Séria úloh 4

Lebesgueova miera

April 23, 2023

Príklad 1. *Vypočítajte vonkajšiu Lebesgueovu mieru nasledujúcich množín, kde* $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

a) $\mathbb{N}$

b) $\mathbb{Z}$

c) $\mathbb{Q}$

d) (∞, a)

e) $\{\frac{1}{2^n};\ n \in \mathbb{N}\}$

f) $\{3 + \frac{2}{\ln(n+1)};\ n \in \mathbb{N}\}$

g) $\{\frac{n}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$

h) $\{\frac{1}{n^2+1};\ n \in \mathbb{N}\}$

i) $\{\text{arctg}\,(n+1);\ n \in \mathbb{N}\}$

j) $\{n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$

k) $\{n^3;\ n \in \mathbb{Z}\}$

l) $[a, \infty)$

m) $\{m \in \mathbb{N};\ (\exists n \in \mathbb{N})\ m = 3n\}$

n) $\{m \in \mathbb{N};\ (\exists n \in \mathbb{N})\ m = 1000n\}$

o) $\mathbb{N} \setminus \{m \in \mathbb{N};\ (\exists n \in \mathbb{N})\ m = 2^n\}$

p) $(a, b) \cup \mathbb{N}$

q) $(a, b) \cup \mathbb{Z}$

r) $(a, b) \cup \mathbb{Q}$

s) $\mathbb{R}$

t) (a, b)

u) $[a, b]$

v) $[a, b)$

w) $(a, b]$

x) (a, ∞)

Príklad 2. *Vypočítajte vonkajšiu Lebesgueovu mieru nasledujúcich množín, kde* $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.

a) $(a, b) \cup \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} \{\frac{1}{2^n 2^m}\}$

b) $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \{q + \sqrt{2}\}$

c) $\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \{q + r\pi;\ r \in \mathbb{Q}\}$

d) $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{Q}} \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} \bigcup\limits_{p \in \mathbb{Q}} \{r\pi + p \cdot e + q\sqrt{2}\}$

e) $\bigcup\limits_{r \in \mathbb{R}} \{r + ai;\ a \in [0, 1]\}$

f) $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} ((2n, 2n+1) \cap \mathbb{Q})$

g) $(a, b) \cup \{b + \frac{1}{n+1};\ n \in \mathbb{N}\}$

Príklad 3. *Vypočítajte vonkajšiu Lebesgueovu mieru nasledujúcich množín.*

a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$

b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y+2=0\}$

c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x+y+2=0\} \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$

d) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ \max\{x,y\}=1\}$

e) $[0,1] \times (3,4)$

f) $(a,b) \times (c,d)$

g) $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$

h) $[0,1] \times \mathbb{N}$

i) $\mathbb{Z} \times (a,\infty)$

j) $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$

k) $\{[n, m+\frac{1}{n+1}];\ n,m \in \mathbb{N}\}$

l) $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \setminus (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$

m) $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$

n) $\mathbb{N} \times \{\frac{1}{2^n};\ n \in \mathbb{N}\}$

o) $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Príklad 4. *Vypočítajte vonkajšiu Lebesgueovu mieru nasledujúcich množín, kde $a,b \in \mathbb{R},\ a<b$.*

a) $(a,b) \times [a,b]$

b) $(a,b) \times (a,b]$

c) $(a,b] \times (a,b]$

d) $[a,b] \times (a,b]$

e) $(a,\infty) \times (a,b]$

f) $(a,\infty) \times (-\infty,b]$

g) $\mathbb{R} \times (a,b]$

h) $[a,b) \times \mathbb{R}$

i) $\mathbb{R} \times (a,\infty)$

j) $[a,b) \times \mathbb{R}$

k) $\mathbb{N} \times \{0,1\}$

l) $(0,1) \cup \mathbb{N}$

m) $((0,1) \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$

n) $(0,1) \cup \{-2,-1,1,2\}$

o) $\mathbb{N} \cup \left\{\sqrt{2}+n;\ n \in \mathbb{N}\right\}$

p) $[0,1] \times \mathbb{Z}$

Príklad 5. *Vypočítajte vonkajšiu Lebesgueovu mieru nasledujúcich množín.*

a) $\mathbb{C}$

b) $\{ai;\ a \in \mathbb{R}\}$

c) $\{a+ai;\ a \in \mathbb{R}\}$

d) $\{2+ai;\ a \in \mathbb{R}\}$

Príklad 6. *Vypočítajte vonkajšiu Lebesgueovu mieru nasledujúcich množín, kde $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$.*

a) $(-\infty, a] \cap \mathbb{Q}$

b) $(a, b) \setminus \mathbb{Q}$

c) $[a, b] \setminus \mathbb{Q}$

d) $[a, b) \setminus \mathbb{Q}$

e) $(a, b] \setminus \mathbb{Q}$

f) $(a, \infty) \setminus \mathbb{Q}$

g) $[a, \infty) \setminus \mathbb{Q}$

h) $(-\infty, a) \setminus \mathbb{Q}$

i) $(a, \infty) \cap \mathbb{Q}$

j) $(-\infty, a] \setminus \mathbb{Q}$

k) $[a, \infty) \cap \mathbb{Q}$

l) $(a, b) \cap \mathbb{Q}$

m) $[a, b] \cap \mathbb{Q}$

n) $[a, b) \cap \mathbb{Q}$

o) $(a, b] \cap \mathbb{Q}$

p) $(-\infty, a) \cap \mathbb{Q}$

Príklad 7. *Rozhodnite o Lebesgueovskej merateľnosti množín v predchádzajúcich príkladoch.*

Príklad 8. *Nech X je množina a $\mathcal{A}$ je systém všetkých konečných podmnožín množiny X. Udajte nutnú a postačujúcu podmienku nato, aby $\mathcal{A}$ bol σ-okruh.*

Príklad 9. *Ktoré zo systémov tvoria σ-algebru na $\mathbb{R}$?*

1. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\}$
2. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \ \textit{ je konečná}\}$
3. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \ \textit{ alebo } \ A^c \ \textit{ je konečná}\}$
4. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \ \textit{ alebo} A^c \ \textit{ je spočítateľná}\}$
5. $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \ \textit{ je otvorená}\}$
6. $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A \ \textit{ je otvorená, alebo } \ A \ \textit{ je uzavretá}\}$

Príklad 10. *Zistite, či $\phi : 2^{\mathbb{R}^m} \to \mathbb{R}^*, \quad \psi : 2^X \to \mathbb{R}^*$ je miera.*

1. $\phi(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset, \\ 1, & A \neq \emptyset. \end{cases}$
2. *Pre pevne zvolený bod $a \in \mathbb{R}^m$* $\phi(A) = \begin{cases} 0, & a \notin A, \\ 1, & a \in A. \end{cases}$
3. $\phi(A) = \max(\mu_1(A), \mu_2(A))$, *kde μ_i sú miery na* $\mathbb{R}^m$
4. $\psi(E) = \begin{cases} \mathrm{card} E, & E \ \textit{ je konečná}, \\ \infty, & E \ \textit{ je nekonečná}, \end{cases} \quad X = \mathbb{N}$
5. *Nech $m = 1,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesajúca a zľava spojitá. $\phi_f(\langle a, b)) = f(b) - f(a)$ pre každý interval $\langle a, b) \subset \mathbb{R}$.*
6. $\phi(A) = \int_A \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\, \mathrm{d}x$

Príklad 11. *Nech* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je rad s nezápornými členmi. Na* σ*-algebre* $2^{\mathbb{N}}$ *definujme funkciu takto* $\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n,\ E \in 2^{\mathbb{N}}$. *Ukážte, že* μ *je miera.*