Séria úloh 6

Algebry, miery, Lebesgueova-Stieltjesova miera

May 9, 2023

Príklad 1. *Nech X je množina a $\mathcal{A}$ je systém všetkých konečných podmnožín množiny X. Udajte nutnú a postačujúcu podmienku nato, aby $\mathcal{A}$ bol σ-okruh.*

Príklad 2. *Ktoré zo systémov tvoria σ-algebru na $\mathbb{R}$?*

a) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : 0 \in A\}$

b) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je konečná}\}$

c) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ alebo } A^c \text{ je konečná}\}$

d) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ alebo} A^c \text{ je spočítateľná}\}$

e) $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ je otvorená}\}$

f) $\mathcal{F} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ je otvorená, alebo } A \text{ je uzavretá}\}$

Príklad 3. *Nech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je rad s nezápornými členmi. Na σ-algebre $2^{\mathbb{N}}$ definujme funkciu takto $\mu(E) = \sum_{n \in E} a_n$, $E \in 2^{\mathbb{N}}$. Ukážte, že μ je miera.*

Príklad 4. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou, $A \subseteq B \subseteq X$ a $\mu(A) < +\infty$. Ukážte, že $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

Príklad 5. *Nech $(X, \mathcal{B}, \mu)$ je priestor s mierou, $\langle E_i;\ i \in \mathbb{N}\rangle$ je postupnosť podmnožín X.*

a) *Ak $\mu(E_1) < +\infty$ a $E_{i+1} \subseteq E_i$ pre každé $i \in \mathbb{N}$. Ukážte, že $\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{k \to +\infty} \mu(E_k)$. (Čiže vyriešte cvičenie 4.6 (8) v [2].)*

b) *Ak $\mu(E_i) < +\infty$ a $E_i \subseteq E_{i+1}$ pre každé $i \in \mathbb{N}$. Ukážte, že $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{k \to +\infty} \mu(E_k)$.*

Nech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Pre jednoduchšie vyjadrovanie budeme označovať, za predpokladu, že existujú, $\alpha(a+) := \lim_{x \to a+} \alpha(x)$ a $\alpha(a-) := \lim_{x \to a-} \alpha(x)$.

Príklad 6. *Nech* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesajúca funkcia,* $a < b < c$. *Ukážte, že nasledujúce tvrdenia sú pravdivé.*

a) *Existujú* $\alpha(d-)$ *a* $\alpha(d+)$ *pre ľubovoľné* $d \in \mathbb{R}$.

b) $\alpha(a-) \leq \alpha(a) \leq \alpha(a+) \leq \alpha(b-) \leq \alpha(b) \leq \alpha(b+) \leq \alpha(c-) \leq \alpha(c) \leq \alpha(c+)$.

Príklad 7. *Nech* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesajúca funkcia,* $a \in \mathbb{R}$. *Vyjasnite vzťah hodnôt* $\alpha(a-)$ *a* $\alpha(a+)$ *k nasledujúcim pojmom.*

a) Spojitosť zľava. b) Spojitosť sprava. c) Spojitosť.

Nech $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neklesajúca funkcia. Na merateľnom priestore $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ existuje tzv. Lebesgueova-Stieltjesova miera definovaná ako $\mu_\alpha((a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a+)$ pre $a < b$.

Príklad 8. *Nech* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je neklesajúca funkcia,* $a < b$. *Ukážte nasledujúce vzorce pre výpočet hodnôt miery* μ_α.

a) $\mu_\alpha((a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a+)$ b) $\mu_\alpha([a,b)) = \alpha(b-) - \alpha(a-)$ c) $\mu_\alpha([a,b]) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$

d) $\mu_\alpha(\{a\}) = \alpha(b+) - \alpha(a-)$

Príklad 9. *Nech* $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & 1 \leq x < 2 \\ 3 & x = 2 \\ x + 2 & 2 < x \end{cases}.$$

Vypočítajte mieru μ_h *nasledujúcich množín.*

a) $\mu_h([1,2])$ b) $\mu_h((1,2])$ c) $\mu_h([1,2))$

d) $\mu_h((1,2))$ e) $\mu_h([2,3])$ f) $\mu_h((2,3))$

g) $\mu_h(\{2\})$ h) $\mu_h((-1,3))$ i) $\mu_h([-8,\frac{1}{2}])$

j) $\mu_h([2,+\infty))$ k) $\mu_h(\mathbb{R})$ l) $\mu_h((-\infty,2])$

m) $\mu_h(\{-1\})$ n) $\mu_h(\{1\})$ o) $\mu_h(\{4\})$

p) $\mu_h([-2,1))$ q) $\mu_h([-2,1])$ r) $\mu_h([\frac{1}{2},\frac{3}{2}])$

s) $\mu_h([1,+\infty))$ t) $\mu_h([-2,-1])$ u) $\mu_h([\frac{3}{2},\frac{5}{2}])$

Príklad 10. *Nech* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je zľava spojitá neklesajúca funkcia,* $a < b$*. Vypočítajte nasledujúce hodnoty miery* μ_α*.*

a) $\mu_\alpha((a, b])$ b) $\mu_\alpha([a, b))$ c) $\mu_\alpha([a, b])$

d) $\mu_\alpha(\{a\})$ e) $\mu_\alpha((a, b))$

Príklad 11. *Nech* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je sprava spojitá neklesajúca funkcia,* $a < b$*. Vypočítajte nasledujúce hodnoty miery* μ_α*.*

a) $\mu_\alpha((a, b])$ b) $\mu_\alpha([a, b))$ c) $\mu_\alpha([a, b])$

d) $\mu_\alpha(\{a\})$ e) $\mu_\alpha((a, b))$

Príklad 12. *Nech* $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je spojitá neklesajúca funkcia,* $a < b$*. Vypočítajte nasledujúce hodnoty miery* μ_α*.*

a) $\mu_\alpha((a, b])$ b) $\mu_\alpha([a, b))$ c) $\mu_\alpha([a, b])$

d) $\mu_\alpha(\{a\})$ e) $\mu_\alpha((a, b))$

Príklad 13. *Nech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 3 - \mathrm{e}^{-x} & 0 < x \end{cases}.$$

Vypočítajte mieru μ_f *nasledujúcich množín.*

a) $\mu_f([0, 1])$ b) $\mu_f((-1, 1))$ c) $\mu_f(\{0\})$

d) $\mu_f((0, 1))$ e) $\mu_f((-\infty, 1))$ f) $\mu_f((0, \infty))$

g) $\mu_f([0, \infty))$ h) $\mu_f([-1, 1))$ i) $\mu_f((2, 3))$

Príklad 14. *Nech* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ 4 & 1 \leq x < 2 \\ 6 & 2 \leq x \end{cases}.$$

Vypočítajte mieru μ_φ *nasledujúcich množín.*

a) $\mu_\varphi([-1,2])$ b) $\mu_\varphi((1,+\infty))$ c) $\mu_\varphi((-\infty,4))$

d) $\mu_\varphi((0,2])$ e) $\mu_\varphi(\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right))$ f) $\mu_\varphi([1,3])$

g) $\mu_\varphi((1,3))$ h) $\mu_\varphi((-5,5))$ i) $\mu_\varphi([3,4))$

Príklad 15. *Majme merateľný prietor* $(\mathbb{R},\mathbb{B})$. *Ukážte, že* $\mathbb{B}$ *je najmenšia* σ*-algebra nad nasledujúcimi systémami množín.*

a) $\{(a,b)\subseteq\mathbb{R};\ a<b\}$ b) $\{(a,b)\subseteq\mathbb{R};\ a<b\wedge a,b\in\mathbb{Q}\}$ c) $\{[a,b)\subseteq\mathbb{R};\ a<b\}$

d) $\{(a,b]\subseteq\mathbb{R};\ a<b\}$ e) $\{[a,b]\subseteq\mathbb{R};\ a<b\}$ f) $\{(a,b)\subseteq\mathbb{R};\ a<b\}$

g) $\{(a,b)\cup\{c\}\subseteq\mathbb{R};\ a<b<c\}$ h) $\{(-\infty,b)\subseteq\mathbb{R};\ b\in\mathbb{R}\}$ i) $\{(a,\infty)\subseteq\mathbb{R};\ a\in\mathbb{R}\}$

Príklad 16. *Ukážte, že množiny zo Série úloh 4 sú borelovské.*

References

[1] Carter M., van Brunt B., The Lebesgue-Stieltjes Integral, A Practical Introduction, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Nelson G.S., *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration*, American Mathematical Society, Dordrecht 2015.

[3] Neubrunn T., Vybrané partie z matematiky IV., Teória miery a integrálu, Vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 1978.