

Matematická analýza FRP

(prezentácia k prednáške MANb/19)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.¹

¹ondrej.hutnik@upjs.sk

umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb.html

Prednáška 19

22. apríla 2024

Spojitosť funkcie v bode a „bod po bode“

Definícia – spojitost' funkcie v bode

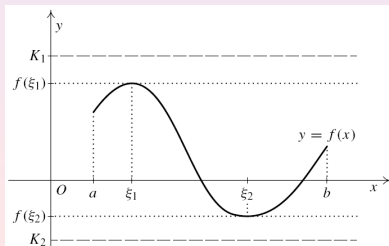
Hovoríme, že funkcia f je **spojitá v bode** $x_0 \in D_f$, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f) [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Definícia – spojitost' funkcie na množine

Hovoríme, že funkcia f je **spojitá na množine** $M \subseteq D_f$ (píšeme $f \in \mathcal{C}(M)$), akk f je spojitá v každom bode množiny M .

Kvantifikovane: $f \in \mathcal{C}(M) \Leftrightarrow (\forall x_0 \in M)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f) [|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon]$



...it is *widely believed* ... that the intermediate value property is, in fact, equivalent to continuity...

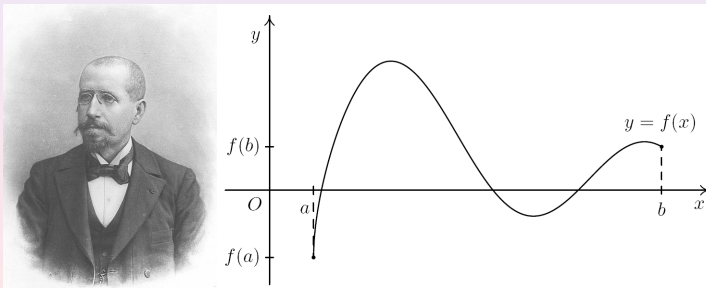
Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Definícia – darbouxovská vlastnosť

Hovoríme, že funkcia **f je darbouxovská na $M \subseteq D_f$** , akk pre každé $a, b \in M$ a každé y medzi $f(a)$ a $f(b)$ existuje $\xi \in (a, b)$ také, že $f(\xi) = y$.

Veta (Darbouxova, 1875)

Každá spojitá funkcia na uzavretom intervale je na ňom darbouxovská.



JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

...it is *widely believed* ... that the intermediate value property is, in fact, equivalent to continuity...

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Veta (Darbouxova, 1875)

Spojité funkcia na uzavretom intervale je na ňom darbouxovská.

- opačná implikácia **neplatí**, napr.

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

je darbouxovská na \mathbb{R} , ale nie je spojitá v $x_0 = 0$;

- prekvapujúco, existujú **surjektívne** funkcie na každom neprázdnom otvorenom intervale, ktoré **nie sú spojité v žiadnom bode!** (pozri <http://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/surjective.pdf>)
- **postačujúce** podmienky pre spojitosť darbouxovskej funkcie? Napr. jedna z nich je, aby darbouxovská funkcia bola prostá (pozri H. SOHRAB, *Basic Real Analysis*. Birkhäuser Boston, 2003).
- dá sa ukázať, že Darbouxova veta **je ekvivalentná** s Axiómou o hornej hranici!!!

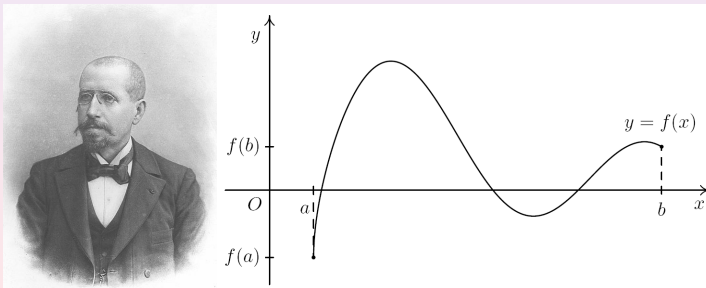
...it is *widely believed* ... that the intermediate value property is, in fact, equivalent to continuity...

Darboux: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (1875)

Dôsledok

Nech $f \in \mathcal{C}(M)$, kde M je interval. Potom

- (i) ak $M = \langle a, b \rangle$, tak f nadobúda každú hodnotu medzi $\max_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ a $\min_{x \in \langle a, b \rangle} f(x)$ aspoň v jednom bode intervalu (a, b) ;
- (ii) $N = \{y = f(x); x \in M\}$ je jednoprvková množina alebo interval.



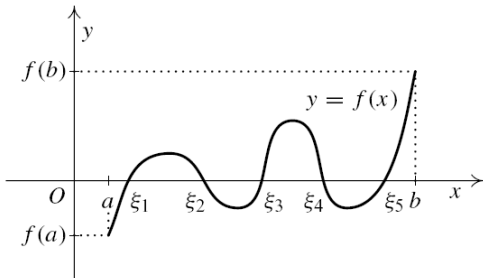
JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

This theorem has been known for a long time...

Lagrange: *Oeuvres*, vol. 8 (1807), p. 19, see also p. 133

Veta (Bolzanova, 1817)

Nech $f \in \mathcal{C}\langle a, b \rangle$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom $(\exists \xi \in (a, b)) f(\xi) = 0$.



BERNARD BOLZANO (1781–1848)

✠ konštruktívny dôkaz Bolzanovej vety

<http://umv.science.upjs.sk/analyza/texty/predmety/MANb/Bolzano.pdf>

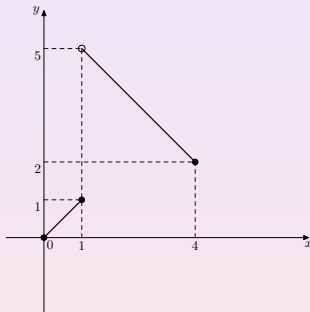
✠ metóda bisekcie prakticky

<https://invimath.fri.uniza.sk/images/slides/animacie2d/prikladbisekcia.pdf>

Spojitost' a d'alšie vlastnosti funkcií

Zopakovanie – FRPa

Ak f je rýdzomonotónna na $M \subseteq D_f$, tak f je injektívna na M .



Čo je potrebné pridať k injektívnosti, aby sme dostali rýdzomonotónnosť???

Veta V.12

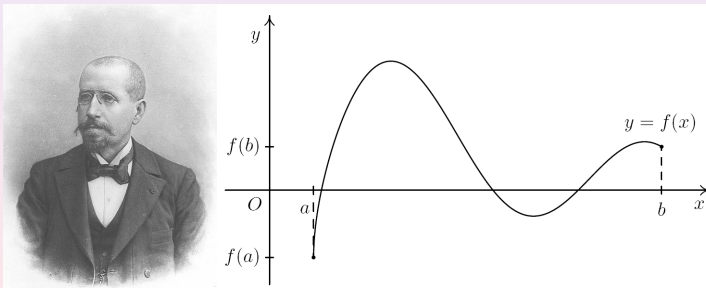
Ak f je injektívna a spojitá na intervale M , tak f je rýdzomonotónna na M .

Dôsledok = FRPa + Veta V.12

Nech $f \in \mathcal{C}(M)$, kde M je interval. Potom f je injektívna na M práve vtedy, keď f je rýdzomonotónna na M .

Zopakovanie – Dôsledok Darbouxovej vety

Nech $f \in \mathcal{C}(M)$, kde M je interval. Potom $N = \{y = f(x); x \in M\}$ je jednoprvková množina alebo interval.



JEAN GASTON DARBOUX (1842–1917)

Za akých okolností sa dá tento výsledok obrátiť?

Dôsledok = FRPa + Veta V.12

Nech $f \in \mathcal{C}(M)$, kde M je interval. Potom f je injektívna na M práve vtedy, keď f je rýdzomonotónna na M .

Veta V.13

Nech f je monotónna na intervale M a $N = \{y = f(x); x \in M\}$ je jednoprvková množina alebo interval. Potom $f \in \mathcal{C}(M)$.

Veta (o spojitosi inverznej funkcie)

Nech f je injektívna a spojitá na intervale $M \subseteq D_f$ a $N = \{y = f(x); x \in M\}$. Potom $f^{-1} \in \mathcal{C}(N)$ je rýdzomonotónna.

Veta V.10

Všetky základné elementárne funkcie sú spojité v každom bode svojho definičného oboru.

- ✓ všeobecná mocninná funkcia, logaritmická funkcia, cyklometrické a hyperbolometrické funkcie