Séria úloh 5

Lebesgueova miera

April 25, 2023

Príklad 1. *Majme funkciu* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *kde*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Je funkcia f *merateľná?*

Príklad 2. *Majme funkciu* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *kde*

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} + 10 & x < 0. \end{cases}$$

Je funkcia g *merateľná?*

Príklad 3. *Majme funkciu* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *kde*

$$h(x) = \begin{cases} \ln |x| & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ -5 & x = 0. \end{cases}$$

Je funkcia h *merateľná?*

Príklad 4. *Zistite, či funkcia* $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$ *je lebesgueovsky merateľná, kde* $A = \{q\mathrm{e};\ q \in \mathbb{Q}\}$ *a*

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & x \in A \cap [-10, 10] \\ 5 & x \in \mathbb{Q} \cap [-10, 10] \\ \lfloor x \rfloor & x \in [-10, 0] \setminus (A \cap \mathbb{Q}) \\ -\frac{1}{x} & \textit{ináč} \end{cases}.$$

Príklad 5. *Zistite, či funkcia* $f : [5, 10] \to \mathbb{R}$ *je lebesgueovsky merateľná, kde* $A = \{q + \sqrt{2};\ q \in \mathbb{Q}\}$ *a*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \in A \cap [5, 10] \\ \frac{1}{x+2} & x \in \mathbb{Q} \cap [5, 10] \\ 20 & x \in [9, 10] \setminus (A \cup \mathbb{Q}) \\ -2^x & \textit{ináč} \end{cases}.$$

Príklad 6. *Ukážte, že* $[x] = \sup\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}$ *je merateľnou funkciou na* $\mathbb{R}$.

Príklad 7. *Vypočítajte nasledujúce integrály.*

a) $\int\limits_{[-10,20]} 5\chi_{\{-1,1\}} + 2\chi_{[1,4]\setminus\mathbb{Q}} + 6\chi_{(-8,-5]}$

b) $\int\limits_{[-20,30]} 2\chi_{\{-10,-9\}} + \chi_{\mathbb{N}\cap[10,15]} + 9\chi_{(-5,8]}$

Príklad 8. *Vypočítajte nasledujúce integrály.*

a) $\int\limits_{M} \arcsin x \qquad M = \{x \in [0,1];\ (\forall i, n \in \mathbb{N})\ x \neq \frac{i}{2^n}\}$

b) $\int\limits_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

Príklad 9. *Vypočítajte nasledujúce integrály.*

a) $\int\limits_{(-1,1)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) $\int\limits_{[-2,0]\setminus\{q\pi:\ q\in\mathbb{Q}\}} \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$

c) $\int\limits_{[0,2]\setminus\mathbb{Q}} \sin\frac{\pi}{x}$

d) $\int\limits_{[-3,-1]\setminus\{\frac{q}{e}:\ q\in\mathbb{Q}\}} \frac{1}{\sqrt{-x^2-4x}}$

Príklad 10. *Vypočítajte integrál* $\int\limits_{[0,1]} g$, *ak*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & (\exists n \in \mathbb{N})\ \frac{1}{2^{n+1}} < x \leq \frac{1}{2^n}, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

Príklad 11. *Vypočítajte nasledujúce integrály.*

a) $\int\limits_{(-1,1)} \frac{\arccos c}{\sqrt{1-c^2}}$

b) $\int\limits_{(0,1)} \frac{1-2c}{\sqrt{c-c^2}}$

c) $\int\limits_{(-1,4)\cap\mathbb{Q}} \frac{1}{\sqrt[5]{a^4}}$

d) $\int\limits_{(-1,1)\setminus\mathbb{Q}} \frac{1}{c^2}$

Príklad 12. *Ukážte, že* $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ x-n, & x > n, \end{cases}$ *konverguje (bodovo) na* $\mathbb{R}$, *ale nekonverguje rovnomerne ani v* $\mathcal{L}^1$ *norme.*

Príklad 13. *Ukážte, že platí.*

a) $e^{-x} \in \mathcal{L}^1(0,\infty)$

b) $\ln x \in \mathcal{L}^1(0,1)$

c) $\frac{1}{\sqrt[4]{1-x^4}} \in \mathcal{L}^1(0,1)$

d) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\, d\lambda_1(x)$ *konverguje*

e) $\frac{1}{\ln x} \in \mathcal{L}^*(0,1) \setminus \mathcal{L}^1(0,1)$

f) $\sin^2 \frac{1}{x} \in \mathcal{L}^1(1,\infty)$

g) $\int_0^\infty x^{1/x}\, d\lambda_1(x) = \infty$

h) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} \in \mathcal{L}^1(0,1)$

i) $\int_0^\infty e^{-x}\sin x\, d\lambda_1(x)$ *konverguje*

j) $\int_0^1 \frac{d\lambda_1(x)}{e^x - \cos x} = \infty$

k) $\frac{x}{x^2+1} \notin \mathcal{L}^*(-\infty,\infty)$

l) $\frac{\cos x}{\sqrt{x}} \notin \mathcal{L}^*(0,\infty)$[a]

[a] Hint: Pre $k \in \mathbb{N}$ platí $x \in \left((2k+1)\frac{\pi}{2}, (2k+3)\frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{1}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$

Príklad 14. *Zistite, pre ktoré hodnoty parametra* $p \in \mathbb{R}$ *konverguje integrál* $\int_I f(x;p)\, d\lambda_1$.

a) $f(x;p) = e^{px}, \quad I = (-\infty, 0)$

b) $f(x;p) = \tan(x)^p, \quad I = (0, \frac{\pi}{2})$

c) $f(x;p) = \frac{\ln(1+x)}{x^p}, \quad I = (0,\infty)$

d) $f(x;p) = \frac{x^p}{\sqrt{1-x^2}}, \quad I = (0,1)$

Príklad 15. *Dokážte, že*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\, d\lambda_1(x) = 0$

b) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\, d\lambda_1(x) = \frac{\pi^2}{6}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^7 \frac{e^{x^3}}{1+nx}\, d\lambda_1(x) = 0$

d) $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\, d\lambda_1(x) = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

Príklad 16. *Vyšetrite konvergenciu integrálov* $(0 < m \leq |\phi(x,y)| \leq M < \infty)$.

a) $\iint\limits_{|x|\leq 1, |y|\leq 1, x^2 \neq y} \frac{x^4 - y^2}{x^2 - y}\, d\lambda_2$

b) $\iint\limits_{|x|\leq 1, y\leq 1} \arctan(x^2+y^2)\, d\lambda_2$

c) $\iint\limits_{|x|+|y|\geq 1} \frac{1}{|x|^p + |y|^q}\, d\lambda_2, \ p,q > 0$

d) $\iint\limits_{x+y\geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p}\, d\lambda_2$

e) $\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} e^{-1/(x^2+y^2+z^2)}\, d\lambda_3$

f) $\iint\limits_{0\leq x\leq y} e^{-x-y}\, d\lambda_2$

g) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\cos(x^2+y^2)\, d\lambda_2$

h) $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{|x|}{(1+y^2+x^2)^2}\, d\lambda_2$

i) $\iint_{x^2+y^2\leq 1} \frac{\phi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\, d\lambda_2$

j) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 e^{-1/(x_1^2+\cdots+x_n^2)}\, d\lambda_n$

Príklad 17. *Nech* $A = [0,1]^2$, *vypočítajte*

$\int_A f(x,y)\, d\lambda_2(x,y), \quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\, d\lambda_1(x)\, d\lambda_1(y) \quad \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\, d\lambda_1(y)\, d\lambda_1(x)$, *kde*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in, \\ 1, & x \in \wedge y \in, \\ 1 - 1/q, & y \in \wedge x = p/q, \quad \textit{kde} \quad p,q \quad \textit{sú nesúdeliteľné.} \end{cases}$$

Príklad 18. *Nájdite množinu $A \subset \mathbb{R}^2$, pre ktorú platí*

$$\int_A xy \,\mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \int_0^{f(y)} xy \,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y),$$

kde $f(y) = \min(1, \ln(1/y))$.

Príklad 19. *Preveďte nasledujúce integrály na jednoduché, ak $f \in C(\Omega)$.*

a) $\iint\limits_{\Omega} f(x+y)\,\mathrm{d}\lambda_2, \quad \Omega : |x| + |y| \leq 1$

b) $\iint\limits_{\Omega} f(xy)\,\mathrm{d}\lambda_2, \quad \Omega : xy = 1,\ xy = 2,\ y = x,\ y = 4x$

Príklad 20. *Vypocítajte integrály na množine Ω.*

a) $\iint\limits_{\Omega} xy^2\,\mathrm{d}\lambda_2, \quad \Omega : \quad y^2 = 2px, \quad x = p/2, \quad p > 0$

b) $\iint\limits_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{2a-x}}\,\mathrm{d}\lambda_2, \quad \Omega : \quad y = x = 0, \quad x = 0, \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$

c) $\iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2, \quad \Omega : \quad \pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2$

d) $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{\lfloor y - x^2 \rfloor}\,\mathrm{d}\lambda_2, \quad \Omega : \quad x^2 \leq y \leq 4$

e) $\iint\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \Omega : \quad x^2 + y^2 \leq x$

Príklad 21. *Spočítajte obsahy rovinných plôch (ohraničených krivkami).*

a) $x^2 + y^2 \geq a^2,\ (x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

b) $y^2 = 2px + p^2,\ y^2 = -2qx + q^2,\ p, q > 0$

c) $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2, \quad x, y > 0$

d) $xy = a^2,\ xy = 2a^2,\ y = x,\ y = 2x, \quad x, y > 0$

Príklad 22. *Nájdite*

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\pi\rho} \iint\limits_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2,$$

kde f je spojitá funkcia.

Príklad 23. *Spočítajte obsah rovinnej plochy (ohraničených krivkami).*

$$\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$$

Hint: zovšeobecnené polárne súradnice

Príklad 24. *Spočítajte obsah rezu plochy $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ rovinou $x + y + z = 0$.*

Príklad 25. *Určte tvary a rozmery telies, ktorých objemy sú dané takto:*

a) $\iint\limits_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} x + y\,\mathrm{d}\lambda_2$

b) $\iint\limits_{|x|+|y| \leq 1} x^2 + y^2\,\mathrm{d}\lambda_2$

c) $\iint\limits_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy}\,\mathrm{d}\lambda_2$

d) $\iint\limits_{x^2+y^2 \leq 1} \sin\pi\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\lambda_2$

Príklad 26. *Spočítajte objemy telies (ohraničených plochami).*

a) $z^2 = xy \quad x^2 + y^2 = a^2$

b) $z = x^2 + y^2, \quad z = x + y$

c) $z = xy, \quad x^2 = y, \quad x^2 = 2y, \quad y^2 = x, \quad y^2 = 2x, \quad z = 0$

d) $z = \sin \frac{\pi y}{2x}, \quad z = 0, \quad y = x, \quad y = 0, \quad x = \pi$

e) $z = xy, \quad z = 0, \quad x + y + z = 1$

f) $z = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2$

Príklad 27. *Spočítajte obsah časti torusu vymedzenej dvoma poludníkmi* (ϕ_1, ϕ_2) *a dvoma rovnobežkami* (ψ_1, ψ_2)*. Aký je celkový povrch?*

Príklad 28. *Spočítajte povrchy priestorových plôch.*

a) $x^2 + z^2 = a^2, \quad y^2 + z^2 = a^2$

b) $z^2 = 2xy, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$

c) $(x^2 + y^2)^{3/2} + z = 1, \quad z = 0$

d) $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{3}, \quad x + y + z = 2a, \quad a > 0$

Príklad 29. *Vypočítajte hmotnosť štvorcovej doštičky o veľkosti strany* a*, ak je hustota doštičky v každom jej bode priamo úmerná vzdialenosti tohto bodu od najbližšieho vrcholu a je rovná* ρ_0 *v strede štvorca.*

Príklad 30. *Nájdite súradnice ťažiska kruhovej dosky s polomerom* a*, ak jej hustota je priamo úmerná vzdialenosti od bodu* $(a, 0)$*.*

Príklad 31. *Guľa o polomere* a *je ponorená do tekutiny o konštanenj hustote* ρ *do hĺbky* $h \geq a$ *(od stredu gule). Vypočítajte tlakovú silu tekutiny na vrchnej a spodnej časti povrchu gule.*

Príklad 32. *Určte príťažlivú silu homogénneho valca* $x^2 + y^2 \leq a^2, \ 0 \leq z \leq h$*, ktorá pôsobí na bod* $(0, 0, b)$*, ak je hmotnosť valca rovná* M *a hmotnosť bodu* m*.*

Príklad 33. *Vypočítajte momenty zotrvačnosti* I_x, I_y *homogénnej dosky (ohraničenej krivkami).*

a) $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$

b) $xy = a^2, \quad xy = 2a^2, \quad x, y, a > 0$

c) $r = a(1 + \cos \phi), \ \phi \in [0, 2\pi]$

Príklad 34. *Vypočítajte integrály na množine* Ω *(ohraničenej plochami).*

a) $\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3 \,\mathrm{d}\lambda_3, \quad \Omega: \quad z = xy, \quad y = x, \quad x = 1, \quad z = 0, \quad y = 0$

b) $\iiint\limits_{\Omega} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \,\mathrm{d}\lambda_3, \quad \Omega: \quad x + z + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$

c) $\iiint\limits_{\Omega} \mathrm{e}^{-P(x_1,x_2,x_3)} \,\mathrm{d}\lambda_3, \quad \Omega = \mathbb{R}^3$ *a* $P(x_1, x_2, x_3) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j$ *je poz. definitná kvadratická forma*

d) $\iiint\limits_{\Omega} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\lambda_3, \quad \Omega: \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad z = 2$

Príklad 35. *Rozdelenie tlaku telesa na plochu prítlaku* $x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$ *je dané vzťahom* $p = p_0(1 - x^2/a^2 - y^2/b^2)$*. Určite stredný tlak telesa na túto plochu.*

Príklad 36. *Vypočítajte objemy telies (ohraničených plochami).*

a) $z = x + y, \quad z = xy, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$

b) $z = 6 - x^2 + y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$

c) $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$

d) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 = b^2, \quad x^2 + y^2 = z^2, \quad z \geq 0, \ 0 < a < b$

e) $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^4/c^4 = 1$

Príklad 37. *Vypočítajte moment zotrvačnosti homogénneho valca* $x^2 + y^2 \leq a^2, \quad z = \pm h$ *o hustote* ρ_0 *vzhľadom k priamke* $x = y = z$.

Príklad 38. *Vypočítajte súradnice ťažiska kocky* $0 \leq x, y, z \leq 1$ *pri hustote* $\rho(x, y, z) = x^{\frac{2a-1}{1-a}} y^{\frac{2b-1}{1-b}} z^{\frac{2c-1}{1-c}}, \quad a, b, c \in (0, 1)$.

Príklad 39. *Vypočítajte potenciál dutej gule* $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ *v bode* (x, y, z), *ak jej hustota je* $\rho = f(R)$, *kde* $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ *a* f *je integrovateľná funkcia.*

Príklad 40. *Spočítajte objem* $m-$*rozmernej gule.*

Príklad 41. *Spočítajte integrály.*

a) $\displaystyle\iint\limits_{xy\geq 1, x\geq 1} x^{-p} y^{-q} \,\mathrm{d}\lambda_2, \ p > q > 1$

b) $\displaystyle\iint\limits_{\substack{x+y\geq 1\\ 0\leq x\leq 1}} (x + y)^{-p} \,\mathrm{d}\lambda_2, \ p > 1$

c) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \,\mathrm{d}\lambda_2$

d) $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\leq x} \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{(x^2+y^2+z^2)^3}$

f) $\displaystyle\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$

g) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\lambda_3}{x^p y^q z^r}$

h) $\displaystyle\iiint\limits_{\substack{x,y,z\geq 0\\ x^2+y^2+z^2\leq r^2}} \frac{xyz \,\mathrm{d}\lambda_3}{\sqrt{a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2}}, a > b > c > 0$

Príklad 42. *Spočítajte integrály.*

a)

$$\int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \,\mathrm{d}\lambda_n$$

b)

$$\iint\limits_{\substack{x_i\geq 0, \ i=1,\ldots,n\\ x_1+x_2+\cdots+x_n\leq 1}} \cdots \int \sqrt{x_1 + x_2 + \cdots + x_n} \,\mathrm{d}\lambda_n$$