Séria úloh 7

Integrál: Lebesgueov-Stieltjesov integrál, Lebesgueov integrál na súčine

May 9, 2023

Príklad 1. *Spočítajte integrály.*

1. $\int\limits_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mu(x)$, *kde* $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ *je miera taká, že* $\mu(\{\frac{1}{n}\}) = \frac{1}{n}$ *a* $\mu(E) = 0$, *ak* $E \cap \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}_0} = \emptyset$
2. $\int\limits_{\mathbb{R}} (x^2 + 3)\chi_{[0,2]}(x) \,\mathrm{d}\mu(x)$, *kde* $\mu : 2^{\mathbb{R}} \to [0, +\infty]$ *je ščítacia miera, tj.*

$$\mu(A) = \begin{cases} |A| & A \text{ je konečná} \\ +\infty & A \text{ je nekonečná} \end{cases}$$

3. $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ix} \,\mathrm{d}\mu(x)$, *kde* μ *je komplexná miera* $\mathrm{d}\mu(x) = (\cos(x) + i\sin(x))\,\mathrm{d}x$
4. $\mathrm{E}[X] = \int_\Omega X \,\mathrm{d}F = \int_\Omega X(\omega)F(\mathrm{d}\omega)$, *kde* F *je distribučná funkcia exponenciálneho rozdelenia, tj.* $F(x;\lambda) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$

Príklad 2. *Nech* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}.$$

Vypočítajte $\int_{\langle 2,3\rangle} x^2 \,\mathbf{d}\varphi$.

Príklad 3. *Nech* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 3 - \mathrm{e}^{-x} & 0 < x \end{cases}.$$

Vypočítajte $\int_{\langle 0,\infty)} \mathrm{e}^x \,\mathbf{d}f$.

Príklad 4. *Nech* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$\varphi(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ x + 1 & 0 < x \end{cases}.$$

a $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *predpisom*

$$f_1(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}.$$

Vypočítajte $\int_{\langle 1,3\rangle} f_1 \,\mathbf{d}\varphi$ *a* $\int_{\langle 1,3\rangle} f_2 \,\mathbf{d}\varphi$.

Príklad 5. *Nech* $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \\ 4 & 1 < x \leq 2 \\ 6 & 2 \leq x \end{cases}.$$

Vypočítajte $\int_{\langle 0,3)} x^2 \; \mathbf{d}\psi$.

Príklad 6. *Nech* $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *je funkcia definovaná predpisom*

$$\xi(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{3x} & x \leq 0 \\ 2 & 0 < x \leq 1 \\ 2x+1 & 1 < x \end{cases}$$

a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-2x} & x \leq 1 \\ x & 1 < x \end{cases}.$$

Vypočítajte $\int_I f \; \mathbf{d}\xi$, *ak*

a) $I = (-1, 0)$ b) $I = \langle -1, 0\rangle$ c) $I = (-1, 1)$ d) $I = (-1, 1\rangle$

e) $I = \langle 1, 3\rangle$ f) $I = (-\infty, 0)$

Príklad 7. *Vypočítajte nasledujúce integrály.*

a) $\int_{\langle 0,5\rangle} (x^2+1) \; \mathbf{d}\lfloor x \rfloor$ b) $\int_{\langle 0,5\rangle} \mathrm{e}^x \; \mathbf{d}(x + \lfloor x \rfloor)$

c) $\int_{\langle \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\rangle} \lfloor x \rfloor \; \mathbf{d}\lfloor 2x \rfloor$ d) $\int_{\langle \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\rangle} \lfloor 2x \rfloor \; \mathbf{d}\lfloor x \rfloor$

Príklad 8. *Vypočítajte nasledujúce integrály.* ℓ_2 *označuje Lebesgueovu mieru na rovine.*

a) $\displaystyle\int\limits_{[0,\pi]^2 \setminus \mathbb{Q}^2} \sin^2 x \sin^2 y \; \mathbf{d}\ell_2(x,y)$ b) $\displaystyle\int\limits_{([1,2]\times[0,2])\setminus(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})} xy^2 \; \mathbf{d}\ell_2(x,y)$

c) $\displaystyle\int\limits_{([2,3]\times[1,2])\setminus(\left\{\frac{7}{2}\right\}\times\mathbb{R})} \frac{1}{(1-xy)^2} \; \mathbf{d}\ell_2(x,y)$ d) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]^2\setminus(\mathbb{R}\times\mathbb{Q})} \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)^3}} \; \mathbf{d}\ell_2(x,y)$

Príklad 9. *Vypočítajte nasledujúce integrály. ℓ_2 označuje Lebesgueovu mieru na rovine.*

a) $\int\limits_D \left(x + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) \,\mathbf{d}\ell_2(x,y)$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \le 2, 1 \le y \le \mathrm{e}^x\} \setminus \mathbb{Q}^2$

b) $\int\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \,\mathbf{d}\ell_2(x,y)$ $\quad D$ je ohraničená krivkami $y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $y = 2$, $x = 0$

c) $\int\limits_D (x^2 + y^2) \,\mathbf{d}\ell_2(x,y)$ $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4, |x| \le y\} \setminus (\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$

Príklad 10. *Vypočítajte Lebesgueovu mieru množiny D.*

a) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je ohraničená krivkami $x + y = 4$, $x + y = 12$, $y^2 = 2x$.

b) $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je ohraničená plochami $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 4$, $z = 0$.

c) $D \subseteq \mathbb{R}^3$ je ohraničená plochami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

d) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je ohraničená krivkami $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$.

Príklad 11. *Vyjadrite integrál $\int\limits_D f(x,y) \,\mathbf{d}\ell_2(x,y)$ ako dvojnásobný. Predpokladáme, že f je spojitá na množine D. ℓ_2 označuje Lebesgueovu mieru na rovine.*

a) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

b) $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$.

Príklad 12. *Vyjadrite integrál $\int\limits_D f(x,y,z) \,\mathbf{d}\ell_3(x,y,z)$ ako trojnásobný. Predpokladáme, že f je spojitá na D, kde D je množina ohraničená rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = 1$, $2y + z = 2$. Zvoľte nasledujúce poradie integrovania. ℓ_3 označuje Lebesgueovu mieru na množine $\mathbb{R}^3$.*

a) z, y, x $\qquad$ b) y, z, x $\qquad$ c) x, y, z

Príklad 13. *Nech $A = [0,1]^2$, vypočítajte*

$\int_A f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$, $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$ $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$, *kde*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & x \in \mathbb{Q} \wedge y \in \mathbb{I}, \\ 1 - 1/q, & y \in \mathbb{Q} \wedge x = p/q, \quad \textit{kde} \ \ p,q \ \ \textit{sú nesúdeliteľné}. \end{cases}$$

Príklad 14. *Nájdite množinu* $A \subset \mathbb{R}^2$*, pre ktorú platí*

$$\int_A xy \, \mathrm{d}\lambda_2(x,y) = \int_0^1 \int_0^{f(y)} xy \, \mathrm{d}\lambda_1(x) \, \mathrm{d}\lambda_1(y),$$

kde $f(y) = \min(1, \ln(1/y))$.

References

[1] Carter M., van Brunt B., The Lebesgue-Stieltjes Integral, A Practical Introduction, Springer-Verlag, New York, 2000.

[2] Neubrunn T., Vybrané partie z matematiky IV., Teória miery a integrálu, Vysokoškolské skriptá, Univerzita Komenského v Bratislave, Bratislava, 1978.