Séria úloh 10: Asymptoty, spojitosť funkcie

Vzdelanie múdremu ukazuje, ako málo vie, a hlúpemu dáva ilúziu, že vie veľa.

J. Tuwin

1. Určte všetky asymptoty grafu funkcie f, ak

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2-2x}$; b) $f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$; c) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$;

d) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x+2}$; e) $f(x) = x - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$; f) $f(x) = \log_2(4-x^2)$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2+x-1}{x}$; h) $f(x) = \dfrac{4x-x^3}{x^2+4}$.

2. Zistite, či funkcia g je injektívna. Ak áno, nájdite k nej inverznú a určte definičné obory oboch funkcií.

a) $g(x) = 5^{3-2\operatorname{arctg}(x-1)}$; b) $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\cosh x}$; c) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{2-x}{1+x}$.

3. Je pravda, že f je spojitá v bode x_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$?

4. Vyšetrite spojitosť funkcie f v bode $x_0 = 0$, ak:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$; b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$.

5. Dodefinujte funkciu g tak, aby bola spojitá v bode $x_0 = 0$ (ak je to možné), ak:

a) $g(x) = \dfrac{2x^2-6x}{x^2+1}\sin\dfrac{4}{x}$; b) $g(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

c) $g(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x}}$; d) $g(x) = \left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{\frac{\operatorname{tg} x}{x}}$;

e) $g(x) = x^2 + \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} - 1$; f) $g(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

g) $g(x) = \dfrac{\sqrt[4]{1+x}-1}{x}$; h) $g(x) = \dfrac{x^3+x}{|x|}$.

6. Dodefinujte funkciu h tak, aby bola spojitá na celej reálnej osi (ak je to možné), kde:

a) $h(x) = \dfrac{2^x-3^x}{x}$; b) $h(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$; c) $h(x) = \dfrac{|x|}{x}$;

d) $h(x) = \dfrac{5x^2-3x}{2x}$; e) $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; f) $h(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$;

g) $h(x) = \dfrac{x^3-x^2}{2|x-1|}$; h) $h(x) = 1 - 2^{\frac{1}{x}}$; i) $h(x) = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

j) $h(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$; k) $h(x) = \dfrac{x^2+4x-7}{x^3+5x^2+6x}$; l) $h(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

7. Vyšetrite spojitosť funkcií $F(x) = x\chi(x)$ a $G(x) = (x^2 - 1)\chi(x)$, kde χ je Dirichletova funkcia.

8. Určte čísla $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby dané funkcie boli spojité na $\mathbb{R}$ (ak je to možné):

a) $\Phi(x) = \begin{cases} ax^2 - 2, & x < 1 \\ 3x - a, & x \geq 1 \end{cases};$

b) $\Psi(x) = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ 2 - \frac{x}{a}, & x \geq 1 \end{cases};$

c) $\Upsilon(x) = \begin{cases} a - x^2, & x \leq 0 \\ x + 2, & x \in (0, 2) \\ 3x + b, & x \geq 2 \end{cases};$

d) $\Theta(x) = \begin{cases} x^2 - a, & x \leq b \\ x + 2, & x \in (b, a) \\ 3x + b, & x \geq a \end{cases}.$

9. Nadobúda funkcia $f(x) = \log_3 x - 2^x + 4$ na intervale $\langle 1, 3 \rangle$ hodnotu -1?

10. Zistite, či rovnica $x^3 - 6x + 3 = 0$ má v intervale $\langle -3, -2 \rangle$ reálny koreň. Ak áno, určte ho s presnosťou menšou ako 0,05 (použite metódu bisekcie v dôkaze Bolzanovej vety).