Lebesgueov-Stieltjesov integrál

T. J. Stieltjes (1856–1894) zaviedol prirodzené zovšeobecnenie Riemannovho integrálu pre ohraničenú funkciu f pomocou váhovej (neklesajúcej) funkcie g ako limitu súm

$$\sum f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1}))$$

kde, $x_0, x_1, \ldots, x_n$ je delenie príslušného intervalu ah $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Na existenciu integrálu na intervale $[a, b]$ stačí napr. aby f bola monotónna a g neklesajúca a spojitá, alebo f spojitá a g neklesajúca, alebo f spojitá a g má ohraničenú variáciu.

Nech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je **nezáporná** funkcia a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zasa monotónna a **sprava-spojitá**[1] Definujme $w((s, t]) = g(t) - g(s)$ a $w(s) = 0,\ s, t \in [a, b]$, potom existuje jediná miera λ_g na $[a, b]$, tzv. Lebesgueova–Stieltjesova miera asociovaná s g, pre ktorú $\lambda_g(I) = w(I)$ pre ľubovoľný interval. Tá vznikne rozšírením vonkajšej miery definovanej ako

$$\mu_g(E) = \inf\left\{\sum_i \mu_g(I_i) \ :\ E \subset \bigcup_i I_i\right\},$$

kde I_i zľava otvorený interval.

Lema 14.1.20 (Hodnoty Lebesgueovej–Stieltjesovej miery)**.**

Ak $a < b$ tak

- $\lambda_g((a, b]) = g(b^+) - g(a^+) = g(b) - g(a)$
- $\lambda_g((a, b)) = g(b^-) - g(a^+) = g(b^-) - g(a)$
- $\lambda_g([a, b]) = g(b^+) - g(a^-) = g(b) - g(a^-)$
- $\lambda_g([a, b)) = g(b^-) - g(a^-)$
- $\lambda_g(\{a\})) = g(a^+) - g(a^-) = g(a) - g(a^-)$
- $\lambda_g((a, a)) = \lambda_g(\emptyset) = 0$

[1] Alebo aj f je merateľná, ohraničená a g sprava-spojitá, s ohraničenou variáciou.

Lebesgueov–Stieltjesov integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$$

je definovaný ako Lebesgueov integrál funkcie f vzhľadom na mieru λ_g, teda $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\lambda_g(x)$.

Veta 14.1.21.

Ak g je rastúca, potom

- pre $a_j \in \mathbb{R}$ platí

$$\int_I \sum_{j=1}^n a_j f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^n a_j \int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

  ak pravá strana existuje.

- pre po dvoch disjunktné intervaly a $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, platí

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^n \int_{I_j} f(x)\,\mathrm{d}g(x),$$

  ak aspoň 1 z integrálov existuje.

- Pre $g(x) = \sum_{j=1}^n c_j g_j(x), c_j \geq 0,\ g_j$ rastúce, platí

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \sum_{j=1}^n c_j \int_I f(x)\,\mathrm{d}g_j(x),$$

  ak pravá strana existuje.

- Ak $f \leq h$ na I, potom $\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) \leq \int_I h(x)\,\mathrm{d}g(x)$, ak sú integrály definované.
- Ak $f = h$ s.v. (v zmysle miery μ_g) na I, potom $\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_I h(x)\,\mathrm{d}g(x)$, ak aspoň 1 z integrálov existuje.

Veta 14.1.22.

- Ak g je rastúca a spojitá v a, potom, ak aspoň 1 z integrálov existuje platí
  a) $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$
  b) $\int_{[a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$
- Ak g je rastúca a spojitá v b, potom, ak aspoň 1 z integrálov existuje platí
  a) $\int_{[a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{[a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$
  b) $\int_{(a,b]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{(a,b)} f(x)\,\mathrm{d}g(x)$
- Pre každý interval I platí $\int_I 1\,\mathrm{d}g(x) = \lambda_g(I)$.
- Ak g je konštantná na otvorenom intervale I, potom $\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$
- $\int_{[a,a]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{\{a\}} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(a)\,[g(a^+) - g(a^-)]$
- Ak g je diferencovateľná na otvorenom intervale I, potom

$$\int_I f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_I f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$$

  ak aspoň 1 z integrálov existuje

Príklad 14.1.23.

Majme funkciu $g(x) = \begin{cases} x, & x < 0, \\ x+1, & x \geq 0, \end{cases}$ a funkciu $f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

Počítajme

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_{[-1,0)} f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_{[0,0]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) + \int_{(0,1]} f(x)\,\mathrm{d}g(x) =$$

$$= \int_{-1}^{0} x\,\mathrm{d}x + f(0)(g(0^+) - g(0^-)) + \int_{0}^{1} x\,\mathrm{d}x = -1/2 + 1(1-0) + 1/2 = 1.$$