \rho_{\mathbb{E}^2})$

g) $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \rho_{\mathbb{E}^2})$

h) $(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}, \rho_{\mathbb{E}^2})$

Príklad 5. *Nech (X,d) je metrický priestor, $A, B \subseteq X$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Ukážte, že nasledujúce tvrdenia sú pravdivé.*

$\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$

$\mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Cl}(B) \subseteq \mathrm{Cl}(A \setminus B)$

$\mathrm{Cl}(\bigcap \mathcal{F}) \subseteq \bigcap\{\mathrm{Cl}(F);\ F \in \mathcal{F}\}$

$\bigcup\{\mathrm{Cl}(F);\ F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathrm{Cl}(\bigcup \mathcal{F})$

$\bigcup\{\mathrm{Int}(F);\ F \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathrm{Int}(\bigcup \mathcal{F})$

$\mathrm{Int}(A) = A \setminus \mathrm{Fr}(A)$

$\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(X \setminus A)$

$\mathrm{Fr}(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$

$\mathrm{Fr}(A) = (A \cap \mathrm{Cl}(X \setminus A)) \cup (\mathrm{Cl}(A) \setminus A)$

$\mathrm{Cl}(A) = A \cup \mathrm{Fr}(A)$

$\mathrm{Fr}(A \cup B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$

$\mathrm{Fr}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Fr}(A) \cup \mathrm{Fr}(B)$

$\mathrm{Int}(A) \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$

$\mathrm{Fr}(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \mathrm{Fr}(A)$

$\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(A))) = \mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(\mathrm{Fr}(A)) \setminus A)$

Príklad 6. *Zistite, ktoré zobrazenia z (X, d_X), resp. $(X, ||\cdot||_X)$ do (Y, d_Y), resp. $(Y, ||\cdot||_Y)$ sú spojité a Lipschitzovsky spojité.*

(a) $f : (\mathbb{R}^2, \rho_{\mathbb{E}^2}) \to (\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1}) : (x,y) \mapsto \arctan(x+y)$

(b) $f : (\mathbb{R}, 1 - \delta_{xy}) \to (\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1}) : x \mapsto f(x)$

(c) $F : (C[0,1], d_\infty) \to (\ell^\infty, d_\infty) :$
$f \mapsto \left(f(1), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{3}\right), \dots\right)$

(d) $f : (\mathbb{Q}, |\frac{1}{\pi - x} - \frac{1}{\pi - y}| + |x-y|) \to (\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1}) :$
$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } x > \pi \\ 0 & \text{if } x < \pi \end{cases}$

(e) $H : (C[a,b], d_\infty) \to (\mathbb{R}, \rho_{\mathbb{E}^1})) : x \mapsto \int_a^b x^2(t)\,\mathrm{d}t$

(f) $D : (C^1[0,1], d_\infty) \to (C[0,1], d_1) : f \mapsto f'$

Príklad 7. *Dokážte, že zobrazenie $f : [1,\infty) \to [1,\infty)$ dané predpisom $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ je kontrakcia.*

Príklad 8. *Nech $a > 0$. Určte najmenšie $b > 0$ tak, aby $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$ bola kontrakcia na (b, ∞).*

Príklad 9. *Pre ktoré λ sa dá použiť Banachova veta o pevnom bode na riešenie integrálnych rovníc.*

a) $f(t) = \lambda \int\limits_0^1 ts^2 f(s)\ \mathbf{d}s + 1$

b) $f(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^2 s^2 f(s)\ \mathbf{d}s + t^3$

c) $f(t) = \lambda \int\limits_0^1 t^m s^m f(s)\ \mathbf{d}s + t$

d) $f(t) = \lambda \int\limits_0^1 \mathbf{e}^{t-s} f(s)\ \mathbf{d}s + 1$

e) $f(t) = \lambda \int\limits_0^1 \cos \pi(t-s) f(s)\ \mathbf{d}s + 1$

Príklad 10. *Zistite, ktoré zobrazenia sú kontrakciami na* X.

(a) $T:\ x \mapsto \sqrt{x},\ X = \mathbb{R}^+$

(b) $T:\ x \mapsto x^2 - x + 1,\ X = [0,1]$

(c) $T:\ x \mapsto x^2,\ X = [0, \frac{1}{3}]$

(d) $T:\ x \mapsto x + \frac{e^x}{1+e^x},\ X = \mathbb{R}$

(e) $T:\ x \mapsto \cos(\cos x),\ X = \mathbb{R}$

(f) $T:\ x \mapsto e^{-x} + x,\ X = \mathbb{R}^+$

(g) $T(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases},\ X = [0, \pi]$

(h) $T:\ x \mapsto \sin(\sin x),\ X = \mathbb{R}$

(i) $T:\ x \mapsto |x| + \frac{1}{1+|x|},\ X = \mathbb{R}$

(j) $T:\ x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N},\ X = (0,1)$

(k) $T:\ (x_1, x_2) \mapsto (ax_1 - cx_2, cx_1 + ax_2),\ (a-1)^2 + c^2 \neq 0,\ X = \mathbb{R}^2$

(l) $T(\mathbf{x}) = (2 + \alpha \sin x_1, \alpha \cos x_2),\ |\alpha| < 1,\ X = \mathbb{R}^2$

(m) $T(0) = 2^{-1},\ T(2^{-n}) = 2^{-n-1},\ X = \{0\} \cup \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$

Príklad 11. *Určte podmienky matice* $\mathbf{A}$, *tak aby* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ *bolo kontraktívne zobrazenie, ak*

(a) $d_\infty(x,y) = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|$

(b) $d_2(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}$

(c) $d_1(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|$

je príslušná metrika v $\mathbb{R}^n$.

References

[1] Šalát T., Metrické priestory, Alfa, Bratislava, 1981.

[2] http://zeus.elf.stuba.sk/Katedry/KM/predmety/ufa/prikl1.pdf.