Numerická matematika

Mirko Horňák

2007

Úvod

Tento učebný text vznikol na základe cyklu prednášok z numerických metód na Prírodovedeckej fakulte UPJŠ v Košiciach. Pri príprave prednášok som bol okrem iného vedený snahou ukázať študentom, že aj keď numerická matematika pracuje (väčšinou) s približnými riešeniami problémov, nároky na matematickú presnosť sú v nej také isté ako v klasických axiomaticky budovaných matematických disciplínach.

V prvej kapitole sú prezentované základné pojmy a označenia používané v učebnom texte, ako aj jednoduché poznatky, ktoré sa na ne viažu. Druhá kapitola o interpolácii má význam predovšetkým ako základňa pre numerické derivovanie (krátka tretia kapitola) a pre numerické integrovanie. Štvrtá kapitola o numerickom integrovaní je jednou z ťažiskových. Zvláštna pozornosť je v nej venovaná najmä Gaussovej kvadratúre. Piata kapitola o riešení nelineárnych rovníc je najrozsiahlejšia. Popri poznatkoch o základných metódach (poltenie intervalu, regula falsi, Newtonova, metóda postupných aproximácií) obsahuje aj Sturmovu vetu a jej využitie pri separácii reálnych koreňov polynómu. Sústavy lineárnych rovníc sú z pohľadu numerickej matematiky skúmané v šiestej kapitole. Čitateľ sa tam dozvie okrem iného o invertovaní matice, o LU-rozklade i o iteračných metódach. Záverečná siedma kapitola stručne pojednáva o hľadaní vlastných čísel matice.

V súlade s rozsahom predmetu na fakulte (pôvodne dvojsemestrálna dvojhodinová prednáška, v súčasnosti jednosemestrálna štvorhodinová prednáška) už v tomto učebnom texte nezostal priestor na numerické riešenie diferenciálnych rovníc, hoci je to bezpochyby veľmi dôležitá súčasť numerickej matematiky. Navyše, prednáška bola v čase svojho vzniku určená pre študentov druhého ročníka, a tí nemajú k dispozícii základy teórie diferenciálnych rovníc.

Numerická matematika sa zaoberá štúdiom numerických metód. S istou dávkou zjednodušenia môžeme numerické metódy charakterizovať ako konštruktívne metódy matematickej analýzy a lineárnej algebry. Ak je matematická metóda konštruktívna, podáva riešenie problému algoritmicky, teda v konečnom počte krokov. Z toho vyplývajú rozsiahle možnosti využitia výpočtovej techniky pri riešení problémov numerickej matematiky. Práve prudký rozvoj počítačov je v pozadí „boomu“, ktorý v súčasnom období prežíva táto matematická disciplína.

Praktické skúsenosti z vyučovania numerickej matematiky ma priviedli k záveru, že najefektívnejšie študenti zvládnu tento predmet, ak si fungovanie numerických metód odskúšajú odladením samostatne vytvoreného programu na počítači. Zadania jednotlivých programov majú študenti k dispozícii v Akademickom informačnom systéme PF UPJŠ.

Košice, 2007 Mirko Horňák

Vydanie z roku 2013 sa len málo líši od vydania pôvodného z roku 2007. K zmene došlo pri označovaní zreťazenia konkrétne nešpecifikovaného počtu konečných postupností. Opravené boli chyby zaregistrované pri používaní originálu.

Košice, 2013 Mirko Horňák

Vo vydaní z roku 2019 boli odstránené ďalšie nezrovnalosti nájdené pri práci s vydaním z roku 2013. Okrem iného tu bola venovaná väčšia pozornosť presnému zavedeniu pojmu numerický stupeň polynómu.

Košice, 2019 Mirko Horňák

Obsah

Kapitola 1

Základné poznatky

V tejto kapitole si pripomenieme, prípadne zavedieme niektoré pojmy a označenia, ktoré v učebnom texte budeme používať. Snažíme sa pritom o dôsledné rozlišovanie medzi obyčajnou rovnosťou (matematických) objektov $=$ a *definitorickou* rovnosťou $:=$, keď nový objekt vľavo od definitorickej rovnosti je definovaný pomocou už známych objektov vpravo od definitorickej rovnosti. Príležitostne používame aj definitorickú rovnosť $=:$ „v opačnom garde".

Množinu všetkých celých (racionálnych, reálnych, komplexných) čísel označujeme štandardne symbolom $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Ak $a, b \in \mathbb{R}$, (a, b) je *otvorený* a $\langle a, b\rangle$ *uzavretý reálny interval* s hranicami a, b, teda množina $\{r \in \mathbb{R} : a < r < b\}$, resp. $\{r \in \mathbb{R} : a \leq r \leq b\}$; analogicky sú definované *zmiešané* reálne intervaly $(a, b\rangle$ a $\langle a, b)$. Ak $p, q \in \mathbb{Z}$, $[p, q] := \{z \in \mathbb{Z} : p \leq z \leq q\}$ je *konečný celočíselný* interval s hranicami p, q a $[p, \infty) := \{z \in \mathbb{Z} : p \leq z\}$ je *zhora neohraničený celočíselný* interval s dolnou hranicou p.

Mohutnosť množiny A označujeme ako $\operatorname{card} A$, prípadne $|A|$ (ak ide o konečnú množinu). Nech A, B sú množiny. Symbolom $A \times B$ označujeme množinu všetkých usporiadaných dvojíc (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. *Zobrazenie z množiny a do množiny* B je ľubovoľná množina $f \subseteq A \times B$, ktorá spĺňa nasledovnú podmienku: pre každé $a \in A$ existuje jediné také $b \in B$, že $(a, b) \in f$; b je *obraz prvku a vzhľadom na zobrazenie* f a označuje sa $f(a)$. Symbolom B^A označujeme množinu všetkých zobrazení z A do B. Je známe, že ak $(A, B) \neq (\emptyset, \emptyset)$, tak $\operatorname{card} B^A = (\operatorname{card} B)^{\operatorname{card} A}$ (a teda $|B^A| = |B|^{|A|}$ v prípade konečných množín A, B). Pretože $\emptyset^\emptyset = \{\emptyset\}$, je prirodzená konvenčná definícia $0^0 := 1$, ktorá sa nám bude hodiť na skompaktnenie niektorých zápisov. Ak $m \in [0, \infty)$, miesto $A^{[1,m]}$ používame zjednodušený zápis A^m. Množina f je *zobrazenie*, ak existujú také množiny A, B, že $f \in B^A$. *Definičný obor* zobrazenia f je množina $\operatorname{dom}(f) := \bigcup_{(a,b)\in f}\{a\}$ a *obor hodnôt* zobrazenia f je množina $\operatorname{rng}(f) := \bigcup_{(a,b)\in f}\{b\}$. Ak f je zobrazenie, tak zrejme $f =$

$\{(a, f(a)) : a \in \mathrm{dom}(f)\}$. *Reálna funkcia* je zobrazenie f, pre ktoré $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ aj $\mathrm{rng}(f) \subseteq \mathbb{R}$.

Významným typom zobrazení sú konečné a nekonečné postupnosti. Zobrazenie s je *konečná postupnosť*, ak existuje také $m \in [0, \infty)$, že $\mathrm{dom}(s) = [1, m]$. Ak s je konečná postupnosť, číslo $|s| = |\mathrm{dom}(s)|$ je *dĺžka postupnosti* s a $s(l)$, $l \in [1, |s|]$, je *l-tý člen* postupnosti s. Ak $|s|$ je nie príliš veľké číslo z množiny $[0, \infty)$, pre s sa bežne používa zápis, ktorého štruktúra je zrejmá z najjednoduchších príkladov pre $|s| = 0, 1, 2, 3$: $(\ )$, $(s(1))$, $(s(1), s(2))$, $(s(1), s(2), s(3))$. Ak $|s| = 0$, tak $s = \emptyset$, preto prirodzený názov pre postupnosť dĺžky 0 je *prázdna* postupnosť. *Zreťazenie konečných postupností* s, t (v danom poradí) je (konečná) postupnosť u dĺžky $|s| + |t|$ definovaná tak, že $u(l) = s(l)$ pre každé $l \in [1, |s|]$ a $u(|s| + l) = t(l)$ pre každé $l \in [1, |t|]$. Zreťazenie postupností s, t budeme označovať st, máme teda napríklad $(3, 1)(1, 4, 4, 4) = (3, 1, 1, 4, 4, 4)$ a $(1, 4, 4, 4)(3, 1) = (1, 4, 4, 4, 3, 1)$. Ak s je ľubovoľná konečná postupnosť, tak $s(\ ) = (\ )s = s$; prázdna postupnosť je teda neutrálny prvok vzhľadom na zreťazovanie konečných postupností. *Nekonečná* postupnosť prvkov množiny A je zobrazenie s, pre ktoré $\mathrm{dom}(s)$ je nekonečná podmnožina množiny $\mathbb{Z}$. Nekonečnú postupnosť s zapisujeme v tvare $\{s_l\}_{l \in \mathrm{dom}(s)}$, kde $s_l = s(l)$; v prípade, ak $\mathrm{dom}(s) = [p, \infty)$ (kde $p \in \mathbb{Z}$), pre $\{s_l\}_{l \in [p, \infty)}$ je zaužívané označenie $\{s_l\}_{l=p}^{\infty}$.

Nech $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $j, k \in \mathbb{Z}$ a nech $m_l \in \mathbb{M}$ pre každé $l \in [j, k]$. *Súčet čísel m_l pre l od j po k* sa označuje ako $\sum_{l=j}^{k} m_l$, resp. $\sum_{l \in [j,k]} m_l$, a je to číslo z $\mathbb{M}$ definované rekurentne takto: Ak $j < k$ (čo znamená, že $[j, k] = \emptyset$), tak $\sum_{l=j}^{k} m_l = \sum_{l \in [j,k]} m_l = \sum_{l \in \emptyset} m_l := 0 \in \mathbb{M}$ (čo je neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie čísel v $\mathbb{M}$), a ak $j \le k$, pričom číslo $\sum_{l=j}^{k-1} m_l \in \mathbb{M}$ už je definované, tak $\sum_{l=j}^{k} m_l := \left(\sum_{l=j}^{k-1} m_l \right) + m_k$.

Podobne *súčin čísel m_l pre l od j po k* sa označuje ako $\prod_{l=j}^{k} m_l$, resp. $\prod_{l \in [j,k]} m_l$, a jeho rekurentná definícia je nasledovná: Ak $k < j$, tak $\prod_{l=j}^{k} m_l = \prod_{l \in [j,k]} m_l = \prod_{l \in \emptyset} m_l := 1 \in \mathbb{M}$ (čo je neutrálny prvok vzhľadom na násobenie čísel v $\mathbb{M}$), a ak $j \le k$, tak $\prod_{l=j}^{k} m_l := \left(\prod_{l=j}^{k-1} m_l \right) \cdot m_k$.

Nech teraz s_l je konečná postupnosť pre každé $l \in [j, k]$. Inšpirovaní predchádzajúcimi zápismi *zreťazenie postupností* s_l *pre* l *od* j *po* k budeme označovať ako $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k} s_l$, resp. $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l\in[j,k]} s_l$, a definovať rekurentne: Ak $k < j$, tak $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k} s_l = \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l\in[j,k]} s_l = \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l\in\emptyset} s_l := (\ )$, a ak $j \le k$, tak $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k} s_l := \left[\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k-1} s_l\right] s_k$; tu používame hranaté zátvorky, aby bolo jasné, že prvou z dvoch postupností v zreťazení vpravo od symbolu definujúcej rovnosti je postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k-1} s_l$, a nie postupnosť $\left(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k-1} s_l\right)$ dĺžky 1, ktorej jediným členom je postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=j}^{k-1} s_l$ (ako by to bolo možné interpretovať pri použití okrúhlych zátvoriek miesto hranatých). V súlade s definíciou pre ľubovoľnú konečnú postupnosť s platí $s = \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=1}^{|s|} (s(l))$ (prirodzeným spôsobom sa dá vyjadriť ako zreťazenie $|s|$ postupností dĺžky 1). Pre $n \in [0, \infty)$ a konečnú postupnosť s budeme ako s^n označovať postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{l=1}^{n} s$.

Kroneckerovo delta je také zobrazenie $\delta \in [0, 1]^{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$, že obrazom usporiadanej dvojice $(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vzhľadom na δ (ktorý kvôli jednoduchosti označujeme $\delta_{i,j}$) je 0 v prípade $i \ne j$ a 1 v prípade $i = j$.

Multimnožina prirodzeným spôsobom zovšeobecňuje základný matematický pojem množiny. Multimnožina s *nosičom* X je usporiadaná dvojica (X, f_X), kde X je množina a $f_X \in [1, \infty)^X$; $f_X(x)$ je *frekvencia prvku* $x \in X$ v multimnožine (X, f_X). Konečné multimnožiny zjednodušene zapisujeme podobne ako konečné množiny, napr. $\{a, b, b, 1, 1, 1, 1, \pi, \pi\}$. Ak množina X je konečná, *počet prvkov* multimnožiny (X, f_X) je $|(X, f_X)| = \sum_{x\in X} f_X(x)$.

1.1 Okruhy polynómov

Pre postupnosť $\{c_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{[0,\infty)}$ označme

$$N(\{c_j\}_{j=0}^{\infty}) := \{n \in [0, \infty) : \forall j \in [n + 1, \infty)\ c_j = 0\}.$$

Ďalej, pre $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ nech

$$\mathbb{M}[x] := \left\{ \left\{ \left(x, \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \right) : x \in \mathbb{M} \right\} : \{a_j\}_{j=0}^{\infty} \in \mathbb{M}^{[0,\infty)}, N(\{a_j\}_{j=0}^{\infty}) \ne \emptyset \right\}.$$

Prvok $a = \{(x, \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j) : x \in \mathbb{M}\}$ množiny $\mathbb{M}[x]$ je *polynóm premennej* x *s koeficientmi z* $\mathbb{M}$ (stručne *polynóm*) a číslo a_j je *koeficient polynómu* a *pri* x^j. Číslo $\mathrm{nst}(a) := \min N(\{a_j\}_{j=0}^{\infty})$ je *numerický stupeň polynómu* a

a koeficient $\mathrm{vk}(a) := a_{\mathrm{nst}(a)}$ je *vedúci koeficient polynómu* a. Matematickou indukciou vzhľadom na k sa ľahko overí, že pre každé $k \in [\mathrm{nst}(a), \infty)$ platí $\sum_{j=0}^{k} a_j x_j = \sum_{j=0}^{\mathrm{nst}(a)} a_j x^j$, preto $\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = \sum_{j=0}^{\mathrm{nst}(a)} a_j x^j \in \mathbb{M}$. To znamená, že polynóm $a \in \mathbb{M}[x]$ je (špeciálne) zobrazenie z $\mathbb{M}$ do $\mathbb{M}$.

Zobrazenie f je striktne definované (nepríliš praktickým) zápisom

$$f = \{(x, f(x)) : x \in \mathrm{dom}(f)\},$$

často sa preto vyskytuje zjednodušený zápis $f = f(x)$ (s tým, že $\mathrm{dom}(f)$ je implicitne známe). V súlade s tým budeme pre polynómy používať zjednodušený zápis $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ alebo štandardný zápis $a = \sum_{j=0}^{\mathrm{nst}(a)} a_j x^j$. Polynóm a numerického stupňa 0 má potom štandardný zápis $a = \sum_{j=0}^{0} a_j x^j = a_0 x^0 = a_0$ a nazýva sa *konštantný*, lebo ide o konštantné zobrazenie, ktoré každému číslu z $\mathbb{M}$ priraďuje číslo a_0. Symbol a_0 teda môže označovať číslo z $\mathbb{M}$ aj (konštantný) polynóm z $\mathbb{M}[x]$, a to, o ktorý objekt (číslo či polynóm) ide, treba rozlíšiť podľa kontextu. Okrem iného teda 0 označuje aj konštantný *nulový* polynóm. Polynóm je *monický* (používa sa aj názov *normovaný*), ak jeho vedúci koeficient je 1.

Lema 1.1 *Ak pre* $a \in \mathbb{C}[x]$ *platí* $\mathrm{nst}(a) \geq 1$ *alebo* $a \neq 0$*, tak* $\mathrm{vk}(a) \neq 0$.

Dôkaz. Nech $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \in \mathbb{C}[x]$. Ak $n = \mathrm{nst}(a) \geq 1$, tak $\mathrm{vk}(a) = a_n$, $n \in N(\{a_j\}_{j=0}^{\infty})$ a $a_j = 0$ pre každé $j \in [n+1, \infty)$. Za predpokladu $a_n = 0$ by sme potom dostali $a_j = 0$ pre každé $j \in [n, \infty)$, $n - 1 \in N(\{a_j\}_{j=0}^{\infty})$ a $\mathrm{nst}(a) = \min N(\{a_j\}_{j=0}^{\infty}) \leq n - 1 < n = \mathrm{nst}(a)$, spor.

Na druhej strane, ak $\mathrm{nst}(a) = 0$ a súčasne $a \neq 0$, tak $0 \in N(\{a_j\}_{j=0}^{\infty})$, $a_j = 0$ pre každé $j \in [1, \infty)$ a $0 = \mathrm{vk}(a) = a_{\mathrm{nst}(a)} = a_0$. Potom ale pre každé $x \in \mathbb{C}$ platí $a(x) = \sum_{j=0}^{\infty} 0 \cdot x^j = 0$ a polynóm a je nulový, spor. ■

Dôsledok 1.2 *Ak* $a \in \mathbb{C}[x]$ *a* $\mathrm{vk}(a) = 0$*, tak* $a = 0$ *a* $\mathrm{nst}(a) = 0$. ■

Vidíme teda, že $\mathrm{nst}(0) = \mathrm{nst}(\sum_{j=0}^{\infty} 0 \cdot x^j) = 0$. V prípade (bežného) algebrického stupňa je situácia iná, lebo algebrický stupeň sa pre nulový polynóm buď nedefinuje vôbec alebo definuje ako $-\infty$. Platí tiež $\mathrm{vk}(0) = 0$, pričom nulový polynóm je jediný polynóm s nulovým vedúcim koeficientom.

Pre polynómy $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j, b = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \in \mathbb{M}[x]$ je definovaný ich *súčet* $a + b$ a *súčin* ab:

$$a + b := \sum_{j=0}^{\infty} (a_j + b_j) x^j, \qquad ab := \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) x^j.$$

Lema 1.3 *Ak* $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *a* $a, b \in \mathbb{M}[x]$, *tak*

1. $a + b \in \mathbb{M}[x]$ *a* $\mathrm{nst}(a + b) \leq \max(\mathrm{nst}(a), \mathrm{nst}(b))$;
2. $ab \in \mathbb{M}[x]$ *a* $\mathrm{nst}(ab) \leq \mathrm{nst}(a) + \mathrm{nst}(b)$;
3. *z predpokladu* $a \neq 0$ *a* $b \neq 0$ *vyplýva* $\mathrm{nst}(ab) = \mathrm{nst}(a) + \mathrm{nst}(b)$;
4. $\mathrm{vk}(ab) = \mathrm{vk}(a)\mathrm{vk}(b)$.

Dôkaz. Nech $a = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$, $\mathrm{nst}(a) = m$ a $b = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$, $\mathrm{nst}(b) = n$. To znamená, že $\mathrm{vk}(a) = a_m$, $\mathrm{vk}(b) = b_n$, pre každé $j \in [m + 1, \infty)$ máme $a_j = 0$ a pre každé $j \in [n + 1, \infty)$ máme $b_j = 0$.

1. Ak $j \in [\max(m, n) + 1, \infty)$, tak $a_j + b_j = 0 + 0 = 0$, preto $\max(m, n) \in N(\{a_j + b_j\}_{j=0}^{\infty})$, $a + b \in \mathbb{M}[x]$ a $\mathrm{nst}(a + b) = \min N(\{a_j + b_j\}_{j=0}^{\infty}) \leq \max(m, n) = \max(\mathrm{nst}(a), \mathrm{nst}(b))$.

2. Podľa definície $ab = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$, kde $c_j = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k}$. Uvážme $j \in [m+n+1, \infty)$ a $k \in [0, j]$. Ak $k \in [0, m]$, tak $j-k \geq j-m \geq (m+n+1)-m = n + 1$, $j - k \in [n + 1, \infty)$ a následne $b_{j-k} = 0$; ak $k \in [m + 1, j]$, tak $a_k = 0$. V súlade s tým $c_j = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 0 + \sum_{k=m+1}^{j} 0 \cdot b_{j-k} = 0$, preto $m + n \in N(\{c_j\}_{j=0}^{\infty})$, $ab \in \mathbb{M}[x]$ a $\mathrm{nst}(ab) \leq \min N(\{c_j\}_{j=0}^{\infty}) \leq m+n = \mathrm{nst}(a)+\mathrm{nst}(b)$.

3. Za predpokladu $a \neq 0$ a $b \neq 0$ podľa lemy 1.1 máme $a_m \neq 0$ a $b_n \neq 0$. V polynóme ab je pri x^{m+n} koeficient $c_{m+n} = \sum_{k=0}^{j} a_k b_{m+n-k}$. Ak $k \in [0, m - 1]$, tak $m + n - k \geq m + n - (m - 1) = n + 1$ a $b_{m+n-k} = 0$; z predpokladu $k \in [m+1, m+n]$ zasa vyplýva $a_m = 0$. V dôsledku toho $c_{m+n} = 0 + a_m b_{m+n-m} + 0 = a_m b_n \neq 0$ a množina $N(\{c_j\}_{j=0}^{\infty})$ nemôže obsahovať žiadne číslo z $[0, m + n - 1]$. To znamená, že $\min N(\{c_j\}_{j=0}^{\infty}) \geq m + n$, $\mathrm{nst}(a, b) = \min N(\{c_j\}_{j=0}^{\infty}) = m + n$ a $\mathrm{vk}(ab) = c_{m+n} = a_m b_n = \mathrm{vk}(a)\mathrm{vk}(b)$.

4. Ak $a \neq 0$ aj $b \neq 0$, požadovanú rovnosť sme už dokázali vyššie. Ak $a = 0$ alebo $b = 0$, tak $ab = 0$ a buď $\mathrm{vk}(a) = 0$ alebo $\mathrm{vk}(b) = 0$; na základe toho $\mathrm{vk}(ab) = 0 = \mathrm{vk}(a)\mathrm{vk}(b)$. ∎

Ak $j, k \in \mathbb{Z}$ a $p_l \in \mathbb{M}[x]$ pre každé $l \in [j, k]$, polynómy $\sum_{l=j}^{k} p_l \in \mathbb{M}[x]$ a $\prod_{l=j}^{k} p_l \in \mathbb{M}[x]$ definujeme rekurentne, a to podobne ako sme pre čísla $m_l \in \mathbb{M}$, $l \in [j, k]$, definovali čísla $\sum_{l=j}^{k} m_l \in \mathbb{M}$ a $\prod_{l=j}^{k} m_l \in \mathbb{M}$. Využijeme pritom ľahko overiteľný fakt, že neutrálny prvok vzhľadom na sčítanie (násobenie) polynómov v $\mathbb{M}[x]$ je $0 \in \mathbb{M}[x]$ ($1 \in \mathbb{M}[x]$).

Lema 1.4 *Ak* $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $k \in [1, \infty)$ *a* $p_j \in \mathbb{M}[x]$ *pre každé* $j \in [1, k]$, *tak*

1. $\mathrm{nst}(\sum_{j=1}^{k} p_j) \leq \max(\mathrm{nst}(p_j) : j \in [1, k])$;
2. $\mathrm{nst}(\prod_{j=1}^{k} p_j) \leq \sum_{j=1}^{k} \mathrm{nst}(p_j)$;
3. *z predpokladu* $p_j \neq 0$ *pre každé* $j \in [1, k]$ *vyplýva* $\mathrm{nst}(\prod_{j=1}^{k} p_j) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{nst}(p_j)$;
4. $\mathrm{vk}(\prod_{j=1}^{k} p_j) = \prod_{j=1}^{k} \mathrm{vk}(p_j)$.

Dôkaz urobíme matematickou indukciou vzhľadom na k. Ak $k = 1$, požadované tvrdenia triviálne vyplývajú z toho, že $\sum_{j=1}^{1} p_j = p_1 = \prod_{j=1}^{k} p_j$, $\sum_{j=1}^{1} \mathrm{nst}(p_j) = \mathrm{nst}(p_1)$ a $\prod_{j=1}^{k} \mathrm{vk}(p_j) = \mathrm{vk}(p_1)$. V indukčnom kroku potom použijeme indukčný predpoklad spolu s lemou 1.3. ■

Z algebrického hľadiska $\mathbb{M}[x]$ s binárnymi operáciami súčtu a súčinu predstavuje *komutatívny okruh*.

Ak $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ a $q, r \in \mathbb{M}[x]$, $r \neq 0$, existuje jediná usporiadané dvojica $(s, t) \in \mathbb{M}[x] \times \mathbb{M}[x]$, pre ktorú platí $q = rs + t$ a buď $t = 0$ alebo $\mathrm{nst}(t) < \mathrm{nst}(r)$; s je *podiel* a t *zvyšok* pri *delení polynómu q polynómom r*. Polynóm r je *deliteľ* polynómu q (označenie $r|q$), ak zvyšok pri delení polynómu q polynómom r je 0 (a existuje teda $s \in \mathbb{M}[x]$ tak, že $q = rs$).

Číslo $\alpha \in \mathbb{C}$ je *koreň* polynómu $a \in \mathbb{C}[x]$, ak $a(\alpha) = \sum_{j=0}^{\mathrm{nst}(a)} a_j \alpha^j = 0$. Pretože zvyšok pri delení polynómu a polynómom $x - \alpha$ má numerický stupeň 0, ľahko sa vidí, že $a(\alpha) = 0$ je ekvivalentné s tým, že $x - \alpha | a$. Koreň α polynómu a má *násobnosť* (vzhľadom na polynóm a; túto špecifikáciu vynechávame, ak je z kontextu jasné, o aký polynóm a ide) $k \in [1, \mathrm{nst}(a)]$, ak $(x - \alpha)^k | a$, ale $(x - \alpha)^{k+1} \nmid a$. Koreň polynómu a je *l-násobný*, ak jeho násobnosť je l, a je *jednoduchý*, ak jeho násobnosť je 1. Ak z koreňov polynómu a vytvoríme multimnožinu, v ktorej sa každý koreň vyskytuje s frekvenciou rovnou svojej násobnosti, podľa základnej vety algebry táto multimnožina má $\mathrm{nst}(a)$ prvkov.

Lema 1.5 *Ak $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in [0, \infty)$, $p \in \mathbb{C}[x]$, $q = (x - \alpha)^k p$ a $j \in [0, k - 1]$, tak*

1. $q^{(j)}(\alpha) = 0$;
2. $q^{(k)}(\alpha) = k! p(\alpha)$.

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na m dokážeme, že pre každé $m \in [0, k]$ platí tvrdenie

$$T(m): \ [(x - \alpha)^k]^{(m)} = (x - \alpha)^{k-m} \prod_{l=0}^{m-1} (k - l).$$

Pre $m = 0$ máme

$$[(x - \alpha)^k]^{(0)} = (x - \alpha)^k = (x - \alpha)^k \prod_{l=0}^{0-1} (k - l).$$

Ak pre $m \in [0, k - 1]$ je

$$[(x - \alpha)^k]^{(m)} = (x - \alpha)^{k-m} \prod_{l=0}^{m-1} (k - l),$$

tak platí tiež

$$[(x-\alpha)^k]^{(m+1)} = (k-m)(x-\alpha)^{k-m-1}\prod_{l=0}^{m-1}(k-l)$$
$$= (x-\alpha)^{k-(m+1)}\prod_{l=0}^{(m+1)-1}(k-l),$$

čo je tvrdenie $T(m+1)$.

Ak polynóm $(x-\alpha)^k \in \mathbb{C}[x]$ označíme ako r, tak $q = rp$, podľa $T(k)$ je $r^{(k)}(\alpha) = k!$ a pre každé $m \in [0, k-1]$ podľa $T(m)$ platí $r^{(m)}(\alpha) = 0$. Na základe Leibnizovho vzorca preto dostávame

$$q^{(j)}(\alpha) = \sum_{m=0}^{j}\binom{j}{m} r^{(m)}(\alpha)p^{(j-m)}(\alpha) = \sum_{m=0}^{j} 0 = 0,$$
$$q^{(k)}(\alpha) = \sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m} r^{(m)}(\alpha)p^{(k-m)}(\alpha) = \sum_{m=0}^{k-1} 0 + \binom{k}{k} k!p^{(0)}(\alpha) = k!p(\alpha). \quad \blacksquare$$

Lema 1.6 *Ak $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in [0, \infty)$, $q \in \mathbb{C}[x]$ a $q^{(l)}(\alpha) = 0$ pre každé $l \in [0, k]$, tak $(x-\alpha)^{k+1}|q$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na l dokážeme, že pre každé $l \in [0, k+1]$ platí $(x-\alpha)^l|q$. Pre $l = 0$ máme $(x-\alpha)^0 = 1|q$. Nech teda $l \in [0, k]$ a nech $(x-\alpha)^l|q$; to znamená, že existuje taký polynóm $p_l \in \mathbb{C}[x]$, že $q = (x-\alpha)^l p_l$. Z lemy 1.5 potom vyplýva $0 = l!p_l(\alpha)$, preto $p_l(\alpha) = 0$, $x-\alpha|p_l$, existuje $r_l \in \mathbb{C}[x]$, pre ktoré je $p_l = (x-\alpha)r_l$, a tak $q = (x-\alpha)^l(x-\alpha)r_l = (x-\alpha)^{l+1}r_l$ a $(x-\alpha)^{l+1}|q$. $\blacksquare$

Lema 1.7 *Ak $n \in [0, \infty)$, $f \in \mathbb{C}[x]$, $\mathrm{nst}(f) = n$ a $\mathrm{vk}(f) = f_n$, tak pre každé $l \in [0, n]$ platí $\mathrm{nst}(f^{(l)}) = n - l$ a $\mathrm{vk}(f^{(l)}) = f_n \prod_{k=0}^{l-1}(n-k)$.*

Dôkaz. Nech $T(l)$ pre $l \in [0, n]$ označuje konjunkciu výrokov $\mathrm{nst}(f^{(l)}) = n - l$ a $\mathrm{vk}(f^{(l)}) = f_n \prod_{k=0}^{l-1}(n-k)$. Matematickou indukciou vzhľadom na l ukážeme, že pre každé $l \in [0, n]$ platí $T(l)$. Polynóm $f^{(0)} = f$ má numerický stupeň $n = n-0$ a vedúci koeficient $f_n = f_n \prod_{k=0}^{0-1}(n-k)$, tvrdenie $T(0)$ je teda pravdivé. Predpokladajme, že $l \in [0, n-1]$ a tvrdenie $T(l)$ máme k dispozícii. Keďže pre polynóm $g := f^{(l)}$ platí $\mathrm{nst}(g) = n - l \geq n - (n-1) = 1$, ide o nenulový polynóm s vedúcim koeficientom $f_n \prod_{k=0}^{l-1}(n-k)$. Tento polynóm má teda tvar $g = \sum_{k=0}^{n-l} g_k x^k$, kde $0 \neq g_{n-l} = f_n \prod_{k=0}^{l-1}(n-k)$. Pretože $n-l \neq 0$, je tiež $(n-l)g_{n-l} \neq 0$, polynóm $f^{(l+1)} = g' = \sum_{k=1}^{n-l} kg_k x^{k-1}$ má numerický stupeň $n-l-1$ a vedúci koeficient $(n-l)g_{n-l} = (n-l)f_n \prod_{k=0}^{l-1}(n-k) = f_n \prod_{k=0}^{(l+1)-1}(n-k)$; pravdivosť výroku $T(l+1)$ je dokázaná. $\blacksquare$

Dôsledok 1.8 *Ak* $n \in [0,\infty)$, $k \in [n+1,\infty)$ *a polynóm* $f \in \mathbb{C}[x]$ *má numerický stupeň* n, *tak* $f^{(k)} = 0$.

Dôkaz. Podľa lemy 1.7 platí $\mathrm{nst}(f^{(n)}) = 0$, preto $f^{(n)}$ je konštantný polynóm a $f^{(n+1)} = 0$. Odtiaľ už priamo (matematickou indukciou vzhľadom na l) vyplýva, že $f^{(l)} = 0$ pre každé $l \in [n+1,\infty)$. ■

Tvrdenie 1.9 *Ak* $\alpha \in \mathbb{C}$, $p \in \mathbb{C}[x]$ *a* $n \in [0,\infty)$, *tak* $(\alpha p)^{(n)} = \alpha p^{(n)}$.

Dôkaz matematickou indukciou vzhľadom na n. Pre $n = 0$ máme $(\alpha p)^{(0)} = \alpha p = \alpha p^{(0)}$. Ak $n \in [0,\infty)$ a $(\alpha p)^{(n)} = \alpha p^{(n)}$, tak $(\alpha p)^{(n+1)} = [(\alpha p)^{(n)}]' = [\alpha p^{(n)}]' = \alpha[p^{(n)}]' = \alpha p^{(n+1)}$. ■

Nech $\mathbb{M} \in \{\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ a $(q,r) \in \mathbb{M}[x] \times \mathbb{M}[x]$, $(q,r) \neq (0,0)$. *Najväčší spoločný deliteľ* q,r je monický polynóm $a \in \mathbb{M}[x]$, pre ktorý platí

$$a|q \wedge a|r \wedge (\forall b \in \mathbb{M}[x]\ ((b|q \wedge b|r) \Rightarrow b|a));$$

označujeme ho $\mathrm{nsd}(q,r)$. Je zrejmé, že $\mathrm{nsd}(r,q) = \mathrm{nsd}(q,r)$, a ak r je nenulový konštantný polynóm, tak $\mathrm{nsd}(q,r) = 1$. Preto pri hľadaní $\mathrm{nsd}(q,r)$ môžeme bez ujmy na všeobecnosti predpokladať, že platí $\mathrm{nst}(q) \geq \mathrm{nst}(r) \geq 1$.

Najväčší spoločný deliteľ polynómov q,r sa dá nájsť dobre známym Euklidovým algoritmom. Pre potreby numerickej matematiky využijeme jeho modifikovanú verziu. Nech $q,r \in \mathbb{C}[x]$, pričom $\mathrm{nst}(q) \geq \mathrm{nst}(r) \geq 1$. *Modifikovaný Euklidov algoritmus* (označenie $\mathrm{MEA}(q,r)$) je rekurentný postup, ktorým sa vytvárajú postupnosti $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}\limits_{j=0}^{n}(p_j)$ a $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}\limits_{j=1}^{n}(u_j)$ nenulových polynómov z $\mathbb{C}[x]$, a to na základe nasledovných pravidiel:

1. $p_0 := q$, $p_1 := r$.

2. Predpokladajme, že polynóm p_k poznáme pre každé $k \in [0,j]$ a polynóm u_k poznáme pre každé $k \in [1,j-1]$, pričom $j \in [1,\infty)$. (Bezprostredne po aplikácii pravidla 1. je tento predpoklad splnený pre $j = 1$.) Polynómy u_j, p_{j+1} sú (jednoznačne) určené rovnosťou $p_{j-1} = p_j u_j - p_{j+1}$ a nerovnosťou $\mathrm{nst}(p_{j+1}) < \mathrm{nst}(p_j)$: ide o delenie polynómu p_{j-1} polynómom p_j, pričom podiel je u_j a zvyšok $-p_{j+1}$.

2.1. Ak $p_j | p_{j-1}$, položíme $u_j := \frac{p_{j-1}}{p_j}$, $n := j$ a $\mathrm{MEA}(q,r)$ je na konci.

2.2. Ak $p_j \nmid p_{j-1}$, tak $p_{j+1} \neq 0$ a $\mathrm{MEA}(q,r)$ pokračuje ďalšou aplikáciou pravidla 2 (s tým, že v pozícii j je teraz $j+1$).

Konečnosť $\mathrm{MEA}(q,r)$ dokážeme sporom. Predpokladajme, že $\mathrm{MEA}(q,r)$ vytvoril (nekonečnú) postupnosť $\{p_j\}_{j=0}^{\infty}$. Vzhľadom na to, že postupnosť $\{\mathrm{nst}(p_j)\}_{j=1}^{\infty} \in [0,\infty)^{[1,\infty)}$ je klesajúca, pričom $\mathrm{nst}(p_1) = \mathrm{nst}(r)$, dostávame $\mathrm{nst}(p_{\mathrm{nst}(r)+1}) < 0$, čo samozrejme nie je možné.

Matematickou indukciou vzhľadom na j ukážeme, že pre každé $j \in [1, n]$ je $\mathrm{nsd}(p_{j-1}, p_j) = \mathrm{nsd}(q, r)$. Ak $j = 1$, tvrdenie vyplýva priamo z definície $\mathrm{MEA}(q, r)$. Ak $j \in [1, n-1]$ a $\mathrm{nsd}(p_{j-1}, p_j) = \mathrm{nsd}(q, r)$, tak $p_{j-1} = p_j u_j - p_{j+1}$ a tiež

$$\mathrm{nsd}(p_j, p_{j+1}) = \mathrm{nsd}(p_j, -p_{j+1}) = \mathrm{nsd}(p_{j-1}, p_j) = \mathrm{nsd}(q, r).$$

Preto v súlade s pravidlom 2.2 definície $\mathrm{MEA}(q, r)$ je aj $\mathrm{nsd}(q, r) = \mathrm{nsd}(p_{n-1}, p_n) = \lambda p_n$, kde $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$ je vybraté tak, aby polynóm λp_n bol monický. Tak ako pri obyčajnom Euklidovom algoritme teda aj $\mathrm{MEA}(q, r)$ vedie k určeniu (nenulového násobku) polynómu $\mathrm{nsd}(q, r)$.

Lema 1.10 *Ak $a \in \mathbb{R}$ a $f \in \mathbb{R}[t]$, tak $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}[x]$.*

Dôkaz. Nech $\mathrm{nst}(f) = n$ a $f = \sum_{i=0}^n f_i t^i$ (kde $f_i \in \mathbb{R}$ pre každé $i \in [0, n]$). Polynóm $F := \sum_{i=0}^n \frac{f_i}{i+1} t^{i+1} \in \mathbb{R}[t]$ je primitívna funkcia k funkcii f, preto pre každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$. To znamená, že $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ako funkcia premennej x patrí do $\mathbb{R}[x]$, lebo je súčtom polynómov $F(x)$ a $-F(a)$, ktoré oba patria do $\mathbb{R}[x]$. ■

1.2 Metrické priestory

Metrický priestor je usporiadaná dvojica (X, d), kde X je neprázdna množina (*nosič*) a $d \in \langle 0, \infty)^{(X^2)}$ je *metrika*, t. j. zobrazenie vyhovujúce axiómam

(D_1) $\forall x, y \in X\ (d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$;
(D_2) $\forall x, y \in X\ d(x, y) = d(y, x)$;
(D_3) $\forall x, y, z \in X\ d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.

Metrika je teda zobrazenie, ktoré je *symetrické* (D_2) a spĺňa *trojuholníkovú nerovnosť* (D_3). Trojuholníkovú nerovnosť je možné prirodzeným spôsobom zovšeobecniť:

Lema 1.11 *Ak (X, d) je metrický priestor, $m, n \in [1, \infty)$, $n \ge m$ a $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=m}^{n}(x_i) \in X^{n+1-m}$, tak $d(x_m, x_n) \le \sum_{i=m}^{n-1} d(x_i, x_{i+1})$.*

Dôkaz. Matematickou indukciou vzhľadom na k dokážeme silnejšie tvrdenie, že totiž pre každé $k \in [m, n]$ platí nerovnosť

$$T(k):\ d(x_m, x_k) \le \sum_{i=m}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}).$$

Z axiómy (D_1) máme

$$d(x_m, x_m) = 0 = \sum_{i=m}^{m-1} d(x_i, x_{i+1}),$$

$T(m)$ teda platí. Ak $k \in [m, n-1]$ a $T(k)$ platí, tak na základe axiómy (D_3) dostávame

$$\begin{aligned} d(x_m, x_{k+1}) &\le d(x_m, x_k) + d(x_k, x_{k+1}) \\ &\le \sum_{i=m}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) + d(x_k, x_{k+1}) = \sum_{i=m}^{(k+1)-1} d(x_i, x_{i+1}) \end{aligned}$$

a $T(k+1)$ je tiež pravdivé tvrdenie. ■

Nech $\kappa \in \langle 0, 1)$; zobrazenie $f \in X^X$ je *κ-kontraktibilné*, ak pre všetky $x, y \in X$ je $d(f(x), f(y)) \le \kappa d(x, y)$. Postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^{[1,\infty)}$ je *konvergentná*, ak existuje $V \in X$ (*limita* postupnosti $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, označenie $V = \lim_{n\to\infty} v_n$) spĺňajúce podmienku

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty)\ \exists n_1 \in [1, \infty)\ \forall n \in [n_1, \infty)\ d(v_n, V) < \varepsilon.$$

Zrejme teda

$$\lim_{n\to\infty} v_n = V \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(v_n, V) = 0,$$

pričom na pravej strane ekvivalencie je obyčajná limita postupnosti z $\mathbb{R}^{[1,\infty)}$. Postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^{[1,\infty)}$ je *cauchyovská*, ak spĺňa podmienku

$$\forall \varepsilon \in (0, \infty)\ \exists n_1 \in [1, \infty)\ \forall m, n \in [n_1, \infty)\ d(v_m, v_n) < \varepsilon.$$

Je ľahké vidieť, že v metrickom priestore každá konvergentná postupnosť je cauchyovská. Metrický priestor (X, d) je *úplný*, ak v ňom každá cauchyovská postupnosť je konvergentná.

1.3 Diferenčné rovnice

Hoci všeobecná teória diferenčných rovníc je pomerne rozsiahla matematická disciplína, pre potreby tohto učebného textu vystačíme s veľmi jednoduchým typom diferenčnej rovnice.

Nech $l \in [1, \infty)$ a nech $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j) \in \mathbb{C}^{l+1}$, pričom $a_l \neq 0$. *Diferenčná rovnica zodpovedajúca postupnosti* $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$ (budeme pre ňu používať označenie

DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$) je nekonečná sústava rovníc

$$\left\{\sum_{j=0}^{l} a_j y_{n+j} = 0 :\ n \in [0,\infty)\right\},$$

kde neznámou je postupnosť $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Partikulárne riešenie DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$ je postupnosť $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{[0,\infty)}$ spĺňajúca podmienku

$$\forall n \in [0,\infty)\ \sum_{j=0}^{l} a_j \tilde{y}_{n+j} = 0.$$

Všeobecné riešenie DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$ je postupnosť $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty} \in \left(\mathbb{C}^{(\mathbb{C}^l)}\right)^{[0,\infty)}$ (to znamená, že $Y_n \in \mathbb{C}^{(\mathbb{C}^l)}$ pre každé $n \in [0,\infty)$) s nasledovnými vlastnosťami:

(*i*) ak $\underset{k=1}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(\hat{x}_k) \in \mathbb{C}^l$, tak postupnosť $\left\{Y_n\left(\underset{k=1}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(\hat{x}_k)\right)\right\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{[0,\infty)}$ je partikulárne riešenie DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$;

(*ii*) ak $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{[0,\infty)}$ je partikulárne riešenie DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$, tak existuje $\underset{k=1}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{x}_k) \in \mathbb{C}^l$, pre ktoré platí $\tilde{y}_n = Y_n\left(\underset{k=1}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{x}_k)\right)$ pre každé $n \in [0,\infty)$.

Lema 1.12 *Ak $l \in [1,\infty)$, $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j) \in \mathbb{C}^{l+1}$, $a_l \neq 0$ a $\underset{k=0}{\overset{l-1}{\mathbf{\Gamma}}}(\check{y}_k) \in \mathbb{C}^l$, tak* DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$ *má práve jedno partikulárne riešenie $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$, pre ktoré platí $\tilde{y}_n = \check{y}_n$ pre každé $n \in [0, l-1]$.*

Dôkaz. Ak $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ je partikulárne riešenie DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$ a $m \in [l,\infty)$, tak $\tilde{y}_m$ je jednoznačne vyjadriteľné pomocou $\tilde{y}_n$, $n \in [m-l, m-1]$, lebo platí $\sum_{j=0}^{l} a_j \tilde{y}_{m-l+j} = 0$, a tak $\tilde{y}_m = -\frac{1}{a_l}\sum_{j=0}^{l-1} a_j \tilde{y}_{m-l+j}$. Preto ak od partikulárneho riešenia $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ budeme vyžadovať, aby platilo $\tilde{y}_n = \check{y}_n$ pre každé $n \in [0, l-1]$, také partikulárne riešenie bude existovať nanajvýš jedno. Postupnosť $\{\check{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$, v ktorej $\check{y}_m = -\frac{1}{a_l}\sum_{j=0}^{l-1} a_j \check{y}_{m-l+j}$ pre každé $m \in [l,\infty)$, však je takým partikulárnym riešením, lebo pre ňu platí $\sum_{j=0}^{l} a_j \check{y}_{n+j} = 0$ pre každé $n \in [0,\infty)$. ■

Podľa lemy 1.12 teda DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$ má každé svoje partikulárne riešenie jednoznačne určené *počiatočným úsekom* $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=0}^{l-1}(\check{y}_k)$ dĺžky l.

Lema 1.13 *Ak* $l \in [1,\infty)$, $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j) \in \mathbb{C}^{l+1}$, $a_l \neq 0$ *a polynóm* $\sum_{j=0}^{l} a_j x^j$ *má* l *jednoduchých koreňov* z_k, $k \in [1,l]$, *tak platí:*

1. $\{\sum_{k=1}^{l} x_k z_k^n\}_{n=0}^{\infty}$ *je všeobecné riešenie* DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$.

2. *Ak* $\{\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n\}_{n=0}^{\infty}$ *je partikulárne riešenie* DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$ *určené počiatočným úsekom* $(0)^{l-1}(1)$, *tak* $\tilde{x}_k \neq 0$ *pre každé* $k \in [1,l]$.

Dôkaz. 1. Ak $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=1}^{l}(\hat{x}_k) \in \mathbb{C}^l$ a $n \in [0,\infty)$, tak $\sum_{j=0}^{l}(a_j \sum_{k=1}^{l} \hat{x}_k z_k^{n+j}) = \sum_{k=1}^{l}(\hat{x}_k z_k^n \sum_{j=0}^{l} a_j z_k^j) = \sum_{k=1}^{l}(\hat{x}_k z_k^n \cdot 0) = 0$, a to znamená, že podmienka (i) definície partikulárneho riešenia DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$ je splnená.

Nech teraz $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathbb{C}^{[0,\infty)}$ je partikulárne riešenie DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$. Treba nám nájsť také $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=1}^{l}(\tilde{x}_k) \in \mathbb{C}^l$, že pre každé $n \in [0,\infty)$ je $\tilde{y}_n = \sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n$. Uvážme nasledovnú sústavu l lineárnych algebrických rovníc o l neznámych x_k, $k \in [1,l]$:

$$\left\{ \sum_{k=1}^{l} z_k^n x_k = \tilde{y}_n : \; n \in [0, l-1] \right\}.$$

Maticový tvar tejto sústavy je $Ax = b$, kde

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{l-1} & z_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{l-2} & z_2^{l-2} & \dots & z_{l-1}^{l-2} & z_l^{l-2} \\ z_1^{l-1} & z_2^{l-1} & \dots & z_{l-1}^{l-1} & z_l^{l-1} \end{pmatrix},$$

a x, b sú matice typu $l \times 1$, pričom v riadku $k \in [1,l]$ má (neznáma) matica x prvok x_k a matica b prvok $\tilde{y}_{k-1}$. Pretože determinant matice A je známy Vandermondov determinant $V\left(\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=1}^{l}(z_k)\right) = \prod_{p=1}^{l-1} \prod_{q=p+1}^{l}(z_p - z_q) \neq 0$, sústava je (dokonca jednoznačne) riešiteľná, teda existuje $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=1}^{l}(\tilde{x}_k) \in \mathbb{C}^l$ tak, že pre každé $n \in [0, l-1]$ je $\sum_{k=1}^{l} z_k^n \tilde{x}_k = \tilde{y}_n$. Podľa toho, čo sme už dokázali, $\{\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n\}_{n=0}^{\infty}$ je partikulárne riešenie DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$. Pretože $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ a $\{\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n\}_{n=0}^{\infty}$ sú partikulárne riešenia DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$ a zhodujú sa v počiatočnom úseku dĺžky l, podľa lemy 1.12 musia byť totožné; to znamená, že pre každé $n \in [0, \infty)$ je $\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n = \tilde{y}_n$ a aj podmienka (ii) definície partikulárneho riešenia DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j)$ je splnená. V súlade s Cramerovým pravidlom pritom $\tilde{x}_k = \frac{\det A_k}{\det A}$, kde

$$A_k := \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & \tilde{y}_0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{k-1} & \tilde{y}_1 & z_{k+1} & \dots & z_{l-1} & z_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ z_1^{l-2} & z_2^{l-2} & \dots & z_{k-1}^{l-2} & \tilde{y}_{l-2} & z_{k+1}^{l-2} & z_{l-1}^{l-2} & \dots & z_l^{k-2} \\ z_1^{l-1} & z_2^{l-1} & \dots & z_{k-1}^{l-1} & \tilde{y}_{l-1} & z_{k+1}^{l-1} & z_{l-1}^{l-1} & \dots & z_l^{k-1} \end{pmatrix}.$$

2. Ak $\tilde{y}_n = 0$ pre $n \in [0, l-2]$ a $\tilde{y}_{l-1} = 1$, rozvinutím $\det A_k$ podľa stĺpca k dostávame $\det A_k = (-1)^{l+k} V\left(\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{l}(z_j)\right) = (-1)^{l+k} \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{l-1} \prod_{\substack{q=p+1 \\ q \neq k}}^{l} (z_p - z_q) \neq 0$, a tak $\tilde{x}_k \neq 0$ pre každé $k \in [1, l]$. ■

1.4 Vektorové priestory

Reálny vektorový priestor je neprázdna množina $\mathcal{X}$ *vektorov* spolu s binárnou operáciou *sčítania* vektorov a so zobrazením z $\mathbb{R} \times \mathcal{X}$ do $\mathcal{X}$ (*násobenie vektora reálnym číslom*), ktoré spĺňajú doleuvedené axiómy (V_1)–(V_8). Ak $x, y \in \mathcal{X}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$, výsledok sčítania vektorov x a y sa označuje $x + y$ a výsledok násobenia vektora x číslom α sa označuje αx.

(V_1) $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ $(x + y) + z = x + (y + z)$;
(V_2) $\forall x, y \in \mathcal{X}$ $x + y = y + x$;
(V_3) $\exists o \in \mathcal{X}$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $x + o = x$;
(V_4) $\forall x \in \mathcal{X}$ $x + (-1)x = o$;
(V_5) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\forall x, y \in \mathcal{X}$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
(V_6) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
(V_7) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathcal{X}$ $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;
(V_8) $\forall x \in \mathcal{X}$ $1x = x$.

Sčítanie vektorov je teda asociatívne (V_1), komutatívne (V_2), *nulový* vektor o (z (V_3) vyplýva, že je určený jednoznačne) je *neutrálny* vzhľadom na sčítanie (V_3) a vektor $(-1)x$ je *opačný* k vektoru x vzhľadom na sčítanie (V_4). Sčítanie vektorov je možné prirodzene zovšeobecniť pre ľubovoľný konečný počet vektorov. Ak $k \in [0, \infty)$, $x = \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{k}(x_j) \in \mathcal{X}^k$ a $l \in [0, k]$, tak l-tý *čiastočný súčet* postupnosti vektorov x je vektor $\sum_{j=1}^{l} x_j \in \mathcal{X}$ definovaný rekurentne:

$$\sum_{j=1}^{0} x_j := o, \quad \sum_{j=1}^{l} x_j := \left(\sum_{j=1}^{l-1} x_j\right) + x_l \quad \text{pre } l \in [1, k].$$

Súčet postupnosti vektorov x je vektor $\sum_{j=1}^{k} x_j$. Z asociatívnosti a komutatívnosti sčítania vektorov vyplýva, že pre ľubovoľnú bijekciu $\pi \in [1, k]^{[1,k]}$ platí $\sum_{j=1}^{k} x_{\pi(j)} = \sum_{j=1}^{k} x_j$.

Postupnosť vektorov $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{k}(x_j) \in \mathcal{X}^k$ je *lineárne nezávislá*, ak platí

$$\forall \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{k}(\alpha_j) \in \mathbb{R}^k \ \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j = o \Rightarrow (\forall j \in [1, k]\ \alpha_j = 0)\right).$$

Konečná postupnosť vektorov je *lineárne závislá*, ak nie je lineárne nezávislá. Z definície bezprostredne vyplýva, že prázdna postupnosť vektorov ( ) je lineárne nezávislá. Pre každý reálny vektorový priestor $\mathcal{X}$ preto nastáva práve jedna z nasledovných dvoch možností:

(i) Pre každé $k \in [0, \infty)$ existuje v $\mathcal{X}^k$ postupnosť, ktorá je lineárne nezávislá. V takom prípade $\mathcal{X}$ je *nekonečnerozmerný* reálny vektorový priestor.

(ii) Existuje také $k \in [0, \infty)$ a postupnosť v $\mathcal{X}^k$, ktorá je lineárne nezávislá, pričom každá postupnosť v $\mathcal{X}^{k+1}$ už je lineárne závislá. Vtedy $\mathcal{X}$ je *k-rozmerný* reálny vektorový priestor. *Rozmer* priestoru $\mathcal{X}$ je k a ide o *konečnerozmerný* reálny vektorový priestor.

Postupnosť $x = \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{k}(x_j) \in \mathcal{X}^l$ je *báza* konečnerozmerného reálneho vektorového priestoru $\mathcal{X}$, ak je lineárne nezávislá a pre každý vektor $y \in \mathcal{X}$ existuje taká postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{k}(\alpha_j) \in \mathbb{R}^l$, že $y = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_j$. Ľahko sa vidí, že postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{k}(\alpha_j)$ je jednoznačne priradená k vektoru y; jej členy sú *súradnice* vektora y v báze x. Dá sa dokázať, že každá báza konečnerozmerného reálneho vektorového priestoru má dĺžku rovnú rozmeru priestoru.

Za *podpriestor* reálneho vektorového priestoru $\mathcal{X}$ pokladáme množinu $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, ktorá je uzavretá vzhľadom na sčítanie a na násobenie reálnym číslom.

Pre každé $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}$ a každé $\alpha \in \mathbb{R}$ v takom prípade platí $y_1 + y_2 \in \mathcal{Y}$ a $\alpha y_1 \in \mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}$ je teda reálny vektorový priestor (v ktorom sú sčítanie vektorov a súčin reálneho čísla s vektorom „zdedené“ z $\mathcal{X}$).

Komplexný vektorový priestor dostaneme, ak v definícii reálneho vektorového priestoru zameníme $\mathbb{R}$ za $\mathbb{C}$. Terminológia reálnych vektorových priestorov sa pritom prirodzene prenáša do komplexných vektorových priestorov. Štandardné príklady reálnych, resp. komplexných vektorových priestorov sú $\mathbb{R}^k$ (*euklidovský* priestor), resp. $\mathbb{C}^k$.

1.5 Matice

Nech $m, n \in [1, \infty)$ a $\mathbb{M} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. *Matica typu* $m \times n$ *s prvkami z* $\mathbb{M}$ je zobrazenie z množiny $[1, m] \times [1, n]$ do $\mathbb{M}$ znázornené pomocou obdĺžikovej tabuľky a m riadkami a n stĺpcami, ktorá má na priesečníku r-tého riadku a s-tého stĺpca obraz usporiadanej dvojice (r, s). Ľahko sa overí, že množina $\mathbb{M}(m, n)$ všetkých matíc typu $m \times n$ s prvkami z $\mathbb{M}$ (s bežne definovaným sčítaním matíc a súčinom čísla z $\mathbb{M}$ s maticou) je vektorový priestor, a to reálny (ak $\mathbb{M} = \mathbb{R}$), resp. komplexný (ak $\mathbb{M} = \mathbb{C}$).

Nech $r \in [1, m]$, $s \in [1, n]$, $\emptyset \neq J \subseteq [1, m]$, $\emptyset \neq K \subseteq [1, n]$ a $A \in \mathbb{M}(m, n)$. Ako $(A)_{r,s}$ označujeme *prvok* matice A v r-tom riadku a s-tom stĺpci (teda obraz usporiadanej dvojice (r, s) vzhľadom na A) a ako $A(J, K)$ *podmaticu* matice A typu $|I| \times |J|$ vytvorenú z prvkov $(A)_{j,k}$, kde $j \in J$ a $k \in K$, pričom usporiadanie prvkov v riadkoch a stĺpcoch sa prenáša z matice A do matice $A(J, K)$. To znamená, že maticu $A(J, K)$ získame z matice A vo dvoch krokoch: najprv z matice A odstránime všetky riadky s indexmi z množiny $[1, m] - J$ a potom z novovytvorenej matice odstránime všetky stĺpce s indexmi z množiny $[1, n] - K$. Matica A^{T} *transponovaná* k matici A je matica typu $n \times m$ s prvkami $(A^{\mathrm{T}})_{j,k} = (A)_{k,j}$. *Súčin* matice A s maticou $B \in \mathbb{M}(n, p)$, $p \in [1, \infty)$, je matica $AB \in \mathbb{M}(m, p)$, ktorej prvky sú definované ako

$$(AB)_{j,l} := \sum_{k=1}^{n} (A)_{j,k} (B)_{k,l}.$$

Priraďme matici $A \in \mathbb{M}(n, 1)$ postupnosť $\overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{\Gamma}}}((A)_{j,1}) \in \mathbb{M}^n$. Dostávame tým bijektívne zobrazenie nosiča vektorového priestoru $\mathbb{M}(n, 1)$ na nosič $\mathbb{M}^n$ metrického priestoru $(\mathbb{M}^n, d)$. Za d môžeme zvoliť okrem iného euklidovskú metriku

$$d(\overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{\Gamma}}}(x_j), \overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{\Gamma}}}(y_j)) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2 \right)^{1/2}.$$

To znamená, že pri analýze matíc z $\mathbb{R}(n, 1)$ môžeme alternatívne využívať aj poznatky o euklidovskom priestore $\mathbb{R}^n$.

Štvorcová matica má počet riadkov rovný počtu stĺpcov. *Determinant* matice $A \in \mathbb{C}(n, n)$ je číslo

$$\det A := \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \sigma(\pi) \prod_{j=1}^{n} (A)_{j,\pi(j)},$$

kde sumácia prebieha cez množinu $\mathcal{S}_n$ všetkých bijekcií z $[1, n]^{[1,n]}$ (*permutácií* množiny $[1, n]$) a *znamienko permutácie* π je $\sigma(\pi) := (-1)^{\varepsilon(\pi)}$, pričom

$$\varepsilon(\pi) := |\{(j, k) \in [1, n]^2 : j < k \wedge \pi(j) > \pi(k)\}|$$

je počet *inverzií permutácie* π. Ak $n \geq 2$, determinant matice A môžeme vypočítať *rozvojom podľa l-tého stĺpca*, $l \in [1, n]$, čo predstavuje redukciu na determinanty matíc z $\mathbb{C}(n - 1, n - 1)$:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+l} \det A([1, n] - \{j\}, [1, n] - \{l\}).$$

Ak aj $B \in \mathbb{C}(n, n)$, tak $\det(AB) = \det A \det B$. Matica A je *regulárna*, ak $\det A \neq 0$. V takom prípade existuje (jednoznačne určená) matica $A^{-1} \in \mathbb{C}(n, n)$ *inverzná* k matici A, t. j. matica spĺňajúca $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Regulárna matica A je *ortogonálna*, ak $A^{-1} = A^{\mathrm{T}}$. Matica A je *symetrická*, ak $A^{\mathrm{T}} = A$.

Nech $n \in [1, \infty)$ a nech $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{n} (d_j) \in \mathbb{C}^n$. Ako $\operatorname{diag} \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{n} (d_j)$ budeme označovať *diagonálnu* maticu $D \in \mathbb{C}(n, n)$, v ktorej $(D)_{j,k} := d_j \delta_{j,k}$ pre každé $j, k \in [1, n]$. Vynásobiť maticu $A \in \mathbb{C}(n, n)$ zľava diagonálnou maticou D je jednoduché, lebo $(DA)_{j,k} = (D)_{j,j}(A)_{j,k}$ pre každé $j, k \in [1, n]$.

Pre $p, q \in [1, n]$ nech $P_n^{p,q} \in \mathbb{R}(n, n)$ označuje *permutačnú* maticu s parametrami n, p, q. Tá je definovaná nasledovne: ak $p = q$, tak $P_n^{p,q} := I_n$ a ak $p \neq q$, tak

$$\begin{aligned} (P_n^{p,q})_{p,p} := 0, \quad (P_n^{p,q})_{q,q} := 0 \\ (P_n^{p,q})_{p,q} := 1, \quad (P_n^{p,q})_{q,p} := 1 \\ (j, k) \in [1, n]^2 - \{(p, p), (p, q), (q, p), (q, q)\} \Rightarrow (P_n^{p,q})_{j,k} := \delta_{j,k}. \end{aligned}$$

Ľahko sa overí že $\det P_n^{p,q} = 1$ a násobenie matice $A \in \mathbb{C}(n, n)$ zľava maticou $P_n^{p,q}$ má za efekt vzájomnú výmenu riadkov p a q v matici A.

Matica $A \in \mathbb{C}(n, n)$ je *dolná trojuholníková*, ak všetky jej *naddiagonálne* prvky (tie nad *hlavnou* diagonálou, teda s riadkovým indexom menším než je stĺpcový) sú nulové; analogicky je definovaná *horná trojuholníková* matica (s nulovými *poddiagonálnymi* prvkami). Množinu všetkých dolných (horných) trojuholníkových matíc z $\mathbb{M}(n,n)$, $\mathbb{M} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, označujeme $\mathbb{M}_\Delta(n,n)$, resp. $\mathbb{M}^\Delta(n,n)$. $\mathbb{M}^1_\Delta(n,n)$ je podmnožina $\mathbb{M}_\Delta(n,n)$ tvorená všetkými tými maticami, ktoré majú každý diagonálny prvok rovný 1. Ak $A \in \mathbb{C}_\Delta(n,n) \cup \mathbb{C}^\Delta(n,n)$, ľahko sa vidí, že $\det A = \prod_{j=1}^n (A)_{j,j}$.

Nech $\mathbb{M}(\overset{\alpha}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(j_p); \overset{\beta}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(k_p))$ je množina všetkých blokových matíc s prvkami z $\mathbb{M}$, ktorých blokové riadky majú rozmery tvoriace postupnosť $\overset{\alpha}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(j_p)$ a blokové stĺpce zasa postupnosť $\overset{\beta}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(k_p)$. Ak $A \in \mathbb{M}(\overset{\alpha}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(j_p); \overset{\beta}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(k_p))$ a $s \in [1,\beta]$, $[A]_{r,s}$ označuje blok matice A v r-tom blokovom riadku a s-tom blokovom stĺpci (typu $j_r \times k_s$). Blokovú maticu $A \in \mathbb{M}(\overset{\alpha}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(j_p); \overset{\beta}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(k_p))$ možno násobiť sprava blokovou maticou $B \in \mathbb{M}(\overset{\beta}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(k_l); \overset{\gamma}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(l_p))$. Výsledkom násobenia je bloková matica $AB \in \mathbb{M}(\overset{\alpha}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(j_p); \overset{\gamma}{\underset{p=1}{\mathbf{\Gamma}}}(l_p))$ spĺňajúca $[AB]_{r,t} = \sum_{s=1}^{\beta}[A]_{r,s}[B]_{s,t}$ pre každé $r \in [1,\alpha]$ a $t \in [1,\gamma]$.

Uvážme zobrazenie $\{(b, Ab) : b \in \mathbb{C}(n,1)\}$ z $\mathbb{C}(n,1)$ do $\mathbb{C}(n,1)$. Vektor (matica) $x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}$ je *vlastný vektor* matice A, ak existuje také $\lambda \in \mathbb{C}$, že spomenuté zobrazenie transformuje vektor x na vektor λx, t. j. $Ax = \lambda x$; číslo λ je *vlastné číslo matice A zodpovedajúce vlastnému vektoru x* (zjednodušene *vlastné číslo* matice A). Pretože $(A-\lambda I_n)x = Ax - \lambda x = O_{n,1}$ a $x \neq O_{n,1}$, musí byť $\det(A-\lambda I_n) = 0$. To znamená, že vlastné čísla matice A sú totožné s nulovými bodmi *charakteristického polynómu* $\det(A-yI_n) \in \mathbb{C}[y]$ matice A. *Násobnosť* vlastného čísla λ pre maticu A je násobnosť koreňa λ charakteristického polynómu matice A. *Spektrum matice* A je množina $\mathfrak{S}(A)$ všetkých vlastných čísel matice A. *Spektrálny polomer* matice A je číslo $\rho(A) := \max(|\lambda| : \lambda \in \mathfrak{S}(A))$.

Vlastné číslo λ matice A môže zodpovedať viacerým vlastným vektorom matice A. Ak $\alpha \in \mathbb{C}$ a pre $x_1, x_2 \in \mathbb{C}(n,1)$ je $Ax_j = \lambda x_j$, $j = 1,2$, tak $A(\alpha x_1) = \lambda(\alpha x_1)$ a $A(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2)$. Preto množina všetkých vlastných vektorov matice A, ktorým zodpovedá λ, doplnená o nulový vektor $O_{n,1}$, je podpriestor komplexného vektorového priestoru $\mathbb{C}(n,1)$. Je možné dokázať, že rozmer tohto priestoru neprevyšuje násobnosť vlastného čísla λ pre maticu A. Navyše, priestory zodpovedajúce rôznym vlastným číslam matice A majú spoločný jediný vektor, a to $O_{n,1}$.

Matica $A \in \mathbb{C}(n,n)$ je *podobná* matici $B \in \mathbb{C}(n,n)$, ak existuje taká regulárna matica $P \in \mathbb{C}(n,n)$, že $B = PAP^{-1}$. Zobrazenie $\{(A, PAP^{-1}) : A \in$

$\mathbb{C}(n,n)\}$ z $\mathbb{C}(n,n)$ do $\mathbb{C}(n,n)$ je *podobnostná transformácia* sprostredkovaná maticou P. Podobnostná transformácia zachováva charakteristický polynóm matice, lebo $\det P \det P^{-1} = \det(PP^{-1}) = \det I_n = 1$ a

$$\begin{aligned}\det(PAP^{-1} - yI_n) &= \det(PAP^{-1} - PyI_nP^{-1}) = \det(P(A - yI_n)P^{-1}) \\ &= \det P \det(A - yI_n) \det P^{-1} = \det(A - yI_n).\end{aligned}$$

Pri podobnostnej transformácii sa teda zachováva aj spektrum matice, a to aj vtedy, ak ho chápeme ako multimnožinu, v ktorých sa každé vlastné číslo vyskytuje s frekvenciou rovnou svojej násobnosti pre príslušnú maticu. Postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{n}(\lambda_j)$ vlastných čísel matice A je *úplná*, ak sa v nej každé vlastné číslo vyskytuje s frekvenciou rovnou svojej násobnosti pre maticu A.

1.6 Vektorové a maticové normy

Pojem vektorovej normy je možné zaviesť pre ľubovoľný reálny, resp. komplexný vektorový priestor, my sa však v definícii obmedzíme len na priestor $\mathbb{C}(n,1)$, $n \in [1,\infty)$. *Vektorová norma* je zobrazenie $\nu \in \langle 0,\infty)^{\mathbb{C}(n,1)}$, ktoré spĺňa axiómy

(N_1) $\forall x \in \mathbb{C}(n,1)$ $(\nu(x) = 0 \Leftrightarrow x = O_{n,1})$;
(N_2) $\forall x \in \mathbb{C}(n,1)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\nu(\lambda x) = |\lambda|\nu(x)$;
(N_3) $\forall x, y \in \mathbb{C}(n,1)$ $\nu(x+y) \le \nu(x) + \nu(y)$.

Matematickou indukciou vzhľadom na m dokážeme, že pre každé $m \in [1,\infty)$ je pravdivé nasledovné zovšeobecnenie $(N_3.m)$ axiómy (N_3):

$$\forall \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{m}(x^{(j)}) \in (\mathbb{C}(n,1))^m \quad \nu\left(\sum_{j=1}^{m} x^{(j)}\right) \le \sum_{j=1}^{m} \nu(x^{(j)}).$$

Tvrdenie $(N_3.1)$ je triviálne pravdivé a tvrdenie $(N_3.2)$ je len ináč prepísaná axióma (N_3). Ak $m \in [2,\infty)$ a tvrdenie $(N_3.m)$ je pravdivé, tak pre každé $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{m}(x^{(j)}) \in (\mathbb{C}(n,1))^{m+1}$ podľa axiómy (N_3) platí

$$\begin{aligned}\nu\left(\sum_{j=1}^{m+1} x^{(j)}\right) &\le \nu\left(\sum_{j=1}^{m} x^{(j)}\right) + \nu(x^{(m+1)}) \\ &\le \sum_{j=1}^{m} \nu(x^{(j)}) + \nu(x^{(m+1)}) = \sum_{j=1}^{m+1} \nu(x^{(j)}),\end{aligned}$$

čo znamená, že aj tvrdenie $(N_3.m+1)$ je pravdivé.

Ak vektorovú normu chápeme ako zobrazenie $\nu \in \langle 0,\infty)^{(\mathbb{C}^n)}$, ide o zobrazenie, ktoré je rovnomerne spojité v celom priestore $\mathbb{C}^n$. Na to potrebujeme ukázat', že pre každé $\varepsilon \in (0,\infty)$ existuje také $\delta \in (0,\infty)$, že pre všetky $x = \overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{\Gamma}}}(x_j) \in \mathbb{C}^n$, $y = \overset{n}{\underset{j=1}{\mathbf{\Gamma}}}(y_j) \in \mathbb{C}^n$ platí

$$d(x,y) = \left[\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2\right]^{1/2} < \delta \Rightarrow |\nu(x) - \nu(y)| < \varepsilon.$$

Podl'a axiómy (N_3) je $\nu(x) = \nu(y + x - y) \leq \nu(y) + \nu(x - y)$, a preto $\nu(x) - \nu(y) \leq \nu(x - y)$. Vzájomnou zámenou argumentov x a y a využitím axiómy (N_2) dostávame $\nu(y) - \nu(x) \leq \nu(y - x) = \nu(x - y)$ a následne

$$|\nu(x) - \nu(y)| = \max(\nu(x) - \nu(y), \nu(y) - \nu(x)) \leq \nu(x - y). \tag{1.1}$$

Ak položíme

$$e_j^n := (0)^{j-1}(1)(0)^{n-j} \in \mathbb{C}^n,\ j \in [1,n],$$

tak podl'a axiómy(N_1) je

$$\sigma := \sum_{j=1}^{n} \nu(e_j^n) > 0.$$

Ak $d(x,y) < \delta$, tak pre každé $j \in [1,n]$ je

$$|x_j - y_j| = [(x_j - y_j)^2]^{1/2} \leq d(x,y) < \delta,$$

a preto podl'a $(N_3.n)$ a (N_2) je

$$\begin{aligned}\nu(x-y) &= \nu\left(\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)e_j^n\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{n}\nu((x_j - y_j)e_j^n) = \sum_{j=1}^{n}|x_j - y_j|\nu(e_j^n) < \sum_{j=1}^{n}\delta\nu(e_j^n) = \delta\sigma.\end{aligned}$$

Vzhl'adom na (1.1) teda stačí vziat' $\delta := \frac{\varepsilon}{\sigma} \in (0,\infty)$ a rovnomerná spojitost' zobrazenia ν v celom priestore $\mathbb{C}^n$ je dokázaná.

Ak $p \in \langle 1,\infty)$, je možné overit', že zobrazenie $\nu_p \in \langle 0,\infty)^{\mathbb{C}(n,1)}$, ktoré je určené predpisom

$$\nu_p(x) := \left(\sum_{j=1}^{n}|(x)_{j,1}|^p\right)^{1/p},$$

je vektorová norma. V prípade $p = 1$ ide o *oktaédrickú* normu a v prípade $p = 2$ o *euklidovskú* normu $\nu_2(x)$; máme teda

$$\nu_1(x) = \sum_{j=1}^{n} |(x)_{j,1}|,$$
$$\nu_2(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} |(x)_{j,1}|^2\right)^{1/2}.$$

Limitným prípadom normy ν_p pre $p \to \infty$ je *kubická* norma

$$\nu_\infty(x) := \max(|(x)_{j,1}| : j \in [1, n]).$$

Nech $\nu \in \langle 0, \infty)^{\mathbb{C}(n,1)}$ je vektorová norma a nech $\tilde{\nu} \in \langle 0, \infty\rangle^{\mathbb{C}(n,n)}$ je zobrazenie určené predpisom

$$\tilde{\nu}(A) := \sup\left(\frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} : x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}\right). \tag{1.2}$$

Význam tohto zobrazenia vyplýva z toho, že je prirodzeným horným ohraničením pre spektrálny polomer. Platí totiž:

Veta 1.14 *Ak $n \in [1, \infty)$, $A \in \mathbb{C}(n, n)$ a $\nu \in \langle 0, \infty)^{\mathbb{C}(n,1)}$ je vektorová norma, tak $\rho(A) \leq \tilde{\nu}(A)$.*

Dôkaz. Nech $\lambda \in \mathfrak{S}(A)$, pričom $|\lambda| = \rho(A)$, a nech $x_\lambda \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}$ je vlastný vektor prislúchajúci vlastnému číslu λ. V súlade s (1.2) a axiómou (N_2) potom máme

$$\tilde{\nu}(A) \geq \frac{\nu(Ax_\lambda)}{\nu(x_\lambda)} = \frac{\nu(\lambda x_\lambda)}{\nu(x_\lambda)} = \frac{|\lambda|\nu(x_\lambda)}{\nu(x_\lambda)} = |\lambda| = \rho(A). \quad \blacksquare$$

Ak $x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}$, tak $\nu(x) > 0$, pre $y := \frac{1}{\nu(x)}x \in \mathbb{C}(n,1)$ platí

$$\nu(y) = \nu\left(\frac{1}{\nu(x)}x\right) = \frac{1}{\nu(x)} \cdot \nu(x) = 1,$$
$$\frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} = \nu\left(\frac{1}{\nu(x)}Ax\right) = \nu\left(A\left(\frac{1}{\nu(x)}x\right)\right) = \nu(Ay),$$

a tak zrejme

$$\tilde{\nu}(A) = \sup(\nu(Ay) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1). \tag{1.3}$$

L'ahko sa overí, že zobrazenie $\{(x, Ax) : x \in \mathbb{C}(n,1)\}$ je spojité zobrazenie z $\mathbb{C}(n,1)$ do $\mathbb{C}(n,1)$ (prvky matice A sú konštantné, nezávisia od x), preto $\{(x, \nu(Ax)) : x \in \mathbb{C}(n,1)\}$ je spojité zobrazenie z $\mathbb{C}(n,1)$ do $\langle 0, \infty)$. Množina

$$S_n(\mathbb{C}) := \{x \in \mathbb{C}(n,1) : \nu_2(x) = 1\}$$

(chápaná ako jednotková sféra v priestore $\mathbb{C}^n$) je ohraničená a uzavretá. Pretože ν je spojité zobrazenie a $\nu(x) > 0$ pre každé $x \in S_n(\mathbb{C})$, $\nu(x)$ nadobúda minimum na množine $S_n(\mathbb{C})$ a platí

$$\min(\nu(x) : x \in S_n(\mathbb{C})) > 0.$$

Lema 1.15 *Ak $n \in [1, \infty)$ a $\nu \in \langle 0, \infty)^{\mathbb{C}(n,1)}$ je vektorová norma, tak pre každé $y \in \mathbb{C}(n,1)$, pre ktoré je $\nu(y) = 1$, platí $\nu_2(y) \leq (\min(\nu(x) : x \in S_n(\mathbb{C})))^{-1}$.*

Dôkaz. Ak $\nu(y) = 1$, tak $y \neq O_{n,1}$ a $\rho := \nu_2(y) > 0$. Pre $y' := \rho^{-1} y$ máme

$$\sum_{j=1}^{n} |(y')_{j,1}|^2 = \rho^{-2} \sum_{j=1}^{n} |(y)_{j,1}|^2 = \rho^{-2} \rho^2 = 1,$$

preto $\nu_2(y') = 1$, $y' \in S_n(\mathbb{C})$,

$$\min(\nu(x) : x \in S_n(\mathbb{C})) \leq \nu(y') = \rho^{-1} \nu(y) = \rho^{-1},$$

a odtiaľ už dostávame dokazovanú nerovnosť. ■

Zo spojitosti normy ν sa ľahko vidí, že množina

$$S_\nu := \{y \in \mathbb{C}(n,1) : \nu(y) = 1\}$$

je uzavretá (lebo jej komplement $\mathbb{C}(n,1) - S_\nu$ je otvorená množina). Keďže podľa lemy 1.15 je aj ohraničená, spojitá funkcia $\nu(Ay)$ na nej nadobúda maximum. S ohľadom na (1.3) preto máme

$$\tilde{\nu}(A) = \max(\nu(Ay) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1) \in \langle 0, \infty). \tag{1.4}$$

Rozšírenou analógiou vektorovej normy je *maticová norma* ako zobrazenie $\mu \in \langle 0, \infty)^{\mathbb{C}(n,n)}$, ktoré spĺňa axiómy

(M_1) $\forall A \in \mathbb{C}(n,n)$ $(\mu(A) = 0 \Leftrightarrow A = O_{n,n})$;
(M_2) $\forall A \in \mathbb{C}(n,n)$ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\mu(\lambda A) = |\lambda| \mu(A)$;
(M_3) $\forall A, B \in \mathbb{C}(n,n)$ $\mu(A + B) \leq \mu(A) + \mu(B)$;
(M_4) $\forall A, B \in \mathbb{C}(n,n)$ $\mu(AB) \leq \mu(A)\mu(B)$.

Ukážeme, že ak $\nu \in \langle 0, \infty)^{\mathbb{C}(n,1)}$ je vektorová norma, tak $\tilde{\nu} \in \langle 0, \infty)^{\mathbb{C}(n,n)}$ je maticová norma. Ak $x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}$, na základe (N_1) je $\nu(O_{n,n}x) = \nu(O_{n,1}) = 0$ a následne $\tilde{\nu}(O_{n,n}) = 0$. Ak $A \in \mathbb{C}(n,n) - \{O_{n,n}\}$, $(A)_{j,k} \neq 0$ a matica $e_k^n \in \mathbb{C}(n,1)$ je určená tým, že $(e_k^n)_{l,1} := \delta_{k,l}$ pre všetky $l \in [1,n]$, tak $e_k^n \neq O_{n,1}$, $\nu(e_k^n) > 0$,

$$(Ae_k^n)_{j,1} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{j,l}(e_k^n)_{l,1} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{j,l}\delta_{k,l} = (A)_{j,k} \neq 0,$$

preto $Ae_k^n \neq O_{n,1}$, $\nu(Ae_k^n) > 0$ a v súlade s definíciou

$$\tilde{\nu}(A) = \sup\left(\frac{\nu(Ax)}{\nu(x)} : x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}\right) \geq \frac{\nu(Ae_k^n)}{\nu(e_k^n)} > 0;$$

axióma (M_1) teda platí.

Ak $\lambda \in \mathbb{C}$, z (N_2) a (1.4) dostávame

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(\lambda A) &= \max(\nu(\lambda Ay) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1)\\ &= \max(|\lambda|\nu(Ay) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1)\\ &= |\lambda| \max(\nu(Ay) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1) = |\lambda|\tilde{\nu}(A),\end{aligned}$$

a tým je ukázaná platnosť axiómy (M_2).

Ak $A, B \in \mathbb{C}(n,n)$, z (N_3) vyplýva, že

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(A+B) &= \max(\nu((A+B)y) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1)\\ &\leq \max(\nu(Ay) + \nu(By) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1)\\ &\leq \max(\nu(Ay) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1)\\ &\quad + \max(\nu(By) : y \in \mathbb{C}(n,1), \nu(y) = 1) = \tilde{\nu}(A) + \tilde{\nu}(B),\end{aligned}$$

axióma (M_3) je teda tiež splnená.

Napokon pre $A, B \in \mathbb{C}(n,n)$ z nerovnosti $\tilde{\nu}(Ax) \leq \tilde{\nu}(A)\nu(x)$, ktorá platí pre každé $x \in \mathbb{C}(n,1)$, získavame

$$\begin{aligned}\tilde{\nu}(AB) &= \sup\left(\frac{\nu(ABx)}{\nu(x)} : x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}\right)\\ &\leq \sup\left(\frac{\tilde{\nu}(A)\nu(Bx)}{\nu(x)} : x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}\right)\\ &= \tilde{\nu}(A)\sup\left(\frac{\nu(Bx)}{\nu(x)} : x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}\right) = \tilde{\nu}(A)\tilde{\nu}(B),\end{aligned}$$

a dokázali sme aj axiómu (M_4).

Maticovú normu $\tilde{\nu}$ nazývame maticovou normou *generovanou* vektorovou normou ν.

Veta 1.16 *Ak $n \in [1, \infty)$ a $A \in \mathbb{C}(n, n)$, tak*
1. $\tilde{\nu}_1(A) = \max(\sum_{j=1}^{n} |(A)_{j,k}| : k \in [1, n])$;
2. $\tilde{\nu}_\infty(A) = \max(\sum_{k=1}^{n} |(A)_{j,k}| : j \in [1, n])$.

Dôkaz. 1. Položme

$$\sigma_1(A) := \max(\sum_{j=1}^{n} |(A)_{j,k}| : k \in [1, n]).$$

Potom pre ľubovoľné $x \in \mathbb{C}(n, 1)$ je

$$\begin{aligned}\nu_1(Ax) &= \sum_{j=1}^{n} |(Ax)_{j,1}| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (A)_{j,k}(x)_{k,1} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |(A)_{j,k}||(x)_{k,1}| = \sum_{k=1}^{n} |(x)_{k,1}| \sum_{j=1}^{n} |(A)_{j,k}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} (|(x)_{k,1}|\sigma_1(A)) = \sigma_1(A) \sum_{k=1}^{n} |(x)_{k,1}| = \sigma_1(A)\nu_1(x).\end{aligned}$$

Ak je navyše $x \neq O_{n,1}$, tak $\nu_1(x) > 0$, $\frac{\nu_1(Ax)}{\nu_1(x)} \leq \sigma_1(A)$, a preto

$$\tilde{\nu}_1(A) = \sup \left(\frac{\nu_1(Ax)}{\nu_1(x)} : x \in \mathbb{C}(n, 1) - \{O_{n,1}\} \right) \leq \sigma_1(A). \tag{1.5}$$

Ďalej nech $p \in [1, n]$ je také, že

$$\sigma_1(A) = \sum_{j=1}^{n} |(A)_{j,p}|$$

a nech $x_1 \in \mathbb{C}(n, 1)$, pričom

$$\forall j \in [1, n] \ (x_1)_{j,1} := \delta_{j,p}.$$

Potom platí $\nu_1(x_1) = 1$,

$$\nu_1(Ax_1) = \sum_{j=1}^{n} |(Ax_1)_{j,1}| = \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} (A)_{j,k}\delta_{k,p} \right| = \sum_{j=1}^{n} |(A)_{j,p}| = \sigma_1(A)\nu_1(x_1),$$

na základe definície (1.2) je

$$\tilde{\nu}_1(A) \geq \frac{\nu_1(Ax_1)}{\nu_1(x_1)} = \sigma_1(A)$$

a z (1.5) dostávame

$$\tilde{\nu}_1(A) = \sigma_1(A) = \max\left(\sum_{j=1}^{n} |(A)_{j,k}| : k \in [1,n]\right).$$

2. Označme

$$\sigma_\infty(A) := \max\left(\sum_{k=1}^{n} |(A)_{j,k}| : j \in [1,n]\right).$$

Potom pre každé $x \in \mathbb{C}(n,1)$ je

$$\begin{aligned}
\nu_\infty(Ax) &= \max(|(Ax)_{j,1}| : j \in [1,n]) = \max\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(A)_{j,k}(x)_{k,1}\right| : j \in [1,n]\right) \\
&\leq \max\left(\sum_{k=1}^{n} |(A)_{j,k}||(x)_{k,1}| : j \in [1,n]\right) \\
&\leq \max\left(\sum_{k=1}^{n} |(A)_{j,k}| \max(|(x)_{l,1}| : l \in [1,n]) : j \in [1,n]\right) \\
&= \nu_\infty(x) \max\left(\sum_{k=1}^{n} |(A)_{j,k}| : j \in [1,n]\right) = \nu_\infty(x)\sigma_\infty(A).
\end{aligned}$$

Pri dodatočnom predpoklade $x \neq O_{n,1}$ je $\nu_\infty(x) > 0$, $\frac{\nu_\infty(Ax)}{\nu_\infty(x)} \leq \sigma_\infty(A)$, a tak

$$\tilde{\nu}_\infty(A) = \sup\left(\frac{\nu_\infty(Ax)}{\nu_\infty(x)} : x \in \mathbb{C}(n,1) - \{O_{n,1}\}\right) \leq \sigma_\infty(A). \tag{1.6}$$

Nech $q \in [1,n]$ je také, že

$$\sigma_\infty(A) = \sum_{j=1}^{n} |(A)_{q,j}|$$

a nech $x_\infty \in \mathbb{C}(n,1)$, pričom

$$(x_\infty)_{j,1} := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & (A)_{q,j} = 0 \\ |(A)_{q,j}|/(A)_{q,j} & (A)_{q,j} \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Potom $\nu_\infty(x_\infty) = 1$ a pre každé $k \in [1, n]$ je $(A)_{q,k}(x_\infty)_{k,1} = |(A)_{q,k}|$. V dôsledku toho platí

$$\begin{aligned}\nu_\infty(Ax_\infty) &= \max\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(A)_{j,k}(x_\infty)_{k,1}\right| : j \in [1, n]\right)\\ &\geq \left|\sum_{k=1}^{n}(A)_{q,k}(x_\infty)_{k,1}\right| = \sum_{k=1}^{n}|(A)_{q,k}| = \sigma_\infty(A)\nu_\infty(x_\infty),\end{aligned}$$

z definície (1.2) vidíme, že

$$\tilde{\nu}_\infty(A) \geq \frac{\nu_\infty(Ax_\infty)}{\nu_\infty(x_\infty)} \geq \sigma_\infty(A),$$

a preto z (1.6) máme

$$\tilde{\nu}_\infty(A) = \sigma_\infty(A) = \max\left(\sum_{k=1}^{n}|(A)_{j,k}| : j \in [1, n]\right). \quad \blacksquare$$

Bez dôkazu ešte uveďme, že pre $n \in [1, \infty)$ a $A \in \mathbb{C}(n, n)$ je

$$\tilde{\nu}_2(A) = \rho(A^{\mathrm{T}}A) \leq \left(\sum_{j=1}\sum_{k=1}^{n}|(A)_{j,k}|^2\right)^{1/2}. \tag{1.7}$$

Kapitola 2

Interpolácia

Mnohé matematické problémy sú algoritmicky neriešiteľné. Pre prax to znamená, že vo všeobecnosti je nutné uspokojiť sa s ich približným riešením. Jednou z možností ako nájsť približné riešenie problému je nahradiť matematický objekt, ktorý v probléme vystupuje, objektom jednoduchším a riešenie nového problému (ak sme schopní ho nájsť) považovať za približné riešenie pôvodného problému.

2.1 Interpolačný polynóm

Často sa napríklad reálna funkcia reálnej premennej x nahrádza polynómom premennej x s reálnymi koeficientmi. Na to, aby približné riešenie bolo blízke ku skutočnému riešeniu (pričom pojem „byť blízkym“ chápeme v intuitívnom zmysle slova) je „zrejme“ potrebné, aby polynóm $L \in \mathbb{R}[x]$, ktorý nahrádza funkciu f, bol k nej blízky.

Jednou z možností je napríklad požadovať, aby sa hodnoty funkcií L a f zhodovali na určitej konečnej množine argumentov. V takom prípade vyberieme $n \in [0, \infty)$, množinu $\{u_i : i \in [0, n]\} \subseteq \mathbb{R}$ (jej prvky sa nazývajú *interpolačnými uzlami*), a chceme, aby pre každé $i \in [0, n]$ platilo $L(u_i) = f(u_i)$. Ľahko sa vidí, že taký polynóm nemôže byť určený jednoznačne; ak totiž L má požadované vlastnosti, tak aj polynóm $L + a\prod_{j=0}^{n}(x - u_j)$, kde $a \in \mathbb{R}[x]$, ich má. Z hľadiska minimalizácie výpočtovej náročnosti je potom prirodzená požiadavka, aby numerický stupeň polynómu L bol najmenší možný. Nasledovné tvrdenie ukazuje, že medzi polynómami s numerickým stupňom nanajvýš n je práve jeden polynóm s hodnotami predpísanými pre $n + 1$ argumentov. Vo vete sú (implicitne) prítomné len predpísané hodnoty $v_i = f(u_i)$, $i \in [0, n]$, samotná funkcia f v nej absentuje (jej hodnoty mimo interpolačných uzlov nie sú pre určenie hľadaného polynómu dôležité).

Veta 2.1 *Ak* $n \in [0, \infty)$, $\mathop{\Gamma}\limits_{i=0}^{n}(u_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *je prostá postupnosť a* $\mathop{\Gamma}\limits_{i=0}^{n}(v_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$*, tak existuje jediný polynóm* $L \in \mathbb{R}[x]$ *spĺňajúci* $\mathrm{nst}(L) \le n$ *a* $L(u_i) = v_i$ *pre každé* $i \in [0, n]$*.*

Dôkaz. Pre každé $i, j \in [0, n]$, $i \ne j$, definujme polynómy $L_{i,j}, L_i \in \mathbb{R}[x]$ nasledovne:

$$L_{i,j} := \frac{x - u_j}{u_i - u_j},$$
$$L_i := \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} L_{i,j}.$$

Je zrejmé, že potom $L_{i,j}(u_i) = 1$ a $L_{i,j}(u_j) = 0$. Preto

$$L_i(u_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} L_{i,j}(u_i) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} 1 = 1$$

a pre každé $k \in [0, n] - \{i\}$ platí

$$L_i(u_k) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} L_{i,j}(u_k) = L_{i,k}(u_k) \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i,k}}^{n} L_{i,j}(u_k) = 0.$$

To znamená, že $L_i(u_k) = \delta_{i,k}$ pre všetky $i, k \in [0, n]$.

Ľahko overíme, že polynóm

$$L := \sum_{i=0}^{n} v_i L_i = \sum_{i=0}^{n} v_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \ne i}}^{n} \frac{x - u_j}{u_i - u_j} \tag{2.1}$$

má vlastnosti požadované vo vete. Pre každé $k \in [0, n]$ je

$$L(u_k) = \sum_{i=0}^{n} v_i L_i(u_k) = \sum_{i=0}^{n} v_i \delta_{i,k} = v_k.$$

Okrem toho, podľa dôsledku 1.4.3 je $\mathrm{nst}(L_i) = n$ a $\mathrm{nst}(v_i L_i) \in \{0\} \cup \{n\}$ pre všetky $i \in [0, n]$, a tak na základe dôsledku 1.4.1 máme

$$\mathrm{nst}(L) = \mathrm{nst}\left(\sum_{i=0}^{n} v_i L_i\right) \le \max(\mathrm{nst}(v_i L_i) : i \in [0, n]) \le n.$$

Predpokladajme, že existuje taký polynóm $p \in \mathbb{R}[x] - \{L\}$, že pre každé $i \in [0,n]$ je $p(u_i) = v_i$ a $\mathrm{nst}(p) \leq n$. Všimnime si polynóm $q := L - p \in \mathbb{R}[x] - \{0\}$. Pretože pre každé $i \in [0,n]$ je $q(u_i) = L(u_i) - p(u_i) = v_i - v_i = 0$, koreňový činiteľ $x - u_i$ je deliteľom polynómu q.

Ukážme, že $\{x - u_i : i \in [0,n]\}$ je množina po dvojiciach nesúdeliteľných polynómov. Nech teda $i, j \in [0,n]$, $i \neq j$, a nech $\mathrm{nsd}(x - u_i, x - u_j) = r$. Pretože $r | x - u_i$ a $r | x - u_j$, existujú také $r_i, r_j \in \mathbb{R}[x]$, že $x - u_i = rr_i$ a $x - u_j = rr_j$, a to znamená, že polynómy r, r_i, r_j sú nenulové. Z $1 = \mathrm{nst}(x - u_k) = \mathrm{nst}(r) + \mathrm{nst}(r_k)$ pre $k \in \{i,j\}$ dostávame $\mathrm{nst}(r) = 1 - \mathrm{nst}(r_k) \in [0,1]$. Ak $\mathrm{nst}(r) = 1$, tak $\mathrm{nst}(r_i) = 0 = \mathrm{nst}(r_j)$, oba polynómy r_i, r_j sú konštantné, a tak platí rovnosť polynómov $\frac{x-u_i}{r_i} = r = \frac{x-u_j}{r_j}$. Táto rovnosť však po dosadení u_i za x vedie k tomu, že $0 = \frac{u_i-u_i}{r_i} = \frac{u_i-u_j}{r_j} \neq 0$, čo je evidentný spor. Máme teda $\mathrm{nst}(r) = 0$, a tak, keďže r je monický polynóm, dostávame $r = \mathrm{nsd}(x - u_i, x - u_j) = 1$.

Z toho, že $\{x - u_i : i \in [0,n]\}$ je množina po dvojiciach nesúdeliteľných polynómov, pričom $x - u_i | q$ pre každé $i \in [0,n]$, vyplýva, že aj $r | q$ pre polynóm $r := \prod_{i=0}^{n}(x - u_i) \in \mathbb{R}[x]$. Existuje teda taký polynóm $s \in \mathbb{R}[x]$, že $q = rs$. Keďže $q \neq 0$, je tiež $s \neq 0$, z lemy 1.3.3 a dôsledku 1.4.3 preto vyplýva

$$\mathrm{nst}(q) = \mathrm{nst}(r) + \mathrm{nst}(s) \geq \mathrm{nst}(r) = n + 1. \tag{2.2}$$

Na druhej strane, podľa lemy 1.3.2 je $\mathrm{nst}(-p) \leq \mathrm{nst}(-1) + \mathrm{nst}(p) \leq 0 + n = n$, preto z lemy 1.3.1 dostávame

$$\mathrm{nst}(q) \leq \max(\mathrm{nst}(L), \mathrm{nst}(-p)) \leq \max(n,n) = n$$

v spore s nerovnosťou (2.2). ■

Jediný polynóm $L \in \mathbb{R}[x]$, ktorý spĺňa $\mathrm{nst}(L) \leq n$ a $L(u_i) = v_i$ pre každé $i \in [0,n]$, sa nazýva *interpolačným polynómom* určeným usporiadanou dvojicou postupností $\left(\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(u_i), \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(v_i)\right)$. Jednou z možností výberu postupnosti $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(v_i)$ je položiť $v_i := f(u_i)$ pre každé $i \in [0,n]$, kde f je reálna funkcia spĺňajúca $\{u_i : i \in [0,n]\} \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Interpolačný polynóm určený usporiadanou dvojicou postupností $\left(\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(u_i), \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(f(u_i))\right)$ sa potom nazýva aj interpolačným polynómom funkcie f na *uzlovej množine* $\{u_i : i \in [0,n]\}$. Klasické označenie interpolačného polynómu písmenom L pripomína Lagrangeove zásluhy o rozvoj teórie interpolácie.

2.2 Chyba interpolačného polynómu

Ďalšia veta odpovedá na prirodzenú otázku, akej chyby sa dopúšťame (v nejakom argumente), keď funkciu nahradíme jej interpolačným polynómom na istej uzlovej množine.

Veta 2.2 *Ak* $n \in [0,\infty)$, $U = \{u_i : i \in [0,n]\} \subseteq \mathbb{R}$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, $m = \min(U \cup \{\tilde{x}\})$, $M = \max(U \cup \{\tilde{x}\})$, *funkcia* $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ *je* $(n+1)$*-krát diferencovateľná v intervale* $\langle m, M\rangle$ *a* L *je interpolačný polynóm funkcie* f *na uzlovej množine* U*, tak existuje* $\xi \in \langle m, M\rangle$ *také, že* $f(\tilde{x}) - L(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\tilde{x} - u_i)$.

Dôkaz. Ak $\tilde{x} \in U$, tak $L(\tilde{x}) = f(\tilde{x})$ a $\prod_{i=0}^{n}(\tilde{x} - u_i) = 0$, preto tvrdenie vety platí s ľubovoľným $\xi \in \langle m, M\rangle \supseteq \{\tilde{x}\}$.

V ďalšom teda môžeme predpokladať, že $\tilde{x} \notin U$. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$ označme ako f_α reálnu funkciu reálnej premennej x definovanú predpisom

$$f_\alpha(x) := f(x) - L(x) - \alpha\prod_{i=0}^{n}(x - u_i).$$

Ak $j \in [0,n]$, tak $f_\alpha(u_j) = f(u_j) - L(u_j) - \alpha\prod_{i=0}^{n}(u_j - u_i) = f(u_j) - f(u_j) - 0 = 0$. Ak $x \in \mathbb{R} - U$ a $y \in \mathbb{R}$, tak existuje $\alpha \in \mathbb{R}$, pre ktoré $f_\alpha(x) = y$, konkrétne $\alpha = \frac{f(x)-L(x)-y}{\prod_{i=0}^{n}(x-u_i)}$. Existuje teda aj také $\tilde{\alpha} \in \mathbb{R}$, že $f_{\tilde{\alpha}}(\tilde{x}) = 0$, a to

$$\tilde{\alpha} = \frac{f(\tilde{x}) - L(\tilde{x})}{\prod\limits_{i=0}^{n}(\tilde{x} - u_i)}. \tag{2.3}$$

Z predpokladov našej vety vyplýva, že funkcia $f_{\tilde{\alpha}}$ je $(n+1)$-krát diferencovateľná v intervale $\langle m, M\rangle$. Matematickou indukciou vzhľadom na k ukážeme, že pre každé $k \in [0, n+1]$ platí tvrdenie $T(k)$, podľa ktorého funkcia $f_{\tilde{\alpha}}^{(k)}$ má v intervale $\langle m, M\rangle$ aspoň $n+2-k$ nulových bodov. Každý z $n+2$ prvkov množiny $U \cup \{\tilde{x}\} \subseteq \langle m, M\rangle$ je nulový bod funkcie $f_{\tilde{\alpha}}^{(0)} = f_{\tilde{\alpha}}$, tvrdenie $T(0)$ je teda pravdivé. Predpokladajme, že $k \in [0,n]$ a existuje rastúca postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{i=0}^{n+1-k}(\xi_i^{(k)}) \in \langle m, M\rangle^{n+2-k}$ nulových bodov funkcie $g := f_{\tilde{\alpha}}^{(k)}$. Pretože $k \in [0,n]$, funkcia g je diferencovateľná v intervale $\langle m, M\rangle$. Podľa Rolleho vety potom pre každé $i \in [0, n-k]$ existuje také $\xi_i^{(k+1)} \in (\xi_i^{(k)}, \xi_{i+1}^{(k)})$, že $0 = g'(\xi_i^{(k+1)}) = f_{\tilde{\alpha}}^{(k+1)}(\xi_i^{(k+1)})$. V súlade s tým pre každé $i \in [0, n-k-1]$ máme $m \le \xi_i^{(k)} < \xi_i^{(k+1)} < \xi_{i+1}^{(k)} < \xi_{i+1}^{(k+1)} < \xi_{i+2}^{(k)} \le M$, a tak $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{i=0}^{n-k}(\xi_i^{(k+1)})$ je rastúca postupnosť. To znamená, že funkcia $f_{\tilde{\alpha}}^{(k+1)} = g'$ má aspoň $1+n-k = n+2-(k+1)$ nulových bodov v intervale $(m, M) \subseteq \langle m, M\rangle$ a tvrdenie $T(k+1)$ je pravdivé.

Na základe tvrdenia $T(n+1)$ existuje také $\xi \in \langle m, M\rangle$, že $f_{\tilde{\alpha}}^{(n+1)}(\xi) = 0$. Pretože $\mathrm{nst}(L) \leq n$, v súlade s dôsledkom 1.8 je

$$L^{(n+1)} = 0. \tag{2.4}$$

Polynóm $\prod_{i=0}^{n}(x - u_i)$ má podľa dôsledku 1.4.3 numerický stupeň $n+1$ a vedúci koeficient 1; preto podľa lemy 1.7 jeho derivácia rádu $n+1$ má numerický stupeň $n+1-(n+1) = 0$ a vedúci koeficient $1 \cdot \prod_{i=0}^{n}(n+1-i) = (n+1)!$. V súlade s tvrdením 1.9 sme teda dokázali, že

$$\left[\tilde{\alpha}\prod_{i=0}^{n}(x-u_i)\right]^{(n+1)} = \tilde{\alpha}\left[\prod_{i=0}^{n}(x-u_i)\right]^{(n+1)} = \tilde{\alpha}(n+1)!. \tag{2.5}$$

Z (2.4) a (2.5) vyplýva $0 = f_{\tilde{\alpha}}^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - 0 - \tilde{\alpha}(n+1)!$ a $\tilde{\alpha} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$. Porovnaním poslednej rovnosti s (2.3) dostávame

$$f(\tilde{x}) - L(\tilde{x}) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(\tilde{x} - u_i). \quad \blacksquare$$

2.3 Zovšeobecnený interpolačný polynóm

Zovšeobecnením interpolačného polynómu je polynóm minimálneho numerického stupňa, ktorý má v interpolačných uzloch predpísané nielen hodnoty (nulté derivácie), ale aj derivácie vyšších rádov. Ak chceme poznať deriváciu akejsi funkcie rádu $k \in [1, \infty)$, potrebujeme poznať derivácie tejto funkcie všetkých rádov nižších než k. Preto je prirodzené predpisovať derivácie (v danom interpolačnom uzle) tak, že ich rády tvoria (konečný) celočíselný interval s dolnou hranicou 0.

Postavme teraz načrtnuté zovšeobecnenie interpolácie na striktné základy. *Derivačná postupnosť* je ľubovoľná neprázdna konečná postupnosť, ktorej členy sú neprázdne konečné postupnosti reálnych čísel. Nech $\mathcal{D}$ označuje množinu všetkých derivačných postupností. *Rád* derivačnej postupnosti $v = \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}\left(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=0}^{r_i}\left(v_i^{(j)}\right)\right) \in \mathcal{D}$ je nezáporné celé číslo $r(v) := \max(r_i : i \in [0, n])$.

Veta 2.3 *Ak* $n \in [0, \infty)$, $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(u_i) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *je prostá postupnosť a postupnosť* $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}\left(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=0}^{r_i}\left(v_i^{(j)}\right)\right)$ *patrí do* $\mathcal{D}$, *tak existuje jediný polynóm* $H \in \mathbb{R}[x]$, *pre ktorý platí* $\mathrm{nst}(H) \leq n + \sum_{i=0}^{n} r_i$ *a* $H^{(j)}(u_i) = v_i^{(j)}$ *pre každé* $i \in [0, n]$ *a* $j \in [0, r_i]$.

Dôkaz. Vetu dokážeme matematickou indukciou vzhľadom na $r(v)$, kde $v := \underset{i=0}{\overset{n}{\mathbf{\Gamma}}}\left(\underset{j=0}{\overset{r_i}{\mathbf{\Gamma}}}\left(v_i^{(j)}\right)\right)$. Ak $r(v) = 0$, tak $r_i = 0$ pre každé $i \in [0, n]$ a $n + \sum_{i=0}^{n} r_i = n$. Keďže $H^{(0)}(u_i) = H(u_i)$, v tomto prípade stačí použiť vetu 2.1 (o existencii a jednoznačnosti interpolačného polynómu).

Predpokladajme teda, že $r(v) \geq 1$ a tvrdenie vety platí pre každú postupnosť $\hat{v} \in \mathcal{D}$, pre ktorú $r(\hat{v}) = r(v) - 1$. Pre $i \in [0, n]$ definujme $\tilde{r}_i$ nasledovne:

$$\tilde{r}_i := \left\{ \begin{array}{ll} r_i - 1 & \text{ak } r_i = r(v), \\ r_i & \text{ak } r_i \leq r(v) - 1 \end{array} \right\}.$$

Pre $\tilde{v} := \underset{i=0}{\overset{n}{\mathbf{\Gamma}}}\left(\underset{j=0}{\overset{\tilde{r}_i}{\mathbf{\Gamma}}}\left(v_i^{(j)}\right)\right) \in \mathcal{D}$ máme $r(\tilde{v}) = r(v) - 1$, a tak podľa indukčného predpokladu existuje polynóm $\tilde{H} \in \mathbb{R}[x]$ spĺňajúci $\text{nst}(\tilde{H}) \leq n + \sum_{i=0}^{n} \tilde{r}_i$ a $\tilde{H}^{(j)}(u_i) = v_i^{(j)}$ pre každé $i \in [0, n]$ a $j \in [0, \tilde{r}_i] \subseteq [0, r_i]$.

Ak hľadaný polynóm H existuje, tak pre polynóm $g := H - \tilde{H}$ platí $g^{(j)}(u_i) = H^{(j)}(u_i) - \tilde{H}^{(j)}(u_i) = v_i^{(j)} - v_i^{(j)} = 0$ pre každé $i \in [0, n]$ a $j \in [0, \tilde{r}_i] \subseteq [0, r_i]$. Podľa lemy 1.6 to znamená, že $(x - u_i)^{\tilde{r}_i + 1} | g$, z nerovnosti $\tilde{r}_i + 1 \geq r_i$ preto máme $(x - u_i)^{r_i} | g$ pre každé $i \in [0, n]$. V dôkaze vety 2.1 sme videli, že $\{x - u_i : i \in [0, n]\}$ je množina po dvojiciach nesúdeliteľných polynómov. Preto pre $i, j \in [0, n]$, $i \neq j$, platí tiež

$$\text{nsd}((x - u_i)^{r_i}, (x - u_j)^{r_j}) = (\text{nsd}(x - u_i, x - u_j))^{\min(r_i, r_j)} = 1,$$

a tak aj $\{(x - u_i)^{r_i} : i \in [0, n]\}$ je množina po dvojiciach nesúdeliteľných polynómov. V súlade s tým $\prod_{i=0}^{n}(x - u_i)^{r_i} | g$ a existuje taký polynóm $f \in \mathbb{R}[x]$, že $g = f \prod_{i=0}^{n}(x - u_i)^{r_i}$. Podľa lemy 1.5.2 platí

$$g^{(r_k)}(u_k) = r_k! f(u_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (u_k - u_i)^{r_i},$$

a keďže $g^{(r_k)}(u_k) = H^{(r_k)}(u_k) - \tilde{H}^{(r_k)}(u_k) = v_k^{(r_k)} - \tilde{H}^{(r_k)}(u_k)$, máme tiež

$$f(u_k) = \frac{v_k^{(r_k)} - \tilde{H}^{(r_k)}(u_k)}{r_k! \prod\limits_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (u_k - u_i)^{r_i}} =: v_k \quad \text{pre každé } k \in [0, n]. \tag{2.6}$$

Ak $f = 0$, tak $\text{nst}(f) = 0 \leq n$. Na druhej strane, ak $f \neq 0$, z lemy 1.3.1

dostávame

$$\begin{aligned}\operatorname{nst}(f) + \sum_{i=0}^{n} r_i &= \operatorname{nst}(g) \leq \max(\operatorname{nst}(H), \operatorname{nst}(-\tilde{H})) \\ &\leq \max\left(n + \sum_{i=0}^{n} r_i, n + \sum_{i=0}^{n} \tilde{r}_i\right) = n + \sum_{i=0}^{n} r_i,\end{aligned}$$

a preto opäť $\operatorname{nst}(f) \leq n$. Podľa vety 2.1 potom f je interpolačný polynóm určený usporiadanou dvojicou postupností $(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(u_i), \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(v_i))$.

Pretože polynóm $H := \tilde{H}+g$, kde $g := f \prod_{i=0}^{n}(x-u_i)^{r_i}$ a f je horeuvedený interpolačný polynóm, je jediný kandidát na polynóm, korý má požadované vlastnosti, stačí ukázať, že H ich naozaj má. Ak $k \in [0, n]$ a $j \in [0, r_k - 1] \subseteq [0, \tilde{r}_k]$, tak z tvrdenia 1.5.1 vyplýva $g^{(j)}(u_k) = 0$, a teda tiež $H^{(j)}(u_k) = \tilde{H}^{(j)}(u_k) = v_k^{(j)}$. Z lemy 1.5.2 vzhľadom na (2.6) máme zasa

$$g^{(r_k)}(u_k) = r_k! f(u_k) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (u_k - u_i)^{r_i} = v_k^{(r_k)} - \tilde{H}^{(r_k)}(u_k),$$

a preto $H^{(r_k)}(u_k) = \tilde{H}^{(r_k)}(u_k) + g^{(r_k)}(u_k) = v_k^{(r_k)}$. Navyše, z nerovností $\operatorname{nst}(f) \leq n$ a $\sum_{i=0}^{n} \tilde{r}_i \leq \sum_{i=0}^{n} r_i$ na základe lemy 1.3.1 a dôsledku 1.4.3 vyplýva, že platí

$$\begin{aligned}\operatorname{nst}(H) &\leq \max(\operatorname{nst}(\tilde{H}), \operatorname{nst}(g)) \\ &\leq \max\left(n + \sum_{i=0}^{n} \tilde{r}_i, \operatorname{nst}(f) + \sum_{i=0}^{n} r_i\right) \leq n + \sum_{i=0}^{n} r_i. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Veta 2.3 ukazuje, že existuje práve jeden polynóm $H \in \mathbb{R}[x]$, ktorý spĺňa $\operatorname{nst}(H) \leq n + \sum_{i=0}^{n} r_i$ a $H^{(j)}(u_i) = v_i^{(j)}$ pre každé $i \in [0, n]$ a $j \in [0, r_i]$; ten sa nazýva *zovšeobecneným interpolačným polynómom* určeným usporiadanou dvojicou postupností $\left(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(u_i), \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}\left(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=0}^{r_i}\left(v_i^{(j)}\right)\right)\right)$. Klasické označenie H je v tomto prípade späté s menom francúzskeho matematika Hermita.

Veta 2.3 poskytuje návod na nájdenie zovšeobecneného interpolačného polynómu určeného usporiadanou dvojicou postupností (u, v) s $u := \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(u_i)$ a $v := \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}\left(\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=0}^{r_i}\left(v_i^{(j)}\right)\right)$. Pre $l \in [0, r(v)]$ nech $H_l \in \mathbb{R}[x]$ označuje zovšeobecnený interpolačný polynóm s postupnosťou interpolačných uzlov u, pre ktorý sú derivácie predpísané derivačnou postupnosťou v, ale najviac ak do rádu l; ide teda o zovšeobecnený interpolačný polynóm určený usporiadanou dvojicou $(u, v^{(l)})$, v ktorej $v^{(l)} := \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n} \left(\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=0}^{r(i,l)} (v_i^{(j)}) \right) \in \mathcal{D}$, pričom $r(i,l) := \min(r_i, l)$ pre každé $i \in [0, n]$. Ak teda $l \in [1, r(v)]$, tak derivačná postupnosť $v^{(l-1)}$ sa získa z derivačnej postupnosti $v^{(l)}$ „ignorovaním“ všetkých čísel tvaru $v_i^{(l)}$ vyskytujúcich sa v derivačnej postupnosti $v^{(l)}$. Z definície bezprostredne vyplýva $v^{r(v)} = v$, preto hľadaný zovšeobecnený interpolačný polynóm H je rovný $H_{r(v)}$.

Z dôkazu vety o zovšeobecnenom interpolačnom polynóme vieme, že polynóm $H = H_{r(v)}$ je jednoznačne určený pomocou polynómu $\tilde{H} = H_{r(v)-1}$. Podobne polynóm H_l je jednoznačne určený pomocou polynómu H_{l-1} pre každé $l \in [1, r(v)]$. Návod na konštrukciu hľadaného polynómu H je teda takýto: Najprv nájdeme polynóm H_0 ako (obyčajný) interpolačný polynóm určený usporiadanou dvojicou postupností $\left(u, \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n} \left(v_i^{(0)} \right) \right)$ a potom pre každé $l \in [1, r(v)]$ pomocou polynómu H_{l-1} vytvoríme polynóm H_l.

Kapitola 3

Numerické derivovanie

Základná úloha, ktorú rieši numerické derivovanie, je aproximovať deriváciu funkcie, ktorá je daná iba tabuľkou svojich hodnôt pre niektoré argumenty.

Majme teda diferencovateľnú funkciu $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ktorej hodnoty poznáme len pre argumenty z množiny $U = \{u_i : i \in [0, n]\}$. Keďže funkciu f je možné aproximovať interpolačným polynómom L funkcie f na uzlovej množine U, číslo $f'(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, je možné aproximovať číslom $L'(\tilde{x})$.

3.1 Ekvidištančne rozložené uzly

Uvedený prístup sa používa predovšetkým v prípadoch, keď interpolačné uzly sú rozložené na (časti) reálnej osi rovnomerne. Vtedy existuje také $h \in (0, \infty)$, že $u_0 \in \mathbb{R}$, $h \in (0, \infty)$ a $n \in [0, \infty)$, že pre každé $i \in [0, n]$ je $u_i = u_0 + ih$ a uzlová množina U je *ekvidištančná*. Podľa vety 2.1 možno polynóm $L(x)$ po zavedení substitúcie $x = u_0 + th$ previesť na tvar

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(u_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - u_j}{u_i - u_j} = \sum_{i=0}^{n} f(u_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{u_0 + th - (u_0 + jh)}{u_0 + ih - (u_0 + jh)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(u_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{t - j}{i - j} = \sum_{i=0}^{n} f(u_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (t - j) / \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (i - j). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Ak $m \in \mathbb{Z}$, tak $(-1)^m = (-1)^m \cdot \frac{(-1)^m}{(-1)^m} = \frac{((-1)^2)^m}{(-1)^m} = \frac{1}{(-1)^m}$. Preto

$$\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(i-j) = \prod_{j=0}^{i-1}(i-j)\prod_{j=i+1}^{n}(i-j) = i!\prod_{j=i+1}^{n}[(-1)(j-i)]$$

$$= i!(-1)^{n-i}\prod_{j=i+1}^{n}(j-i) = i!(-1)^{n-i}(n-i)! = \frac{i!(n-i)!}{(-1)^{n-i}} \tag{3.2}$$

a z (3.1) vyplýva

$$L(x) = L(u_0+th) = \sum_{i=0}^{n} f(u_i)\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(t-j) =: l(t).$$

Funkcia $l(t) = L(u_0+th)$ je zloženou funkciou premennej t, preto dostávame

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}L(u_0+th)}{\mathrm{d}t} = \left[\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\right]_{x=u_0+th}\cdot\frac{\mathrm{d}(u_0+th)}{\mathrm{d}t} = L'(u_0+th)h,$$

$$L'(u_0+th) = \frac{1}{h}\cdot\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}. \tag{3.3}$$

Ak nás teda zaujíma aproximácia čísla $f'(\tilde{x})$ pre nejaké $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, treba nájsť $\tilde{t} \in \mathbb{R}$ spĺňajúce $\tilde{x} = u_0 + \tilde{t}h$ a $f'(\tilde{x})$ možno aproximovať číslom $L'(u_0 + \tilde{t}h) = \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right]_{t=\tilde{t}}$. Najčastejšie sa takéto približné vyjadrenie derivácie používa v prípade $\tilde{x} = u_p \in U$, čo znamená, že $\tilde{t} = p \in [0,n]$. Vtedy máme

$$\left[\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right]_{t=p} = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{i=0}^{n} f(u_i)\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}(t-j)\right)\right]_{t=p}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} f(u_i)\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\left(\left[\frac{\mathrm{d}(t-k)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=p}\cdot\prod_{\substack{j=0\\j\neq i,k}}^{n}(p-j)\right)$$

a z (3.3) dostávame

$$f'(u_p) \approx L'(u_p) = \frac{1}{h}\cdot\left[\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right]_{t=p} = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} D(p,i,n)f(u_i), \tag{3.4}$$

kde vystupujú *koeficienty numerického derivovania*

$$D(p,i,n) := \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i,k}}^{n}(p-j) \in \mathbb{Q} \tag{3.5}$$

a $\approx$ predstavuje približnú rovnosť.

Ak $i \neq p$ a súčasne $k \neq p$ pre sumačný index k v (3.5), tak $\prod_{\substack{j=0\\j\neq i,k}}^{n}(p-j) = 0$, a preto (využijúc analógiu vzťahu (3.2))

$$\begin{aligned} D(p,i,n) &= \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\prod_{\substack{j=0\\j\neq i,p}}^{n}(p-j) = \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{1}{p-i}\prod_{\substack{j=0\\j\neq p}}^{n}(p-j) \\ &= \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\cdot\frac{1}{p-i}\cdot\frac{p!(n-p)!}{(-1)^{n-p}}\cdot\frac{n!}{n!} = \frac{(-1)^{p-i}}{p-i}\cdot\frac{\binom{n}{i}}{\binom{n}{p}}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Na druhej strane, ak $i = p$, tak

$$\begin{aligned} D(p,p,n) &= \frac{(-1)^{n-p}}{p!(n-p)!}\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n}\prod_{\substack{j=0\\j\neq p,k}}^{n}(p-j) \\ &= \frac{(-1)^{n-p}}{p!(n-p)!}\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n}\left[\frac{1}{p-k}\cdot\frac{p!(n-p)!}{(-1)^{n-p}}\right] = \sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{n}\frac{1}{p-k}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2 Koeficienty numerického derivovania

Na nájdenie aproximácií $n+1$ čísel $f'(u_p)$ pre $p \in [0,n]$ potrebujeme poznať $(n+1)^2$ koeficientov $D(p,i,n)$ pre všetky $p,i \in [0,n]$. Pri ich výpočte je výhodné využiť ich vzájomné vzťahy:

Tvrdenie 3.1 *Ak $n \in [0,\infty)$ a $j,p \in [0,n]$, tak*
1. $\sum_{i=0}^{n} D(p,i,n) = 0$;
2. $D(n-p,n-j,n) = -D(p,j,n)$.

Dôkaz. 1. Nech $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pričom $f(x) = 1$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Nech ďalej $u_0 \in \mathbb{R}$, $h \in (0,\infty)$, $U = \{u_0+ih : i \in [0,n]\}$ a nech $L \in \mathbb{R}[x]$ je interpolačný polynóm funkcie f na uzlovej množine U. Keďže $f \in \mathbb{R}[x]$, pričom $\mathrm{nst}(f) = 0 \leq n$ a $f(u_i) = f(u_i)$ pre každé $i \in [0,n]$, v súlade s vetou 2.1 platí $L = f$. V dôsledku toho aj $L' = f' = 0$ a približná rovnosť v (3.4) sa mení na rovnosť skutočnú. To znamená, že

$$0 = f'(u_p) = L'(u_p) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} D(p,i,n)f(u_i) = \frac{1}{h}\sum_{i=0}^{n} D(p,i,n), \tag{3.8}$$

a tak $\sum_{i=0}^{n} D(p,i,n) = 0$.

2. Ak $j \neq p$, tak $n-j \neq n-p$ a z (3.6) vyplýva

$$\begin{aligned} D(n-p,n-j,n) &= \frac{(-1)^{(n-p)-(n-j)}}{(n-p)-(n-j)} \cdot \frac{\binom{n}{n-j}}{\binom{n}{n-p}} \\ &= \frac{(-1)^{j-p}}{j-p} \cdot \frac{\binom{n}{j}}{\binom{n}{p}} = -\frac{(-1)^{p-j}}{p-j} \cdot \frac{\binom{n}{j}}{\binom{n}{p}} = -D(p,j,n). \end{aligned}$$

Ak $j = p$, tak $n-j = n-p$, z (3.7) dostávame

$$D(n-p,n-p,n) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq n-p}}^{n} \frac{1}{n-p-k} = \sum_{\substack{k=0\\k\neq n-p}}^{n} \frac{-1}{p-(n-k)}$$

a po zámene sumačného indexu k na sumačný index $m := n-k$ máme

$$D(n-p,n-p,n) = -\sum_{\substack{m=0\\m\neq p}}^{n} \frac{1}{p-m} = -D(p,p,n). \quad \blacksquare$$

Kapitola 4

Numerické integrovanie

Výpočet určitého integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ sa často vyskytuje pri riešení rôznych problémov technickej praxe. Ak poznáme funkciu F primitívnu k funkcii f, podľa Newtonovho-Leibnizovho vzorca je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Ak ju ale nepoznáme, k slovu prichádza numerické integrovanie (*kvadratúra*). To sa podobne ako numerické derivovanie opiera o interpoláciu.

Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a funkcia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$. Prirodzenou aproximáciou čísla $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je $\int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$, kde L je interpolačný polynóm funkcie f na nejakej uzlovej množine $U = \{u_i : i \in [0, n]\} \subseteq \mathbb{R}$.

4.1 Newtonova-Cotesova integrácia

Veľmi často sa ako U používa ekvidištančná množina, ktorej uzly symetricky „pokrývajú“ interval $\langle a, b\rangle$. To znamená, že buď a, b sú krajné interpolačné uzly (najmenší a najväčší) alebo a, b nie sú interpolačné uzly, ale dopĺňajú množinu interpolačných uzlov tak, že aj množina $U \cup \{a, b\}$ je ekvidištančná. Vzorce, ktoré sa za týchto predpokladov používajú na aproximáciu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, sa nazývajú *Newtonovými-Cotesovými vzorcami* (*formulami*) numerického integrovania. V prvom prípade ide o vzorce *uzavretého* typu, v druhom o vzorce *otvoreného* typu.

Oba prípady je možné analyzovať súčasne po zavedení parametra k nadobúdajúceho hodnotu 0 alebo 1 podľa toho či ide o vzorce uzavretého, resp. otvoreného typu. Pritom ak $k = 0$, tak $n \geq 1$ (a, b sú interpolačné uzly); to znamená, že pre parametre k, n vystupujúce v Newtonových-Cotesových vzorcoch numerického integrovania vždy platí $k + n \geq 1$. Množina $U \cup \{a, b\}$ má $n + 1 + 2k$ prvkov, delí teda interval $\langle a, b\rangle$ na $n + 2k$ subintervalov dĺžky $h = \frac{b-a}{n+2k}$. Okrem toho platí $u_0 = a + kh$ a $u_n = b - kh$.

Ak pri výpočte čísla $I := \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$ zavedieme substitúciu $x = u_0 + th$, tak z $a = u_0 - kh$ a $b = u_n + kh = u_0 + (n+k)h$ vyplýva, že dolná hranica integrálu sa zmení na $-k$ a horná hranica na $n+k$. V súlade s (3.1) a (3.2) preto dostávame

$$I = \int_{-k}^{n+k} \sum_{i=0}^{n} f(u_i) \frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t-j)h\,\mathrm{d}t = (b-a)\sum_{i=0}^{n} I(k,i,n) f(u_i),$$

kde

$$I(k,i,n) := \frac{(-1)^{n-i}}{(n+2k)i!(n-i)!} \int_{-k}^{n+k} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t-j)\,\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

je *Cotesov koeficient* (numerického integrovania). Z evidentného vyjadrenia

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} (t-j) = \sum_{j=0}^{n} z_j t^j \in \mathbb{Z}[t]$$

potom vyplýva, že

$$I(k,i,n) = \frac{(-1)^{n-i}}{(n+2k)i!(n-i)!} \sum_{j=0}^{n} \frac{z_j}{j+1}[(n+k)^{j+1} - (-k)^{j+1}] \in \mathbb{Q}.$$

Newtonova-Cotesova integrácia nám teda dáva približné vyjadrenie

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)\sum_{i=0}^{n} I(k,i,n) f(u_i), \tag{4.2}$$

pričom v lineárnej kombinácii hodnôt funkcie f v interpolačných uzloch vystupujú racionálne koeficienty $I(k,i,n)$.

4.2 Cotesove koeficienty

Aj pri výpočte Cotesových koeficientov (podobne ako pri výpočte koeficientov numerického derivovania) je možné využiť ich vzájomné vzťahy.

Tvrdenie 4.1 *Ak $k \in [0,1]$, $n \in [0,\infty)$, $k+n \geq 1$ a $i \in [0,n]$, tak*

1. $\sum_{j=0}^{n} I(k,j,n) = 1$;
2. $I(k,n-i,n) = I(k,i,n)$.

Dôkaz. 1. Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $h = \frac{b-a}{n+2k}$ a $U = \{a + kh + ih : i \in [0, n]\}$. Ak $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, pričom $f(x) = 1$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $L \in \mathbb{R}[x]$ je interpolačný polynóm funkcie f na uzlovej množine U, tak (ako v dôkaze tvrdenia 3.1) $L = f$. Preto približná rovnosť (4.2) sa mení na rovnosť skutočnú, a tak

$$\begin{aligned} b - a &= \int_a^b \mathrm{d}x = \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x \\ &= (b-a)\sum_{j=0}^{n} I(k,j,n)\cdot 1 = (b-a)\sum_{j=0}^{n} I(k,j,n), \end{aligned}$$

z čoho po krátení číslom $b - a > 0$ získavame dokazovaný súčtový vzorec.

2. Keďže

$$I(k, n-i, n) = \frac{(-1)^{n-(n-i)}}{(n+2k)(n-i)![n-(n-i)]!}\int_{-k}^{n+k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t,$$

na základe porovnania tohto vyjadrenia s (4.1) nám stačí dokázať, že

$$\int_{-k}^{n+k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\int_{-k}^{n+k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Ak ľavostranný integrál v (4.3) označíme ako $\tilde{I}$ a pri jeho výpočte zavedieme substitúciu $y = n - t$, tak dolná hranica sa zmení na $n + k$ a horná na $-k$. Dostávame teda

$$\tilde{I} = \int_{n+k}^{-k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq n-i}}^{n}[(-1)(y-(n-j))](-\mathrm{d}y)$$

a po zámene sumačného indexu j na sumačný index $m := n - j$

$$\tilde{I} = (-1)^n\int_{-k}^{n+k}\prod_{\substack{m=0\\ m\neq i}}^{n}(y-m)\,\mathrm{d}y = (-1)^n\int_{-k}^{n+k}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(t-j)\,\mathrm{d}t. \quad \blacksquare$$

4.3 Obdĺžniková formula a jej chyba

Najjednoduchšiu aproximáciu čísla $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocou Newtonovej-Cotesovej integrácie získame pre $n = 0$. Vtedy je nutne $k = 1$, $h = \frac{b-a}{2}$, $u_0 = \frac{a+b}{2}$, $I(1, 0, 0) = 1$, a tak

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Ide o aproximáciu pomocou *obdĺžnikovej formuly.* To je motivované nasledovnou úvahou: Predpokladajme, že $f(x) \geq 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ a uvážme body $A_0 = (a, 0)$, $A_1 = (a, f(a))$, $B_0 = (b, 0)$, $B_1 = (b, f(b))$. Číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je rovné obsahu rovinného útvaru ohraničeného úsečkami A_1A_0, A_0B_0, B_0B_1 a krivkou spájajúcou body B_1, A_1, ktorá je časťou grafu funkcie f. Aproximovať sa dá okrem iného aj obsahom obdĺžnika s jednou stranou A_0B_0, ktorého druhá strana má dĺžku $f(\frac{a+b}{2})$, a to je práve aproximácia, ktorú dáva Newtonova-Cotesova integrácia pre $k = 1$ a $n = 0$.

Na základe nasledujúcej vety si možno utvoriť predstavu o chybe, ktorej sa dopúšťame pri použití obdĺžnikovej formuly.

Veta 4.2 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a funkcia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je dvakrát spojite diferencovateľná v $\langle a, b\rangle$, tak existuje $\xi \in (a, b)$, pre ktoré je*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi).$$

Dôkaz. Ak $x \in \langle a, b\rangle - \{\frac{a+b}{2}\}$, podľa Taylorovej vety existuje také $\vartheta(x) \in (0, 1)$, že pre $\xi(x) := \frac{a+b}{2} + \vartheta(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$ platí

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \\ + \frac{1}{2} f''(\xi(x))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Keďže $\vartheta(x) \in (0, 1)$, zo série nerovností

$$a - \frac{a+b}{2} \leq x - \frac{a+b}{2} \leq b - \frac{a+b}{2}$$

dostávame sériu nerovností

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{2} &< \vartheta(x)\left(a - \frac{a+b}{2}\right) \\ &\leq \vartheta(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \leq \vartheta(x)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) < \frac{b-a}{2} \end{aligned}$$

a z nej $\xi(x) \in (a, b)$. Zrejme vyjadrenie (4.4) platí aj pre $x = \frac{a+b}{2}$, pričom $\xi(\frac{a+b}{2})$ môže mať ľubovoľnú hodnotu z $\langle a, b\rangle$.

Na základe (4.4) dostávame

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3, \tag{4.5}$$

kde

$$
\begin{aligned}
I_1 &:= \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x = f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a), \\
I_2 &:= \int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(a-\frac{a+b}{2}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2} f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left[\frac{(b-a)^2}{4}-\frac{(a-b)^2}{4}\right]=0, \\
I_3 &:= \frac{1}{2}\int_a^b f''(\xi(x))\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Pretože I_1 je aproximácia čísla $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pomocou obdĺžnikovej formuly a $I_2 = 0$, z rovnosti (4.5) vyplýva, že I_3 predstavuje chybu tejto aproximácie. Integrál vystupujúci v I_3 budeme chcieť vyjadriť využitím prvej integrálnej vety o strednej hodnote. Vzhľadom na to, že funkcia $(x - \frac{a+b}{2})^2$ je integrovateľná a nemení znamienko v $\langle a, b\rangle$, vyjadrenie je možné za predpokladu, že funkcia $f''(\xi(x))$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$. Ak $x \neq \frac{a+b}{2}$, podľa (4.4) máme

$$
f''(\xi(x)) = \frac{2\left[f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right]}{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}, \tag{4.6}
$$

takže funkcia $f''(\xi(x))$ je spojitá v $\langle a, b\rangle - \left\{\frac{a+b}{2}\right\}$.

Na určenie $l_1 := \lim_{x\to\frac{a+b}{2}} f''(\xi(x))$ položme $f_1(x) := 2[f(x) - f(\frac{a+b}{2}) - f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})]$ a $f_2(x) := (x - \frac{a+b}{2})^2$. Funkcia $f(x)$ je spojitá v bode $\frac{a+b}{2}$, preto

$$
\lim_{x\to\frac{a+b}{2}} f_1(x) = 0 = \lim_{x\to\frac{a+b}{2}} f_2(x).
$$

Vzhľadom na to, že existuje

$$
l_2 := \lim_{x\to\frac{a+b}{2}} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x\to\frac{a+b}{2}} \frac{2\left[f'(x) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{2\left(x-\frac{a+b}{2}\right)} = \lim_{x\to\frac{a+b}{2}} \frac{f'(x) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)}{x-\frac{a+b}{2}}
$$

(priamo z definície rovná číslu $f''(\frac{a+b}{2})$), podľa l'Hospitalovho pravidla existuje aj l_1 a platí $l_1 = l_2$; na to, aby funkcia $f''(\xi(x))$ bola spojitá aj v bode $\frac{a+b}{2}$, teda stačí položiť $\xi\left(\frac{a+b}{2}\right) := \frac{a+b}{2}$. Na základe prvej integrálnej vety o strednej hodnote potom existuje také $\tilde{x} \in (a,b)$, že

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{2} f''(\xi(\tilde{x})) \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2} f''(\xi(\tilde{x})) \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^3 \right]_a^b \\ &= \frac{1}{6} f''(\xi(\tilde{x})) \left[\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8} \right] = \frac{1}{24} f''(\xi(\tilde{x}))(b-a)^3. \end{aligned}$$

Pretože $\tilde{x} \in (a,b)$, chyba obdĺžnikovej formuly má tvar $\frac{(b-a)^3}{24} f''(\xi)$, kde $\xi := \xi(\tilde{x}) \in (a,b)$. ■

Obdĺžniková formula má prirodzené zovšeobecnenie. Nech $q \in [1,\infty)$. Rozdeľme interval $\langle a,b \rangle$ bodmi ekvidištančnej množiny $\{a_i : i \in [0,q]\}$, kde $a_i = a + i\frac{b-a}{q}$, na q subintervalov $\langle a_i, a_{i+1} \rangle$, $i \in [0,q-1]$, dĺžky $\frac{b-a}{q}$. Podľa vety 4.2 pre každé $i \in [0,q-1]$ existuje také $\xi_i \in (a_i, a_{i+1})$, že

$$\begin{aligned} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x &= (a_{i+1} - a_i) f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right) + \frac{(a_{i+1} - a_i)^3}{24} f''(\xi_i) \\ &= \frac{b-a}{q} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right) + \frac{(b-a)^3}{24q^3} f''(\xi_i), \end{aligned}$$

preto

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{q-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f\left(\frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right) + \frac{(b-a)^3}{24q^2} \cdot \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f''(\xi_i). \end{aligned}$$

Keďže funkcia $f''(x)$ je spojitá v $\langle a,b \rangle$, existujú čísla

$$\begin{aligned} m &:= \min(f''(x) : x \in \langle a,b \rangle), \\ M &:= \max(f''(x) : x \in \langle a,b \rangle) \end{aligned}$$

a pre každé $i \in [0,q-1]$ platí

$$m \le f''(\xi_i) \le M.$$

V dôsledku toho je tiež

$$\begin{aligned} qm &\le \sum_{i=0}^{q-1} f''(\xi_i) \le qM, \\ m &\le \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f''(\xi_i) \le M. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Keďže funkcia $f''(x)$ je spojitá v $\langle a,b\rangle$, platí $f''(\langle a,b\rangle)=\langle m,M\rangle$. Na základe série nerovností (4.7) sa preto dá nájsť taký argument $\tilde{\xi}_q\in\langle a,b\rangle$, ktorý spĺňa $f''(\tilde{\xi}_q)=\frac{1}{q}\sum_{i=0}^{q-1}f''(\xi_i)$. Podľa *zovšeobecnenej obdĺžnikovej formuly* teda existuje $\tilde{\xi}_q\in\langle a,b\rangle$, pre ktoré

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{b-a}{q}\sum_{i=0}^{q-1}f\left(\frac{a_i+a_{i+1}}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24q^2}f''(\tilde{\xi}_q). \tag{4.8}$$

Vzhľadom na to, že $f''(\tilde{\xi}_q)\in\langle m,M\rangle$ pre každé $q\in[1,\infty)$ a $\lim_{q\to\infty}\frac{(b-a)^3}{24q^2}=0$, z vyjadrenia (4.8) je zrejmé, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ možno pomocou zovšeobecnenej obdĺžnikovej formuly aproximovať s ľubovoľnou presnosťou.

4.4 Lichobežníková formula a jej chyba

Z nerovnosti $k+n\geq 1$ vidíme, že najjednoduchší Newtonov-Cotesov vzorec uzavretého typu ($k=0$) dostaneme pre $n=1$. V takom prípade máme $h=b-a$, $u_0=a$ a $u_1=b$. Z tvrdenia 4.1 vyplýva $I(0,0,1)=I(0,1,1)=\frac{1}{2}$, čo vedie k aproximácii

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\approx(b-a)\left[\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)\right]=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].$$

Príslušná formula sa nazýva *lichobežníkovou*, lebo tentoraz je číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (za predpokladov uvedených na začiatku oddielu 4.3) odhadnuté obsahom lichobežníka $A_1A_0B_0B_1$.

Veta 4.3 *Ak $a\in\mathbb{R}$, $b\in(a,\infty)$ a funkcia $f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je dvakrát spojite diferencovateľná v $\langle a,b\rangle$, tak existuje $\xi\in(a,b)$, pre ktoré*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi).$$

Dôkaz. Dokážeme silnejšie tvrdenie: Pre každé $h\in(0,b-a\rangle$ existuje $\xi(h)\in(a,a+h)$, pre ktoré

$$\int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{h}{2}[f(a)+f(a+h)]=-\frac{h^3}{12}f''(\xi(h)).$$

Zo silnejšieho tvrdenia dostaneme tvrdenie vety, ak položíme $h:=b-a$ a $\xi:=\xi(b-a)$.

Pre $h \in \langle 0, b-a \rangle$ nech

$$\begin{aligned} I(h) &:= \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x, \\ E(h) &:= I(h) - \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)]; \end{aligned}$$

potom je

$$E(0) = \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{0}{2}[f(a) + f(a+0)] = 0 - 0 = 0. \tag{4.9}$$

Ak funkciu $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ definujeme predpisom $g(x) := f(a+x)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, tak vzhľadom na to, že

$$I(h) = \int_a^{a+h} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h f(a+y)\,\mathrm{d}y = \int_0^h g(y)\,\mathrm{d}y,$$

využitím vety o derivácii integrálu ako funkcie hornej medze dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}I(h)}{\mathrm{d}h} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[\int_0^h g(y)\,\mathrm{d}y\right] = g(h) = f(a+h).$$

V dôsledku spojitosti funkcií $f(x)$ a $f'(x)$ v $\langle a, b \rangle$ máme

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(h)}{\mathrm{d}h} &= f(a+h) - \frac{1}{2}[f(a) + f(a+h)] - \frac{h}{2}f'(a+h) \\ &= \frac{1}{2}[f(a+h) - f(a) - hf'(a+h)], \qquad (4.10) \\ \left[\frac{\mathrm{d}E(h)}{\mathrm{d}h}\right]_{h=0} &= \frac{1}{2}[f(a+0) - f(a) - 0 \cdot f'(a+0)] = 0, \qquad (4.11) \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2E(h)}{\mathrm{d}h^2} = \frac{1}{2}[f'(a+h) - f'(a+h) - hf''(a+h)] = -\frac{1}{2}hf''(a+h). \tag{4.12}$$

Pretože $\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}$ je primitívna funkcia k funkcii $\frac{\mathrm{d}^2E(t)}{\mathrm{d}t^2}$, na základe (4.11) a (4.12) platí

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E(h)}{\mathrm{d}h} &= \left[\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=h} - \left[\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} \\ &= \int_0^h \frac{\mathrm{d}^2E(t)}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int_0^h tf''(a+t)\,\mathrm{d}t. \qquad (4.13) \end{aligned}$$

Funkcia t nemení znamienko a funkcia $f''(a+t)$ je spojitá v $\langle 0,h\rangle$, preto z prvej integrálnej vety o strednej hodnote vyplýva, že pre $h \in (0, b-a\rangle$ existuje $\eta(h) \in (0,h)$, pre ktoré je

$$\int_0^h t f''(a+t)\,\mathrm{d}t = f''(a+\eta(h)) \int_0^h t\,\mathrm{d}t = \frac{h^2}{2} f''(a+\eta(h)). \tag{4.14}$$

V súlade s (4.10), (4.13) a (4.14) máme

$$\frac{1}{2}[f(a+h) - f(a) - hf'(a+h)] = -\frac{h^2}{4} f''(a+\eta(h)). \tag{4.15}$$

Všimnime si, že (4.15) triviálne platí aj pre $h = 0$, a to s ľubovoľným $\eta(0) \in \langle 0, b-a\rangle$. Ak položíme $f_1(t) := 2[tf'(a+t) + f(a) - f(a+t)]$ a $f_2(t) := t^2$, tak využijúc (4.15) po nahradení premennej h premennou t pre $t \in (0, b-a\rangle$ dostávame $f''(a+\eta(t)) = \frac{f_1(t)}{f_2(t)}$, čo je podľa predpokladov vety spojitá funkcia premennej t.

Funkcia $E(t)$ je primitívna k funkcii $\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}$, preto podľa (4.15) dostávame

$$\begin{aligned} E(h) = E(h) - E(0) = [E(t)]_0^h &= \int_0^h \frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^h t^2 f''(a+\eta(t))\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Funkcia t^2 nemení znamienko v intervale $\langle 0,h\rangle$ a je integrovateľná v intervale $\langle 0,h\rangle$; preto ak je možné nájsť $\eta(0) \in \langle 0, b-a\rangle$ tak, aby funkcia $f''(a+\eta(t))$ bola spojitá aj v bode 0 sprava, tak $\int_0^h t^2 f''(a+\eta(t))dt$ sa dá vyjadriť pomocou prvej integrálnej vety o strednej hodnote. Za účelom overenia spomínanej spojitosti potrebujeme určiť $\lim_{t\to 0+} f''(a+\eta(t)) = \lim_{t\to 0+} \frac{f_1(t)}{f_2(t)} =: l_1$. Pretože $\lim_{t\to 0+} f_1(t) = 0 = \lim_{t\to 0+} f_2(t)$, l_1 je limita typu $\frac{0}{0}$ a možno sa pokúsiť nájsť ju pomocou l'Hospitalovho pravidla. Z toho, že $f_1'(t) = 2[f'(a+t) + tf''(a+t) - f'(a+t)] = 2tf''(a+t)$, $f_2'(t) = 2t$, a zo spojitosti funkcie $f''(a+t)$ v bode 0 sprava dostávame existenciu limity $l_2 := \lim_{t\to 0+} \frac{f_1'(t)}{f_2'(t)} = \lim_{t\to 0+} f''(a+t) = f''(a)$, preto existuje aj l_1 a platí $l_1 = l_2$. Spojitosť funkcie $f''(a+\eta(t))$ v bode 0 sprava teda dosiahneme voľbou $\eta(0) := 0 \in \langle 0, b-a\rangle$. Podľa prvej integrálnej vety o strednej hodnote existuje $\tau(h) \in (0,h)$, pre ktoré je

$$\int_0^h t^2 f''(a+\eta(t))\,\mathrm{d}t = f''(a+\eta(\tau(h))) \int_0^h t^2\,\mathrm{d}t = \frac{h^3}{3} f''(a+\eta(\tau(h))). \tag{4.17}$$

Keďže $\eta(\tau(h)) \in (0, \tau(h)) \subseteq (0,h)$, máme $\xi(h) := a + \eta(\tau(h)) \in (a, a+h)$, preto vzhľadom na (4.16) a (4.17) dostávame $E(h) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi(h))$. $\blacksquare$

Lichobežníkovú formulu môžeme zovšeobecniť podobne ako obdĺžnikovú. Ak $q \in [1, \infty)$, a $a_i = a + i\frac{b-a}{q}$ pre $i \in [0, q-1]$, podľa vety 4.3 pre každé $i \in [0, q-1]$ existuje $\xi_i \in (a_i, a_{i+1})$, pre ktoré je

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{a_{i+1}-a_i}{2}[f(a_i) + f(a_{i+1})] - \frac{(a_{i+1}-a_i)^3}{12} f''(\xi_i) \\ &= \frac{b-a}{2q}[f(a_i) + f(a_{i+1}] - \frac{(b-a)^3}{12q^3} f''(\xi_i),\end{aligned}$$

preto

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{q-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{b-a}{2q} \sum_{i=0}^{q-1} [f(a_i) + f(a_{i+1})] - \frac{(b-a)^3}{12q^2} \cdot \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} f''(\xi_i)\end{aligned}$$

a existuje $\hat{\xi}_q \in \langle a, b \rangle$, pre ktoré je

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2q} \left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{q-1} f(a_i) + f(b) \right] - \frac{(b-a)^3}{12q^2} f''(\hat{\xi}_q). \tag{4.18}$$

4.5 Rombergova integrácia

Predpokladajme, že sa nám podarilo nájsť takú aproximáciu $A(h)$ čísla

$$I := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

závisiacu od parametra $h \in (0, \infty)$ (môže to byť napr. dĺžka subintervalu v zovšeobecnenej obdĺžnikovej alebo lichobežníkovej formule), že

$$I - A(h) = O(h^{2r}),\ h \to 0+$$

pre nejaké $r \in [1, \infty)$. Funkcia $\frac{I-A(h)}{h^{2r}}$ je teda ohraničená v istom pravom okolí bodu 0. To znamená, že existujú také $\delta \in (0, \infty)$ a $m, M \in \mathbb{R}$, že pre každé $h \in (0, \delta)$ je

$$mh^{2r} \le I - A(h) \le Mh^{2r}; \tag{4.19}$$

zrejme teda $m \le M$. Bez ujmy na všeobecnosti však budeme odteraz predpokladať $m < M$, lebo $m = M$ má za následok $I = A(h) + mh^{2r}$ (a vtedy číslo I vieme z aproximácie $A(h)$ určiť presne). Pretože $h \in (0, \delta)$ implikuje $h/2 \in (0, \delta)$, máme k dispozícii aj série nerovností

$$\begin{aligned} m(h/2)^{2r} &\leq I - A(h/2) \leq M(h/2)^{2r}, \\ mh^{2r} &\leq 4^r[I - A(h/2)] \leq Mh^{2r}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

V tomto oddiele nech $x_1 \approx x_2$ (x_1 *je približne rovné* x_2) znamená, že $|x_1 - x_2| < (M - m)\delta^{2r}$. Pre prácu s približnou rovnosťou máme k dispozícii dve nasledovné (jednoducho dokázateľné) pravidlá:

(*i*) $\forall x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ $(x_1 \approx x_2 \Leftrightarrow x_1 + y \approx x_2 + y)$;
(*ii*) $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha \in \langle -1, 1 \rangle$ $(x_1 \approx x_2 \Rightarrow \alpha x_1 \approx \alpha x_2)$.

Pre každé $h \in (0, \delta)$ a každé $x_1, x_2 \in \langle mh^{2r}, Mh^{2r} \rangle$ máme $|x_1 - x_2| \leq Mh^{2r} - mh^{2r} = (M - m)h^{2r} < (M - m)\delta^{2r}$, a tak $x_1 \approx x_2$. Preto na základe (4.19) a (4.20) využitím pravidiel (*i*) a (*ii*) dostávame

$$\begin{aligned} I - A(h) &\approx 4^r[I - A(h/2)], \\ (4^r - 1)I &\approx (4^r - 1)A(h/2) + A(h/2) - A(h), \\ I &\approx A(h/2) + \frac{A(h/2) - A(h)}{4^r - 1}. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Približné vyjadrenie čísla I podľa (4.21) je aproximácia získaná *Richardsonovou extrapoláciou* z aproximácií $A(h/2)$ a $A(h)$.

Nech $T_0(\frac{b-a}{2^l})$, $l \in [0, \infty)$, označuje aproximáciu I pomocou zovšeobecnenej lichobežníkovej formuly s dĺžkou subintervalu $\frac{b-a}{2^l}$. To znamená, že

$$T_0\left(\frac{b-a}{2^l}\right) := \frac{b-a}{2^{l+1}} \left[f(a) + 2 \sum_{i=1}^{2^l - 1} f\left(a + i\frac{b-a}{2^l}\right) + f(b) \right]. \tag{4.22}$$

Funkciu T_0 definovanú v (4.22) len pre spočítateľne veľa argumentov z intervalu $(0, b - a\rangle$ môžeme dodefinovať na celý interval $(0, b - a\rangle$ ako schodovitú funkciu:

$$\forall l \in [0, \infty)\ \forall h \in \left(\frac{b-a}{2^{l+1}}, \frac{b-a}{2^l} \right\rangle\ T_0(h) := T_0\left(\frac{b-a}{2^l}\right).$$

Ak funkcia f je dvakrát spojite diferencovateľná v intervale $\langle a, b \rangle$, existuje také $\mu \in (0, \infty)$, že

$$\forall x \in \langle a, b \rangle\ |f''(x)| \leq \mu. \tag{4.23}$$

V súlade s (4.18) a (4.23) potom pre každé $l \in [0, \infty)$ a $h \in (\frac{b-a}{2^{l+1}}, \frac{b-a}{2^l}\rangle$ platí

$$\begin{aligned} |I - T_0(h)| &= \left| I - T_0\left(\frac{b-a}{2^l}\right) \right| \le \frac{(b-a)^3}{12 \cdot (2^l)^2}\mu \\ &< \frac{\mu(b-a)}{12} \cdot (2h)^2 = \frac{\mu(b-a)h^2}{3}, \end{aligned}$$

a to znamená, že

$$I - T_0(h) = O(h^2), \ h \to 0+.$$

Preto ak označíme

$$T_{0,l} := T_0\left(\frac{b-a}{2^l}\right), \ l \in [0, \infty), \tag{4.24}$$

v súlade s (4.21) dostaneme takéto aproximácie čísla I:

$$T_{1,l+1} := T_{0,l+1} + \frac{T_{0,l+1} - T_{0,l}}{4^1 - 1}, \ l \in [0, \infty).$$

Zovšeobecnením horeuvedeného postupu získame rekurentne nasledovné aproximácie čísla I pre $m \in [1, \infty)$ a $l \in [0, \infty)$:

$$T_{m,l+m} := T_{m-1,l+m} + \frac{T_{m-1,l+m} - T_{m-1,l+m-1}}{4^m - 1}. \tag{4.25}$$

Je totiž možné dokázať, že ak pre $m \in [1, \infty)$ je $T_m \in \mathbb{R}^{(0,b-a\rangle}$ schodovitá funkcia definovaná predpisom

$$\forall l \in [0, \infty) \ \forall h \in \left(\frac{b-a}{2^{l+1}}, \frac{b-a}{2^l}\right\rangle \ T_m(h) := T_{m,l+m},$$

tak pre každé $m \in [1, \infty)$ platí

$$I - T_{m-1}(h) = O(h^{2m}), \ h \to 0+.$$

Aproximovanie čísla I pomocou (4.22)–(4.25) sa nazýva *Rombergovou integráciou.*

O postupnosti $\{T_{m,m}\}_{m=0}^{\infty}$ vytvorenej pomocou Rombergovej integrácie sa dá dokázať, že konverguje k I podstatne rýchlejšie než postupnosť $\{T_{0,m}\}_{m=0}^{\infty}$ získaná „iba“ pomocou opakovaného použitia zovšeobecnenej lichobežníkovej formuly.

4.6 Gaussova kvadratúra

Newtonove-Cotesove vzorce numerického integrovania majú tú nespornú výhodu, že Cotesove koeficienty, ktoré v nich vystupujú, sú racionálne čísla. To je spôsobené tým, že použité uzlové množiny sú ekvidištančné. Ak upustíme od požiadavky ekvidištančnosti uzlovej množiny, môžeme získať aproximácie, ktoré sú výhodné z iného hľadiska.

Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, funkcia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je integrovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$, $n \in [0, \infty)$ a nech $L \in \mathbb{R}[x]$ je interpolačný polynóm funkcie f na uzlovej množine $U = \{u_i : i \in [0, n]\} \subseteq \mathbb{R}$, teda (v súlade s (2.1)) polynóm $L(x) = \sum_{i=0}^{n} f(u_i) \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x-u_j}{u_i-u_j}$. Ako aproximáciu čísla $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ môžeme použiť číslo $\int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$, ktoré je rovné $\sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i) f(u_i)$, kde

$$I(a, b, U, i) := \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - u_j}{u_i - u_j}\,\mathrm{d}x.$$

Chyba tej aproximácie je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b L(x)\,\mathrm{d}x$, závisí od a, b, U, f, a budeme pre ňu používať označenie $E(a, b, U, f)$. Pri fixovaných a, b, U budeme identitu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i) f(u_i) + E(a, b, U, f)$$

(ktorá platí pre každú funkciu $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ integrovateľnú v $\langle a, b\rangle$), označovať $Q(a, b, U)$ a nazývať (s ohľadom na spôsob jej odvodenia) *kvadratúrnou formulou interpolačného typu.*

4.6.1 Stupeň presnosti kvadratúrnej formuly

Nech $m \in [0, \infty)$. Budeme hovoriť, že kvadratúrna formula $Q(a, b, U)$ je *m-presná*, ak pre každé $f \in \mathbb{R}[x]$, pre ktoré je $\mathrm{nst}(f) \leq m$, platí $E(a, b, U, f) = 0$, čo je ekvivalentné s tým, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i) f(u_i).$$

Tvrdenie 4.4 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $n \in [0, \infty)$ a $U = \{u_i : i \in [0, n]\} \subseteq \mathbb{R}$, tak*

1. *$Q(a, b, U)$ je n-presná;*
2. *$\sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i) = b - a$.*

Dôkaz. 1. Nech $f \in \mathbb{R}[x]$, pričom $\operatorname{nst}(f) \leq n$, a nech $L \in \mathbb{R}[x]$ je interpolačný polynóm funkcie f na uzlovej množine U. Z vety 2.1 vyplýva, že $L = f$, a tak $E(a, b, U, f) = 0$. To znamená, že $Q(a, b, U)$ je n-presná.

2. V dôkaze tvrdenia 4.4.1 môžeme okrem iného vziať $f = 1$. V takom prípade z $Q(a, b, U)$ dostávame

$$b - a = \int_a^b \mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i) \cdot 1 + 0 = \sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i). \quad \blacksquare$$

Hovoríme, že funkcia $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ je *ortogonálna v intervale* $\langle a, b\rangle$ k funkcii $g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ak $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ existuje a je rovný 0.

Lema 4.5 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $n \in [0, \infty)$, $m \in [n+1, \infty)$ a $U = \{u_i : i \in [0, n]\} \subseteq \mathbb{R}$, tak nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) $Q(a, b, U)$ je m-presná.

(ii) Polynóm $\prod_{j=0}^{n}(x - u_j)$ je ortogonálny v $\langle a, b\rangle$ ku každému polynómu z $\mathbb{R}[x]$, ktorého numerický stupeň je nanajvýš $m - n - 1$.

Dôkaz. Položme $\omega := \prod_{j=0}^{n}(x - u_j) \in \mathbb{R}[x]$.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Nech $Q(a, b, U)$ je m-presná a nech pre $p \in \mathbb{R}[x]$ platí $\operatorname{nst}(p) \leq m - n - 1$. Pre polynóm $\omega p \in \mathbb{R}[x]$ podľa dôsledku 1.4.3 máme $\operatorname{nst}(\omega p) \leq n + 1 + \operatorname{nst}(p) \leq m$, a tak $E(a, b, U, \omega p) = 0$. Preto z toho, že $\omega(u_i) = 0$ pre každé $i \in [0, n]$, dostávame

$$\int_a^b \omega(x)p(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} I(a, b, U, i)\omega(u_i)p(u_i) = 0.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Nech $\int_a^b \omega(x)p(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pre každé $p \in \mathbb{R}[x]$, pre ktoré je $\operatorname{nst}(p) \leq m - n - 1$, a nech $f \in \mathbb{R}[x]$, pričom $\operatorname{nst}(f) \leq m$. Polynóm ω má numerický stupeň $n + 1$, preto existujú jednoznačne určené polynómy $s, z \in \mathbb{R}[x]$ spĺňajúce $f = \omega s + z$ a $\operatorname{nst}(z) \leq n$ (podiel a zvyšok pri delení polynómu f polynómom ω). Ak $s \neq 0$, tak podľa lemy 1.3.3 $\operatorname{nst}(\omega s) = n+1+\operatorname{nst}(s) \geq n+1$, a preto z $\operatorname{nst}(z) \leq n$ vyplýva $m \geq \operatorname{nst}(f) = \operatorname{nst}(\omega s+z) = \operatorname{nst}(\omega s) = n + 1 + \operatorname{nst}(s)$ (vedúce koeficienty polynómov ωs a z sa nemôžu navzájom eliminovať) a $\operatorname{nst}(s) \leq m - n - 1$. Na druhej strane, ak $s = 0$, tak je tiež $\operatorname{nst}(s) = 0 \leq m - n - 1$. Bez ohľadu na to, aký je polynóm s, teda z predpokladu (ii) vyplýva $\int_a^b \omega(x)s(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Pretože podľa tvrdenia 4.4.1

$Q(a,b,U)$ je n-presná, máme

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b \omega(x)s(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b z(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b z(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} I(a,b,U,i)z(u_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} I(a,b,U,i)[\omega(u_i)s(u_i)+z(u_i)] = \sum_{i=0}^{n} I(a,b,U,i)f(u_i)\end{aligned}$$

a $Q(a,b,U)$ je m-presná. ■

Dôsledok 4.6 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $n \in [0,\infty)$, $U \subseteq \mathbb{R}$, $\operatorname{card} U = n+1$, $m \in [0,\infty)$ a $Q(a,b,U)$ je m-presná, tak $m \le 2n+1$.*

Dôkaz. Predpokladajme, že $U = \{u_i : i \in [0,n]\}$ a $Q(a,b,U)$ je m-presná, pričom $m \in [2n+2,\infty)$. Podľa lemy 4.5 polynóm $\omega := \prod_{j=0}^{n}(x-u_j)$ je ortogonálny v $\langle a,b\rangle$ ku každému polynómu z $\mathbb{R}[x]$ numerického stupňa nanajvýš $m-n-1$. Pretože $\operatorname{nst}(\omega) = n+1 \le m-n-1$, máme

$$\int_a^b \omega^2(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.26}$$

Ak však vyberieme $c \in \langle a,b\rangle$ a $d \in (c,b\rangle$ tak, aby $\langle c,d\rangle \cap U = \emptyset$, tak $\mu := \min(\omega^2(x) : x \in \langle c,d\rangle) > 0$ a platí

$$\int_a^b \omega^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_c^d \omega^2(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_c^d \mu\,\mathrm{d}x = \mu(d-c) > 0,$$

čo predstavuje spor s (4.26). ■

Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $n \in [0,\infty)$ a nech U je $(n+1)$-prvková množina reálnych čísel. V súlade s tvrdením 4.4.1 a dôsledkom 4.6 množina $\{m \in [0,\infty) : Q(a,b,U) \text{ je } m\text{-presná}\}$ má maximum, ktoré patrí do množiny $[n,2n+1]$; toto maximum je *stupeň presnosti* kvadratúrnej formuly $Q(a,b,U)$. Naša analýza ukáže (veta 4.7, veta 4.8), že existuje jediná $(n+1)$-prvková množina $U(a,b,n)$, pre ktorú kvadratúrna formula $Q(a,b,U(a,b,n))$ je $(2n+1)$-presná. Numerické integrovanie používajúce optimálnu uzlovú množinu $U(a,b,n)$ sa nazýva *Gaussovou kvadratúrou* a $Q(a,b,U(a,b,n))$ je *Gaussova kvadratúrna formula.*

4.6.2 Uzly v Gaussovej kvadratúre

Podľa lemy 4.5 na to, aby sme mohli nájsť $(n+1)$-prvkovú množinu $U(a,b,n)$, pre ktorú $Q(a,b,U(a,b,n))$ je $(2n+1)$-presná, nutne potrebujeme existenciu monického polynómu $\omega \in \mathbb{R}[x]$ numerického stupňa $n+1$, ktorý je ortogonálny v $\langle a,b\rangle$ ku každému polynómu z $\mathbb{R}[x]$ s numerickým stupňom nanajvýš n. Polynóm, ktorý takú vlastnosť má, je však použiteľný na zostavenie náležitej kvadratúrnej formuly iba vtedy, ak všetky jeho korene sú reálne a jednoduché (ich počet musí byť rovný $n+1$). Ukážeme, že táto podmienka je splnená pre každý interval $\langle a,b\rangle$.

Veta 4.7 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $n \in [0,\infty)$ a monický polynóm $\omega \in \mathbb{R}[x]$ numerického stupňa $n+1$ je ortogonálny v $\langle a,b\rangle$ ku každému polynómu z $\mathbb{R}[x]$ s numerickým stupňom nanajvýš n, tak všetky korene polynómu ω sú jednoduché a patria do (a,b).*

Dôkaz. Nech $\{x_j : j \in [1,k]\}$ je množina všetkých reálnych koreňov polynómu ω a nech m_j je násobnosť koreňa x_j. Potom existuje monický polynóm $g \in \mathbb{R}[x]$, pre ktorý je $\omega = g\prod_{j=1}^{k}(x-x_j)^{m_j}$. Polynóm g nemá reálne korene, preto platí buď $g(x) > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ alebo $g(x) < 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$; keby totiž existovali $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\beta \in (\alpha,\infty)$ spĺňajúce $g(\alpha)g(\beta) < 0$, v súlade s tvrdením 5.1.1 by interval (α,β) obsahoval koreň polynómu g. Z toho, že ω je monický, dostávame

$$\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) > 0. \tag{4.27}$$

Toto tvrdenie je triviálne ak $\operatorname{nst}(g) = 0$. Na druhej strane, ak $\operatorname{nst}(g) > 0$, tak $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (lebo vedúci koeficient polynómu g je kladný), $g(x) > 0$ pre dostatočne veľké $x \in \mathbb{R}$ a následne pre všetky $x \in \mathbb{R}$.

Rozložme množinu $[1,k]$ na päť disjunktných podmnožín J_l, $l \in [1,5]$, a to tak, že pre každé $j \in [1,k]$ platí:

$$\begin{aligned}
&j \in J_1 \Leftrightarrow (x_j \in (a,b) \wedge m_j = 1),\\
&j \in J_2 \Leftrightarrow (x_j \in (a,b) \wedge m_j \equiv 1 \pmod 2 \wedge m_j > 1),\\
&j \in J_3 \Leftrightarrow (x_j \in (a,b) \wedge m_j \equiv 0 \pmod 2),\\
&j \in J_4 \Leftrightarrow x_j \in (-\infty, a\rangle,\\
&j \in J_5 \Leftrightarrow x_j \in \langle b, \infty).
\end{aligned}$$

Nech $x \in \mathbb{R}$. Ak $j \in J_1 \cup J_2$, tak $(x-x_j)^{m_j+1} \geq 0$, lebo m_j+1 je párne. Podobne, ak $j \in J_3$, tak $(x-x_j)^{m_j} \geq 0$. Ak $x \in \langle a,\infty)$ a $j \in J_4$, tak $x \geq x_j$ a $(x-x_j)^{m_j} \geq 0$. Nakoniec, ak $x \in (-\infty,b\rangle$ a $j \in J_5$, tak $x \leq x_j$ a

$[(-1)(x-x_j)]^{m_j} \geq 0$. Preto ak pre $l \in [1,5]$ definujeme $\rho_l := \prod_{j\in J_l}(x-x_j)^{m_j}$ a $\sigma_l := \prod_{j\in J_l}(x-x_j)$, máme

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \sigma_1(x)\rho_1(x) \geq 0, \tag{4.28}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \sigma_2(x)\rho_2(x) \geq 0, \tag{4.29}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}\ \rho_3(x) \geq 0, \tag{4.30}$$
$$\forall x \in \langle a,\infty)\ \rho_4(x) \geq 0, \tag{4.31}$$
$$\forall x \in (-\infty,b\rangle\ s\rho_5(x) \geq 0, \tag{4.32}$$

kde $s := (-1)^{\sum_{j\in J_5} m_j} \in \{-1,1\}$. Keďže $\omega = g\prod_{l=1}^{5}\rho_l$ a $\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\cap\langle a,\infty)\cap(-\infty,b\rangle = \langle a,b\rangle$, z (4.27–4.32) vyplýva, že

$$\forall x \in \langle a,b\rangle\ \omega(x)s\sigma_1(x)\sigma_2(x) \geq 0. \tag{4.33}$$

Množina všetkých reálnych koreňov polynómu $\omega s\sigma_1\sigma_2$ je konečná, preto je možné vybrať $c,d \in \langle a,b\rangle$ tak, aby bolo $c < d$ a $\omega(x)s\sigma_1(x)\sigma_2(x) \neq 0$ pre každé $x \in \langle c,d\rangle$. Zo spojitosti funkcie $\omega s\sigma_1\sigma_2$ dostávame existenciu čísla $m := \min(\omega(x)s\sigma_1(x)\sigma_2(x) : x \in \langle c,d\rangle)$. Na základe (4.33) potom máme

$$\forall x \in \langle c,d\rangle\ \omega(x)s\sigma_1(x)\sigma_2(x) \geq m > 0. \tag{4.34}$$

Vzhľadom na (4.33) a (4.34) platí

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)s\sigma_1(x)\sigma_2(x)\,\mathrm{d}x &\geq \int_c^d \omega(x)s\sigma_1(x)\sigma_2(x)\,\mathrm{d}x\\ &\geq \int_c^d m\,\mathrm{d}x = m(d-c) > 0,\end{aligned}$$

polynóm ω nie je ortogonálny v $\langle a,b\rangle$ k polynómu $s\sigma_1\sigma_2$, a tak v súlade s lemou 1.3.3

$$\mathrm{nst}(\sigma_1\sigma_2) = \mathrm{nst}(s\sigma_1\sigma_2) \geq n+1.$$

Z tejto nerovnosti na základe dôsledkov 1.4.1 a 1.4.3 ďalej dostávame

$$\begin{aligned}n+1 = \mathrm{nst}(\omega) = \mathrm{nst}(g) + \sum_{l=1}^{5}\sum_{j\in J_l} m_j \geq \sum_{l=1}^{5}\sum_{j\in J_l} m_j \geq |J_1| + 3|J_2| + \sum_{l=3}^{5}|J_l|\\ \geq |J_1| + |J_2| + \sum_{l=2}^{5}|J_l| \geq |J_1| + |J_2| = \mathrm{nst}(\sigma_1\sigma_2) \geq n+1,\end{aligned}$$

a tak v uvedenej sérii nerovností sú všade rovnosti. Okrem iného z toho vyplýva $g = 1$ a $\sum_{l=2}^{5}|J_l| = 0$, čo znamená, že všetky korene ω sú reálne, patria do (a,b) a sú jednoduché. ■

Veta 4.8 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $n \in [0, \infty)$ a $\omega \in \mathbb{R}[x]$ je monický polynóm numerického stupňa $n+1$, tak nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:*

(i) Polynóm ω je ortogonálny v $\langle a, b\rangle$ ku každému polynómu z $\mathbb{R}[x]$ s numerickým stupňom nanajvýš n.

(ii) $\omega = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}]$.

Dôkaz. (i) $\Rightarrow$ (ii): Položme $\varphi_{-1} := \omega \in \mathbb{R}[x]$. Nech $i \in [-1, \infty)$ a nech polynóm $\varphi_i \in \mathbb{R}[x]$ už je určený. Z lemy 1.10 dostávame

$$\varphi_{i+1} := \int_a^x \varphi_i(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}[x].$$

Preto podľa vety o derivácii integrálu ako funkcie hornej medze máme

$$\forall i \in [-1, \infty)\ \varphi'_{i+1} = \varphi_i. \tag{4.35}$$

Nech teraz $q \in \mathbb{R}[x]$. Matematickou indukciou vzhľadom na j ukážeme, že pre každé $j \in [-1, \infty)$ platí nasledovné tvrdenie $T(j)$:

$$\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\varphi_i(x)q^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^{j+1}\int_a^b \varphi_j(x)q^{(j+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tvrdenie $T(-1)$ platí triviálne. Ak $j \in [-1, \infty)$ a $T(j)$ platí, tak integráciou per partes, pri ktorej využijeme rovnosť $\varphi_j = \varphi'_{j+1}$, dostávame

$$\int_a^b \varphi_j(x)q^{(j+1)}(x)\,\mathrm{d}x = \left[\varphi_{j+1}(x)q^{(j+1)}(x)\right]_a^b - \int_a^b \varphi_{j+1}(x)q^{(j+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Preto je tiež

$$\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{j+1}(-1)^i\varphi_i(x)q^{(i)}(x)\right]_a^b + (-1)^{j+2}\int_a^b \varphi_{j+1}(x)q^{(j+2)}(x)\,\mathrm{d}x,$$

čo je tvrdenie $T(j+1)$.

Ak $\operatorname{nst}(q) \le n$, tak $q^{(n+1)} = 0$ (dôsledok 1.8). Podľa tvrdenia $T(n)$ potom

$$\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\varphi_i(x)q^{(i)}(x)\right]_a^b. \tag{4.36}$$

Z definície postupnosti $\{\varphi_i\}_{i=-1}^{\infty}$ dostávame

$$\forall i \in [0, \infty)\ \varphi_i(a) = \int_a^a \varphi_{i-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.37}$$

Ak $k \in [0, n]$ a $q_k \in \mathbb{R}[x]$ je zovšeobecnený interpolačný polynóm určený usporiadanou dvojicou $\left((b), \left(\mathop{\Gamma}_{i=0}^{n}(\delta_{i,k})\right)\right)$, podľa vety 2.3 je $\operatorname{nst}(q_k) \leq 0+n = n$. Z pravdivosti tvrdenia (i) preto na základe (4.36) a (4.37) vyplýva, že

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^b \omega(x) q_k(x) \, \mathrm{d}x &= \left[\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi_i(x) q_k^{(i)}(x)\right]_a^b \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \varphi_i(b) \delta_{i,k} = (-1)^k \varphi_k(b), \end{aligned}$$

v dôsledku čoho je

$$\forall k \in [0, n] \ \varphi_k(b) = 0. \tag{4.38}$$

Matematickou indukciou vzhľadom na i ľahko vidíme, že pre každé $i \in [0, n+1]$ platí rovnosť polynómov $\varphi_{n-i} = \varphi_n^{(i)}$. V prípade $i = 0$ rovnosť je triviálna. Ak $i \in [0, n]$ a $\varphi_{n-i} = \varphi_n^{(i)}$, tak z (4.35) máme

$$\varphi_{n-(i+1)} = \varphi'_{n-i} = [\varphi_n^{(i)}]' = \varphi_n^{(i+1)}.$$

Okrem iného teda dostávame

$$\omega = \varphi_{-1} = \varphi_n^{(n+1)}. \tag{4.39}$$

Keďže $\{n - i : i \in [0, n]\} = [0, n]$, z (4.37) a (4.38) vyplýva

$$\forall k \in [0, n] \ \varphi_n^{(k)}(a) = 0 = \varphi_n^{(k)}(b).$$

Podľa lemy 1.6 potom $(x-a)^{n+1} | \varphi_n$, $(x-b)^{n+1} | \varphi_n$, a keďže polynómy $(x-a)^{n+1}$ a $(x-b)^{n+1}$ sú nesúdeliteľné, platí tiež $(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1} | \varphi_n$. Existuje teda taký polynóm $\varphi \in \mathbb{R}[x]$, že

$$\varphi_n = \varphi (x-a)^{n+1} (x-b)^{n+1}. \tag{4.40}$$

Polynóm ω je monický, preto $\omega \neq 0$ a na základe (4.39) a (4.40) nenulové musia byť aj polynómy φ_n a φ. Podľa dôsledku 1.4.3 je $\operatorname{nst}(\varphi_n) = \operatorname{nst}(\varphi) + 2(n+1) \geq 2n+2$ a následne (využijúc lemu 1.7)

$$\begin{aligned} n + 1 = \operatorname{nst}(\omega) = \operatorname{nst}(\varphi_n^{(n+1)}) &= \operatorname{nst}(\varphi_n) - (n+1) \\ &= \operatorname{nst}(\varphi) + n + 1 \geq n + 1, \end{aligned}$$

z čoho získavame $\operatorname{nst}(\varphi) = 0$; existuje teda také $r \in \mathbb{R} - \{0\}$, že $\varphi = r$. Polynóm $\varphi_n = r(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}$ má vedúci koeficient r a numerický stupeň $2n+2$, preto v súlade s lemou 1.7 monický polynóm $\omega = \varphi_n^{(n+1)}(x)$ má vedúci koeficient $1 = r\prod_{i=0}^{n}(2n+2-i)$. Odtiaľ dostávame

$$\frac{1}{r} = \prod_{i=0}^{n}(2n+2-i) = \frac{\prod\limits_{i=0}^{2n+1}(2n+2-i)}{\prod\limits_{i=n+1}^{2n+1}(2n+2-i)} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!},$$

a následne, na základe (4.39) a tvrdenia 1.9,

$$\omega = \varphi_n^{(n+1)} = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}].$$

$(ii) \Rightarrow (i)$: Pre $i \in [0,\infty)$ položme

$$\psi_i := \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}\left[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\right]; \tag{4.41}$$

potom v súlade s tvrdením 1.9 máme

$$\psi_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^i}\left[\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}\right] = \psi_0^{(i)}.$$

Okrem iného je teda $\omega = \psi_{n+1} = \psi_0^{(n+1)}$. Z (4.41) na základe lemy 1.5.1 vidíme, že

$$\forall j \in [0,n]\ \psi_0^{(j)}(a) = 0 = \psi_0^{(j)}(b). \tag{4.42}$$

Nech $q \in \mathbb{R}[x]$. Matematickou indukciou vzhľadom na i dokážeme, že pre každé $i \in [0, n+1]$ platí tvrdenie $\tilde{T}(i)$:

$$\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^i\int_a^b \psi_0^{(n+1-i)}(x)q^{(i)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Tvrdenie $\tilde{T}(0)$ je evidentne pravdivé. Nech teda $i \in [0,n]$ a nech $\tilde{T}(i)$ platí. Potom integráciou per partes a využitím (4.42) pre $j := n-i \in [0,n]$ dostávame

$$\begin{aligned}\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathrm{d}x &= (-1)^i\int_a^b \psi_0^{(n+1-i)}(x)q^{(i)}(x)\,\mathrm{d}x\\ &= (-1)^i\left\{[\psi_0^{(n-i)}(x)q^{(i)}(x)]_a^b - \int_a^b \psi_0^{(n-i)}(x)q^{(i+1)}(x)\,\mathrm{d}x\right\}\\ &= (-1)^{i+1}\int_a^b \psi_0^{(n+1-i-1)}(x)q^{(i+1)}(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

čo ukazuje pravdivosť tvrdenia $\tilde{T}(i+1)$.

Ak $\mathrm{nst}(q) \le n$, dôsledok 1.8 nám dáva $q^{(n+1)} = 0$, a tak na základe $\tilde{T}(n+1)$ máme $\int_a^b \omega(x)q(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\int_a^b \psi_0(x)q^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x = 0$. ∎

4.6.3 Koeficienty v Gaussovej kvadratúre

Nech $U(a,b,n)$ je množina všetkých (reálnych) koreňov (monického) polynómu

$$\omega_{a,b,n} := \frac{(n+1)!}{(2n+2)!} \cdot \frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}.$$

Podľa viet 4.7 a 4.8 je $|U(a,b,n)| = n+1$ a podľa lemy 4.5 kvadratúrna formula $Q(a,b,U(a,b,n))$ je $(2n+1)$-presná. V ďalšej vete si ukážeme, ako možno koeficienty $I(a,b,U(a,b,n),i)$ v $Q(a,b,U(a,b,n))$ vyjadriť pomocou a,b,n a uzlov množiny $U(a,b,n)$.

Veta 4.9 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $n \in [0,\infty)$, $U(a,b,n) = \{u_j : j \in [0,n]\}$ je množina všetkých koreňov polynómu $\omega_{a,b,n}$ a $i \in [0,n]$, tak*

$$I(a,b,U(a,b,n),i) = \frac{[(n+1)!]^4(b-a)^{2n+3}}{[(2n+2)!]^2(u_i-a)(b-u_i)\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(u_i-u_j)^2}.$$

Dôkaz. Položme kvôli zjednodušeniu zápisov

$$\begin{aligned}
\omega &:= \prod_{j=0}^{n}(x-u_j)(=\omega_{a,b,n}),\\
\omega_i &:= \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x-u_j),\\
g_j &:= I(a,b,U(a,b,n),j) \text{ pre } j \in [0,n].
\end{aligned}$$

Keďže $\mathrm{nst}(\omega_i^2) = 2n$, podľa vety 4.8 a lemy 4.5 platí

$$\int_a^b \omega_i^2(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{n} g_j\omega_i^2(u_j) = g_i\omega_i^2(u_i). \tag{4.43}$$

Na základe vety 4.7 je $a < u_i < b$, preto

$$\int_a^b \omega_i^2(x)\,\mathrm{d}x = I_a(u_i) + I^b(u_i), \tag{4.44}$$

kde (podľa lemy 1.10) $I_a(y) := \int_a^y \omega_i^2(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}[y]$ a $I^b(y) := \int_y^b \omega_i^2(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^y \omega_i^2(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}[y]$. Ak $y \in \langle a,u_i)$, tak $(x-u_i)^2 \neq 0$ pre každé $x \in \langle a,y\rangle$, preto $\omega_i^2(x) = \frac{\omega^2(x)}{(x-u_i)^2}$, a integráciou per partes dostávame

$$\begin{aligned} I_a(y) &= \int_a^y \frac{\omega^2(x)}{(x-u_i)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\omega^2(x)}{x-u_i}\right]_a^y + \int_a^y \frac{2\omega(x)\omega'(x)}{x-u_i}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\omega^2(a)}{a-u_i} - \omega_i(y)\omega(y) + 2\int_a^y \omega_i(x)\omega'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Z toho, že $I_a(y)$ je spojitá funkcia premennej y, a pri výpočte $\lim_{y\to u_i-} I_a(y)$ je možné využiť vyjadrenie (4.45), vyplýva

$$\begin{aligned} I_a(u_i) = \lim_{y\to u_i-} I_a(y) &= \frac{\omega^2(a)}{a-u_i} - \omega_i(u_i)\omega(u_i) + 2\int_a^{u_i} \omega_i(x)\omega'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\omega^2(a)}{a-u_i} + 2\int_a^{u_i} \omega_i(x)\omega'(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{4.46}$$

Analogicky je možné dokázať, že

$$I^b(u_i) = \lim_{y\to u_i+} I^b(y) = -\frac{\omega^2(b)}{b-u_i} + 2\int_{u_i}^{b} \omega_i(x)\omega'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4.47}$$

Polynóm $\omega_i\omega' \in \mathbb{R}[x]$ má numerický stupeň $2n$, a tak, v súlade s vetou 4.8 a lemou 4.5,

$$\int_a^b \omega_i(x)\omega'(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} g_k\omega_i(u_k)\omega'(u_k). \tag{4.48}$$

Vzhľadom na (4.44) a (4.46)–(4.48) dostávame

$$\begin{aligned} \int_a^b \omega_i^2(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{\omega^2(a)}{a-u_i} - \frac{\omega^2(b)}{b-u_i} + 2\sum_{k=0}^{n} g_k\omega_i(u_k)\omega'(u_k) \\ &= \frac{\omega^2(a)}{a-u_i} - \frac{\omega^2(b)}{b-u_i} + 2g_i\omega_i(u_i)\omega'(u_i). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Keďže

$$\omega' = \sum_{j=0}^{n} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-j)\cdot \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x-u_k) = \sum_{j=0}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x-u_k),$$

máme

$$\omega'(u_i) = \sum_{j=0}^{n}\prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(u_i-u_k) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}(u_i-u_k) = \omega_i(u_i). \tag{4.50}$$

Z (4.43), (4.49) a (4.50) potom vyplýva, že

$$g_i\omega_i^2(u_i) = \frac{\omega^2(b)}{b-u_i} - \frac{\omega^2(a)}{a-u_i}. \tag{4.51}$$

Ak pre $c \in \{a,b\}$ položíme $f_c := (x-c)^{n+1} \in \mathbb{R}[x]$, z Leibnizovho vzorca na základe lemy 1.5 získavame

$$\begin{aligned}\omega(a) &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j} f_a^{(j)}(a) f_b^{(n+1-j)}(a)\\ &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\binom{n+1}{n+1} f_a^{(n+1)}(a) f_b^{(0)}(a) = \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}(n+1)!(a-b)^{n+1},\end{aligned}$$

a preto

$$\omega^2(a) = \frac{[(n+1)!]^4}{[(2n+2)!]^2}(b-a)^{2n+2}. \tag{4.52}$$

Podobne zistíme, že $\omega^2(b) = \omega^2(a)$. Na základe (4.51), (4.52) a toho, že

$$\frac{1}{b-u_i} - \frac{1}{a-u_i} = \frac{u_i - a + b - u_i}{(b-u_i)(u_i-a)},$$

potom dostávame

$$g_i = \frac{[(n+1)!]^4 (b-a)^{2n+3}}{[(2n+2)!]^2 (u_i-a)(b-u_i)\omega_i^2(u_i)}, \tag{4.53}$$

čo vzhľadom na tvar polynómu ω_i predstavuje dokazované vyjadrenie koeficientu $g_i = I(a,b,U(a,b,n),i)$. ■

V stredovej súmernosti so stredom $\frac{a+b}{2}$ si navzájom zodpovedajú body $x \in (-\infty, \frac{a+b}{2}\rangle$ a $y \in \langle\frac{a+b}{2}, \infty)$, pričom platí $\frac{a+b}{2} - x = y - \frac{a+b}{2}$, čo je ekvivalentné s tým, že $x+y = a+b$. Tá stredová súmernosť preto navzájom vymieňa body a, b a následne zobrazuje interval $\langle a,b\rangle$ sám na seba. Pri zostavovaní Gaussovej kvadratúrnej formuly je nápomocný poznatok, že uzly množiny $U(a,b,n)$ sú rozložené v (a,b) tak, že tvoria dvojice symetrické podľa bodu $\frac{a+b}{2}$ (stredu intervalu $\langle a,b\rangle$) a koeficienty Gaussovej kvadratúry, ktoré zodpovedajú navzájom symetricky umiestneným uzlom, sú totožné.

Veta 4.10 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a,\infty)$, $n \in [0,\infty)$, $\overset{n}{\underset{j=0}{\boldsymbol{\Gamma}}}(u_j)$ je rastúca postupnosť všetkých koreňov polynómu $\omega_{a,b,n}$, $U(a,b,n) = \{u_j : j \in [0,n]\}$ a $i \in [0,n]$, tak*

1. $u_{n-i} = a+b-u_i$;
2. $I(a,b,U(a,b,n),n-i) = I(a,b,U(a,b,n),i)$.

Dôkaz. 1. Nech $\omega := \omega_{a,b,n}$ a $\psi := \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1}$. Matematickou indukciou vzhľadom na k ukážeme, že platí výrok $\forall k \in [0,\infty)\ T(k)$, kde $T(k)$ pre $k \in [0,\infty)$ je výrok

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi^{(k)}(a+b-x) = (-1)^k \psi^{(k)}(x). \tag{4.54}$$

Pre $k = 0$ a $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\begin{aligned}\psi^{(0)}(a+b-x) = \psi(a+b-x) &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}(b-x)^{n+1}(a-x)^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)!}{(2n+2)!}(x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1} = (-1)^0\psi^{(0)}(x).\end{aligned}$$

Ak $k \in [0,\infty)$, $T(k)$ platí a $x \in \mathbb{R}$, tak

$$\begin{aligned}&\psi^{(k+1)}(a+b-x) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\psi^{(k)}(y)\right]_{y=a+b-x} \\ &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[(-1)^k\psi^{(k)}(a+b-y)\right]\right\}_{y=a+b-x} \\ &=(-1)^k\left\{\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\psi^{(k)}(z)\right]_{z=a+b-y}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(a+b-y)\right\}_{y=a+b-x} \\ &=(-1)^{k+1}\left[\psi^{(k+1)}(a+b-y)\right]_{y=a+b-x} = (-1)^{k+1}\psi^{(k+1)}(x)\end{aligned}$$

a výrok $T(k+1)$ je pravdivý.

Podľa $T(n+1)$ pre každé $x \in \mathbb{R}$ dostávame

$$\omega(a+b-x) = \psi^{(n+1)}(a+b-x) = (-1)^{n+1}\psi^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\omega(x).$$

Pre každé $j \in [0,n]$ je teda

$$\omega(a+b-u_j) = (-1)^{n+1}\omega(u_j) = 0.$$

Ak $j \in [0,n-1]$, podľa predpokladov vety platí $u_{n-j-1} < u_{n-j}$ a následne

$$a+b-u_{n-j} < a+b-u_{n-(j+1)}.$$

Postupnosť $p^+ := \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{n}(u_j)$ je rastúca postupnosť všetkých koreňov polynómu ω a postupnosť $p^- := \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{n}(a+b-u_{n-j})$ je rastúca postupnosť koreňov polynómu ω. Keďže postupnosť p^- má dĺžku $n+1$, obsahuje všetky korene polynómu ω a je totožná s p^+. Pre každé $j \in [0, n]$ teda platí $a+b-u_{n-j} = u_j$, čo je ekvivalentné s tým, že $u_{n-j} = a + b - u_j$.

2. V dôkaze vety 4.9 sme videli, že pre každé $j \in [0, n]$ platí $\omega_j(u_j) = \omega'(u_j)$ (pozri (4.50)). Pretože $\omega' = [\psi^{(n+1)}]' = \psi^{(n+2)}$, z $T(n + 2)$ vyplýva, že je

$$\begin{aligned}\omega'(u_{n-i}) &= \omega'(a + b - u_i) = \psi^{(n+2)}(a + b - u_i)\\ &= (-1)^{n+2}\psi^{(n+2)}(u_i) = (-1)^{n+2}\omega'(u_i),\end{aligned}$$

v dôsledku čoho máme

$$\omega^2_{n-i}(u_{n-i}) = [\omega'(u_{n-i})]^2 = [(-1)^{n+2}\omega'(u_i)]^2 = [\omega'(u_i)]^2 = \omega^2_i(u_i).$$

Podľa vety 4.10.1 je tiež

$$(u_{n-i} - a)(b - u_{n-i}) = (b - u_i)(u_i - a),$$

preto na základe (4.53) pre $I(a, b, U(a, b, n), n - i)$ dostávame vyjadrenie

$$\begin{aligned}&\frac{[(n + 1)!]^4(b - a)^{2n+3}}{[(2n + 2)!]^2(u_{n-i} - a)(b - u_{n-i})\omega^2_{n-i}(u_{n-i})}\\ =&\frac{[(n + 1)!]^4(b - a)^{2n+3}}{[(2n + 2)!]^2(u_i - a)(b - u_i)\omega^2_i(u_i)} = I(a, b, U(a, b, n), i). \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Všimnime si teraz ako vyzerajú aproximácie $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ podľa najjednoduchších Gaussových kvadratúrnych formúl. Ak $n = 0$, tak podľa vety 4.10.1 a tvrdenia 4.4 jediný uzol v $Q(a, b, 0)$ je $\frac{a+b}{2}$ a prislúcha mu koeficient $b - a$, takže

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx (b - a)f\left(\frac{a + b}{2}\right),$$

a to znamená, že v tomto prípade Gaussova kvadratúrna formula je totožná s formulou obdĺžnikovou.

Gaussova kvadratúra sa najčastejšie používa na intervale $\langle -1, 1\rangle$. Ľubovoľný interval $\langle a, b\rangle$ totiž môžeme vhodnou lineárnou transformáciou $y = \alpha x + \beta$ previesť na interval $\langle -1, 1\rangle$. Jedna z (dvoch) možností je taká, že $\alpha a + \beta = -1$ a $\alpha b + \beta = 1$, odkiaľ dostaneme $\alpha = \frac{2}{b-a}$, $\beta = -\frac{a+b}{b-a}$, $x = \frac{b-a}{2}y + \frac{a+b}{2}$ a následne

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b - a}{2}\int_{-1}^1 f\left(\frac{b - a}{2}y + \frac{a + b}{2}\right)\mathrm{d}y.$$

V Gaussovej kvadratúrnej formule $Q(-1,1,U(-1,1,n))$ vystupuje množina $U(-1,1,n)$ všetkých koreňov monického polynómu

$$\frac{(n+1)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}[(x^2-1)^{n+1}].$$

Nech $U(-1,1,n)=\{u_i^{(n)} : i\in[0,n]\}$, pričom postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}\limits_{i=0}^{n}(u_i^{(n)})$ je rastúca, a nech $g_i^{(n)} := I(-1,1,U(-1,1,n),i)$ pre $i\in[0,n]$. Z vety 4.10 a tvrdenia 4.4.2 potom vieme, že pre každé $i\in[0,n]$ je $u_{n-i}^{(n)}=-u_i^{(n)}$, $g_{n-i}^{(n)}=g_i^{(n)}$ a $\sum_{j=0}^{n} g_j^{(n)}=2$.

Ak $n=1$, tak $g_0^{(0)}=g_1^{(0)}=1$, $u_0^{(1)}$ a $u_1^{(1)}$ sú korene polynómu $x^2-\frac{1}{3}$, preto $u_0^{(1)}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ a $u_1^{(1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, čo dáva

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Pre $n=2$ je množina $U(-1,1,2)$ tvorená koreňmi polynómu $x(x^2-\frac{3}{5})$, a tak $u_0^{(2)}=-\sqrt{\frac{3}{5}}$, $u_1^{(2)}=0$ a $u_2^{(2)}=\sqrt{\frac{3}{5}}$. Pretože

$$\left[u_1^{(2)}-(-1)\right]\left[1-u_1^{(2)}\right]\prod_{\substack{j=0\\ j\neq 1}}^{2}\left(u_1^{(2)}-u_j^{(2)}\right)^2=\frac{3^2}{5^2},$$

z vety 4.9 vidíme, že

$$g_1^{(2)}=\frac{(2\cdot 3)^4\cdot 2^7}{(2^4\cdot 3^2\cdot 5)^2\cdot\frac{3^2}{5^2}}=\frac{8}{9}$$

a následne

$$g_0^{(2)}=g_2^{(2)}=\frac{5}{9},$$

čo vedie k aproximácii

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right].$$

Kapitola 5

Riešenie nelineárnych rovníc

Veľmi častou matematickou úlohou je určenie argumentu $\tilde{x} \in \mathbb{R}$, pre ktorý reálna funkcia g nadobúda hodnotu $\alpha \in \mathbb{R}$; ide teda o riešenie rovnice $g(x) = \alpha$. Pre reálnu funkciu $f = \{(x, g(x) - \alpha) : x \in \mathrm{dom}(g)\}$ platí

$$\forall x \in \mathrm{dom}(g)\ (g(x) = \alpha \Leftrightarrow f(x) = 0).$$

Z toho vyplýva, že riešenie rovnice $g(x) = \alpha$ je ekvivalentné s riešením rovnice $f(x) = 0$, teda hľadaním *nulového bodu* funkcie f (takého argumentu $\beta \in \mathrm{dom}(f)$, pre ktorý $f(\beta) = 0$). Nasledovné poznatky sú jednoduché, ale užitočné:

Tvrdenie 5.1 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $d \in (a, b)$, reálna funkcia f je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$, $f(a)f(b) < 0$ a $f(d) \neq 0$, tak*

1. *existuje $c \in (a, b)$, pre ktoré je $f(c) = 0$;*
2. *existuje práve jedna usporiadaná dvojica $(a', b') \in \{(a, d), (d, b)\}$ spĺňajúca $f(a')f(b') < 0$.*

Dôkaz. 1. Zo spojitosti funkcie f v $\langle a, b\rangle$ vyplýva existencia čísel $m := \min f(\langle a, b\rangle)$ a $M := \max f(\langle a, b\rangle)$, ako aj to, že $f(\langle a, b\rangle) = \langle m, M\rangle$. Pritom je $m \leq \min(f(a), f(b)) < 0$, $M \geq \max(f(a), f(b)) > 0$, $0 \in \langle m, M\rangle$, a tak 0 má vzor $c \in \langle a, b\rangle$ vzhľadom na funkciu f. Pretože $f(a) \neq 0$ aj $f(b) \neq 0$, je $c \in (a, b)$.

2. Z predpokladov tvrdenia vyplýva $[f(d)]^2 > 0$, preto je

$$[f(a)f(d)][f(d)f(b)] = [f(a)f(b)][f(d)]^2 < 0,$$

a tak práve jedno z čísel $f(a)f(d)$ a $f(d)f(b)$ je záporné. ∎

Dôsledok 5.2 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, reálna funkcia f je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$ a nemá v tomto intervale nulový bod, tak pre každé $x, y \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x)f(y) > 0$.*

Dôkaz. Pretože $f(x) \neq 0$ aj $f(y) \neq 0$, je tiež $f(x)f(y) \neq 0$. Predpokladajme, že $f(x)f(y) < 0$, čo nutne implikuje $x \neq y$; bez ujmy na všeobecnosti nech $x < y$. Podľa tvrdenia 5.1 potom existuje $z \in (x, y) \subseteq (a, b)$, pre ktoré je $f(z) = 0$, čo je v spore s jedným z predpokladov dôsledku. ∎

Interval $\langle a', b' \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$, ktorý existuje podľa tvrdenia 5.1.2, má dĺžku $b' - a' < b - a$ a reprodukujú sa v ňom podmienky tvrdenia 5.1.1, vo svojom vnútri teda obsahuje nulový bod funkcie f. Táto skutočnosť je základom dvoch jednoduchých metód aproximovania nulového bodu spojitej funkcie, metódy poltenia intervalu a metódy regula falsi.

5.1 Metóda poltenia intervalu

Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a nech f je reálna funkcia spojitá v intervale $\langle a, b \rangle$ spĺňajúca $f(a)f(b) < 0$. *Metóda poltenia intervalu s parametrami* f, a, b je rekurentný postup, ktorým sa definujú postupnosti reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej $s_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, spĺňajúce pre každé $n \in [1, \infty)$ nasledovnú podmienku $P(n)$:

$$a_n < b_n \wedge f(a_n)f(b_n) < 0.$$

Metódu budeme označovať $\mathrm{MPI}(f, a, b)$ a má takéto definičné pravidlá:

1. $a_1 := a$, $b_1 := b$. Predpoklady, za ktorých sa $\mathrm{MPI}(f, a, b)$ aplikuje, spôsobujú, že podmienka $P(1)$ je splnená.

2. Nech $n \in [1, \infty)$ a nech pre každé $m \in [1, n]$ už sú definované čísla a_m, b_m (a s_m), pričom je splnená podmienka $P(m)$.

2.1. Ak $f(s_n) \neq 0$, vyberme (a_{n+1}, b_{n+1}) z množiny $\{(a_n, s_n), (s_n, b_n)\}$ tak, aby $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$ (podľa tvrdenia 5.1.2 je usporiadaná dvojica (a_{n+1}, b_{n+1}) určená jednoznačne). Keďže $a_n < b_n$, ľahko sa vidí, že sú splnené nerovnosti $a_n < s_n = \frac{a_n+b_n}{2} < b_n$. Pri každom z dvoch možných výberov usporiadanej dvojice (a_{n+1}, b_{n+1}) preto platí $a_{n+1} < b_{n+1}$, a tak podmienka $P(n+1)$ je splnená.

2.2. Ak $f(s_n) = 0$, položme $a_{n+1} := a_n$ a $b_{n+1} := b_n$; aj v tomto prípade každá z podmienok $a_{n+1} < b_{n+1}$ a $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$ (a teda aj podmienka $P(n+1)$) je splnená.

Postupnosti, ktoré vytvorila $\mathrm{MPI}(f, a, b)$, teda pre každé $n \in [1, \infty)$ spĺňajú (formálne silnejšiu) podmienku $P^+(n)$:

$$a_n < s_n < b_n \wedge f(a_n)f(b_n) < 0.$$

Ak pre niektoré $l \in [1, \infty)$ platí $f(s_l) = 0$ (pri definovaní čísel a_{l+1}, b_{l+1} sa teda aplikuje definičné pravidlo 2.2.), matematickou indukciou vzhľadom na n sa ľahko ukáže, že platí výrok $\forall n \in [l, \infty)$ $(a_n = a_l \wedge s_n = s_l \wedge b_n = b_l)$. V takom prípade môžeme obrazne povedať, že metóda „zamrzla“ (v súlade s tým, že postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú počínajúc od indexu l konštantné).

Horeuvedená situácia je však skôr výnimočná (po konečnom počte krokov MPI(f, a, b) nájde nulový bod s_l funkcie f). Oveľa častejšie sa pre každé $n \in [1, \infty)$ pri definovaní čísel a_{n+1}, b_{n+1} aplikuje definičné pravidlo 2.1. Od toho je odvodený aj názov metódy; znamená to totiž, že interval $\langle a_{n+1}, b_{n+1}\rangle$ je jeden z intervalov, ktoré vzniknú z intervalu $\langle a_n, b_n\rangle$ jeho rozpoltením, teda rozdelením na dva rovnako veľké podintervaly (pomocou jeho stredu s_n).

Veta 5.3 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a reálna funkcia f spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$ spĺňa $f(a)f(b) < 0$, tak postupnosť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorú vytvorila* MPI(f, a, b)*, je konvergentná, pričom platí $S := \lim_{n\to\infty} s_n \in (a, b)$ a $f(S) = 0$.*

Dôkaz. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú ďalšie postupnosti, ktoré vytvorila MPI(f, a, b). Položme $a_0 := a$, $b_0 := b$ a matematickou indukciou vzhľadom na n ukážme, že pre každé $n \in [1, \infty)$ platí tvrdenie $T(n)$, ktoré je konjunkciou nerovností $a \le a_{n-1} \le a_n < b_n \le b_{n-1} \le b$, $f(a_n)f(a) > 0$ a $f(b_n)f(b) > 0$. (Nerovnosť $a_n < b_n$ je pritom súčasťou $P(n)$, a tak ju dokazovať netreba.) Pretože $a = a_0 = a_1$, $b_1 = b_0 = b$, $f(a_1)f(a) = [f(a)]^2 > 0$ a $f(b_1)f(b) = [f(b)]^2 > 0$, tvrdenie $T(1)$ je pravdivé.

Predpokladajme teda, že $n \in [1, \infty)$ a $T(n)$ je pravdivé. Nerovnosti $a \le a_n$ a $b_n \le b$ získame bezprostredne z indukčného predpokladu. Keďže $a_{n+1} \in \{a_n, s_n\}$, $b_{n+1} \in \{s_n, b_n\}$ a $a_n < s_n < b_n$, platí aj $a_n \le a_{n+1}$ a $b_{n+1} \le b_n$. Z nerovností $f(a)f(b) < 0$ a $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$ dostávame

$$[f(a_{n+1})f(a)][f(b_{n+1})f(b)] = [f(a)f(b)][f(a_{n+1})f(b_{n+1})] > 0. \tag{5.1}$$

Na základe definičných pravidiel MPI(f, a, b) vieme, že je buď $a_{n+1} = a_n$ a $f(a_{n+1})f(a) = f(a_n)f(a)$ alebo $b_{n+1} = b_n$ a $f(b_{n+1})f(b) = f(b_n)f(b)$; v súlade s $T(n)$ preto jedna z nerovností $f(a_{n+1})f(a) > 0$ a $f(b_{n+1})f(b) > 0$ je pravdivá. Podľa (5.1) potom musí byť pravdivá aj druhá z uvedených nerovností. Tvrdenie $T(n + 1)$ je teda pravdivé.

Ak metóda „zamrzla“, existuje také $l \in [1, \infty)$, že $f(s_l) = 0$. V takom prípade je $s_n = s_l$ pre každé $n \in [l, \infty)$, pričom podľa $T(l)$ máme $a < s_l < b$. Preto S existuje a platí preň $S = s_l \in (a, b)$ a $f(S) = f(s_l) = 0$.

V ďalšom nech $f(s_n) \ne 0$ pre každé $n \in [1, \infty)$. V súlade s definíciou MPI(f, a, b) to znamená, že $(a_{n+1}, b_{n+1}) \in \{(a_n, s_n), (s_n, b_n)\}$ a následne, s ohľadom na rovnosti $s_n - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} = b_n - s_n$,

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n). \tag{5.2}$$

Matematickou indukciou vzhľadom na n ukážeme, že platí

$$\forall n \in [1, \infty)\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}. \tag{5.3}$$

Pre $n = 1$ máme $b_1 - a_1 = b - a = \frac{b-a}{2^{1-1}}$. Ak $n \in [1, \infty)$ a $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$, tak podľa (5.2) platí $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b-a}{2^{n-1}} = \frac{b-a}{2^{(n+1)-1}}$.

Pretože $T(n)$ platí pre každé $n \in [1, \infty)$, postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca a zhora ohraničená číslom b; podobne postupnosť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca a zdola ohraničená číslom a. Obe postupnosti sú teda konvergentné a platí

$$a \leq A := \lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n =: B \leq b.$$

Z konečnosti oboch limít vyplýva, že aj postupnosť $\{b_n - a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentná, pričom využitím (5.3) dostávame

$$B - A = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^{n-1}} = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = (b-a) \cdot 0 = 0,$$

a tak $A = B$. Keďže $a_n < s_n < b_n$ pre každé $n \in [1, \infty)$, existuje aj $S = \lim_{n\to\infty} s_n$ a $A = S = B \in \langle a, b \rangle$.

Ukážme, že $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$. Keďže $a \leq a_n \leq A$ pre každé $n \in [1, \infty)$, tvrdenie je triviálne pravdivé, ak $a = A$. Nech teda $a < A$. Vyberme $\varepsilon \in (0, \infty)$. Zo spojitosti funkcie f v bode $A \in (a, b\rangle$ zľava vyplýva, že existuje $\delta \in (0, \infty)$, pre ktoré platí $|f(x) - f(A)| < \varepsilon$ akonáhle $A - \delta < x \leq A$. Pretože $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca, vieme nájsť $n_1 \in [1, \infty)$ tak, že pre každé $n \in [n_1, \infty)$ máme $A - \delta < a_{n_1} \leq a_n \leq A$ a následne $|f(a_n) - f(A)| < \varepsilon$. To znamená, že dokazované tvrdenie je pravdivé aj v tomto prípade.

Analogicky sa dokáže aj rovnosť $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(B)$ (využije sa spojitosť funkcie f sprava pre všetky argumenty z intervalu $\langle a, b)$).

Ak $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$, z nerovností $f(a)f(a_n) > 0$ a $f(b)f(b_n) > 0$ vidíme, že $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť záporných čísel a $\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných čísel. V súlade s tým máme $0 \geq \lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) = f(S)$, ale aj $0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(B) = f(S)$, a tak $f(S) = 0$. Z toho, že $f(a) \neq 0$ aj $f(b) \neq 0$, potom vyplýva $S \in (a, b)$.

Ak $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$, postup je podobný ako v prípade $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. ■

5.2 Metóda regula falsi

Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, tak reálna funkcia f spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$, pre ktorú $f(a)f(b) < 0$, má podľa tvrdenia 5.1.1 nulový bod v intervale (a, b). Na základe toho istého tvrdenia má v intervale (a, b) nulový bod (koreň) aj interpolačný polynóm $L \in \mathbb{R}[x]$ funkcie f na uzlovej množine $\{a, b\}$; ten je prirodzenou aproximáciou (ľubovoľného) nulového bodu funkcie f v (a, b).

Tvrdenie 5.4 *Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a nech f je reálna funkcia, pre ktorú $f(a)f(b) < 0$. Ak $L \in \mathbb{R}[x]$ je interpolačný polynóm funkcie f na uzlovej množine $\{a, b\}$, tak L má jediný koreň d, pričom platí*

$$d = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} \in (a, b).$$

Dôkaz. Keďže uzlová množina $\{a, b\}$ je dvojprvková, je $\mathrm{nst}(L) \leq 1$ a L má nanajvýš jeden koreň. V dôsledku tvrdenia 5.1.1 však L má koreň $d \in (a, b)$. Podľa (2.1) máme

$$L = f(a)\frac{x - b}{a - b} + f(b)\frac{x - a}{b - a} = \frac{[f(b) - f(a)]x + bf(a) - af(b)}{b - a},$$

preto z $L(d) = 0$ vyplýva $[f(b) - f(a)]d + bf(a) - af(b) = 0$, odkiaľ dostávame avizované vyjadrenie pre d. ■

Dôsledok 5.5 *Ak $a, b, \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$, pričom $a < b$ a $\bar{a}\bar{b} < 0$, tak $a < \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} < b$.*

Dôkaz. Nech pre reálnu funkciu f platí $f(a) = \bar{a}$ a $f(b) = \bar{b}$. Podľa tvrdenia 5.4 potom $a < \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{a\bar{b} - b\bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} < b$. ■

Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a nech reálna funkcia f je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$, pričom platí nerovnosť $f(a)f(b) < 0$. Aproximovanie nulového bodu funkcie f pomocou tvrdenia 5.4 využíva *metóda regula falsi s parametrami* f, a, b (označenie $\mathrm{MRF}(f, a, b)$). Ide o rekurentný postup, ktorým sa definujú postupnosti reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej $d_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$, spĺňajúce pre každé $n \in [1, \infty)$ podmienku $P(n)$, s ktorou sme sa už stretli pri metóde poltenia intervalu. Definičné pravidlá metódy sú nasledovné:

1. $a_1 := a$, $b_1 := b$. V súlade s dôsledkom 5.5 je podmienka $P(1)$ splnená.

2. Nech $n \in [1, \infty)$ a nech pre každé $m \in [1, n]$ už sú definované čísla a_m, b_m (a d_m) tak, že je splnená podmienka $P(m)$. Pretože $a_n < b_n$ a $f(a_n)f(b_n) < 0$, na základe dôsledku 5.5 máme $a_n < d_n < b_n$. Bod d_n teda delí interval $\langle a_n, b_n\rangle$

na dva (nedegenerované) intervaly $\langle a_n, d_n\rangle$, $\langle d_n, b_n\rangle$ a zohráva podobnú úlohu ako bod s_n v prípade metódy poltenia intervalu.

2.1. Ak $f(d_n) \neq 0$, vyberme usporiadanú dvojicu (a_{n+1}, b_{n+1}) z množiny $\{(a_n, d_n), (d_n, b_n)\}$ tak, aby $f(a_{n+1})f(b_{n+1}) < 0$ (podľa tvrdenia 5.1.2 taký výber je možný a pritom jednoznačný). Bez ohľadu na to, ktorá usporiadaná dvojica bola vybratá, platí $a_{n+1} < b_{n+1}$, a tak je splnená aj druhá časť podmienky $P(n+1)$.

2.2. Ak $f(d_n) = 0$, položme $a_{n+1} := a_n$ a $b_{n+1} := b_n$. Ľahko sa vidí, že potom $d_{n+1} = d_n$ a následne je splnená podmienka $P(n+1)$. (Podobne ako pri MPI(f, a, b) aj tentoraz obrazne hovoríme, že MRF(f, a, b) „zamrzla".)

Postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktoré vytvorila MRF(f, a, b), teda pre každé $n \in [1, \infty)$ spĺňajú (formálne silnejšiu) podmienku $\tilde{P}^{+}(n)$:

$$a_n < d_n < b_n \wedge f(a_n)f(b_n) < 0.$$

Pre vzdialenosť deliaceho bodu d_n od okrajov intervalu $\langle a_n, b_n\rangle$ platí

$$d_n - a_n = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n) - a_n[f(b_n) - f(a_n)]}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(a_n) - f(b_n)}, \quad (5.4)$$

$$b_n - d_n = \frac{b_n[f(b_n) - f(a_n)] - a_n f(b_n) + b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}. \quad (5.5)$$

Veta 5.6 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, reálna funkcia f je spojitá v intervale $\langle a, b\rangle$ a $f(a)f(b) < 0$, tak postupnosť $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorú vytvorila* MRF(f, a, b), *je konvergentná a pre $D := \lim\limits_{n\to\infty} d_n$ platí $f(D) = 0$ a $D \in (a, b)$.*

Dôkaz. Nech $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sú zostávajúce dve postupnosti, ktoré vytvorila MRF(f, a, b). Položme $a_0 := a$, $b_0 := b$. Podobne ako v dôkaze vety 5.3 je aj tentoraz možné dokázať, že pre každé $n \in [1, \infty)$ platí trdenie $T(n)$, ktoré je konjunkciou nerovností $a \leq a_{n-1} \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq b$, $f(a_n)f(a) > 0$ a $f(b_n)f(b) > 0$.

Ak metóda „zamrzla", existuje $l \in [1, \infty)$, pre ktoré $f(d_l) = 0$ a $d_n = d_l$ pre každé $n \in [l, \infty)$. V takom prípade na základe $T(l)$ máme $a < d_l < b$, D teda triviálne existuje a platí $D = d_l \in (a, b)$ a $f(D) = f(d_l) = 0$.

V ďalšom nech $f(d_n) \neq 0$ pre každé $n \in [1, \infty)$. Tak ako v dôkaze vety 5.3 získame aj existenciu limít $A := \lim_{n\to\infty} a_n$, $B := \lim_{n\to\infty} b_n$, nerovnosti $a \leq A \leq B \leq b$ a rovnosti $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$ a $\lim_{n\to\infty}(f(b_n) = f(B)$. V tomto prípade ukážeme, že D existuje, pričom $D \in \{A\} \cup \{B\}$ a $f(D) = 0$. Veta tým bude dokázaná, lebo potom $D \in \langle a, b\rangle$, ale zároveň $f(a) \neq 0$ aj $f(b) \neq 0$ (dôsledky podmienky $f(a)f(b) < 0$).

Pre každé $n \in [1, \infty)$ sa aplikuje definičné pravidlo 2.1. Ak teda položíme

$$\mathcal{I}_a := \{n \in [1, \infty) : d_n = a_{n+1}\},$$
$$\mathcal{I}_b := \{n \in [1, \infty) : d_n = b_{n+1}\},$$

tak $\mathcal{I}_a \cap \mathcal{I}_b = \emptyset$ a $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_b = [1, \infty)$.

V našej analýze sa budeme opierať o päť pomocných tvrdení T_i, $i \in [1, 5]$, ktoré dokážeme postupne pre i rastúce od 1 po 5.

T_1. *Ak množina $\mathcal{I}_a$ je konečná, tak D existuje a platí $D = B$.*

T_2. *Ak množina $\mathcal{I}_b$ je konečná, tak D existuje a platí $D = A$.*

T_3. *Ak množina $\mathcal{I}_a$ je nekonečná a $f(A) \neq f(B)$, tak $f(A) = 0$.*

T_4. *Ak množina $\mathcal{I}_b$ je nekonečná a $f(A) \neq f(B)$, tak $f(B) = 0$.*

T_5. *Ak $f(A) \neq f(B)$, tak jedna z množín $\mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_b$ je konečná a druhá nekonečná.*

T_1: Ak množina $\mathcal{I}_a$ je konečná, existuje také $k \in [1, \infty)$, že $\mathcal{I}_a \subseteq [1, k-1]$ a $\mathcal{I}_b \supseteq [k, \infty)$. Pre každé $k, l \in [1, \infty)$ postupnosti reálnych čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{x_n\}_{n=k}^{\infty}$ a $\{x_{n+l}\}_{n=1}^{\infty}$ sú súčasne konvergentné alebo súčasne divergentné. Preto $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\geq k}} b_n = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\geq k}} d_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} d_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} d_n = D$. □

T_2: Tvrdenie sa dokáže podobne ako T_1. □

T_3: Nech $\mathcal{I}_a$ je nekonečná a $f(A) \neq f(B)$. Z predošlého vieme, že existujú konečné limity $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(A)$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = B - A$ a $\lim\limits_{n\to\infty}[f(a_n) - f(b_n)] = f(A) - f(B) \neq 0$. Z nekonečnosti množiny $\mathcal{I}_a$ vyplýva, že platí aj $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}} f(a_n) = f(A)$, $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}}(b_n - a_n) = B - A$ a $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}}[f(a_n) - f(b_n] = f(A) - f(B) \neq 0$, odkiaľ potom dostávame

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}} \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(a_n) - f(b_n)} = \frac{f(A)(B - A)}{f(A) - f(B)}. \tag{5.6}$$

Ak využijeme (5.4), ďalším dôsledkom nekonečnosti $\mathcal{I}_a$ (s ohľadom na to, že $0 = A - A = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = \lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}}(a_{n+1} - a_n)$) je

$$0 = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}}(a_{n+1} - a_n) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}}(d_n - a_n) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_a}} \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(a_n) - f(b_n)}. \tag{5.7}$$

Na základe (5.6) a (5.7) vidíme, že $f(A)(B - A) = 0$, a tak $f(A) = 0$ (lebo $f(A) \neq f(B)$ implikuje $A \neq B$). □

T_4: Ak $\mathcal{I}_b$ je nekonečná a $f(A) \neq f(B)$, analogicky ako vyššie pomocou (5.5) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}(b_n - b_{n+1}) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_b}}(b_n - b_{n+1}) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_b}}(b_n - d_n) \\ &= \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in\mathcal{I}_b}} \frac{f(b_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)} = \frac{f(B)(B-A)}{f(B)-f(A)} \end{aligned}$$

a odtiaľ $f(B) = 0$. □

T_5: Pretože množina $\mathcal{I}_a \cup \mathcal{I}_b = [1,\infty)$ je nekonečná, aspoň jedna z množín $\mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_b$ musí byť nekonečná. Ak je však $f(A) \neq f(B)$, tak z T_3 a T_4 vyplýva, že množiny $\mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_b$ nemôžu byť nekonečné súčasne. Jedna z množín $\mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_b$ je teda konečná a druhá nekonečná. □

Z predpokladu $f(a)f(b) < 0$ máme buď $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$ alebo $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$. Ak nastáva prvá alternatíva, pre každé $n \in [1,\infty)$ z $T(n)$ dostávame $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ a odtiaľ

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0 \leq \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(B).$$

Analýzu organizujeme podľa toho, ktoré z alternatív rovnosť, resp. ostrá nerovnosť sa realizujú v nerovnostiach $A \leq B$ a $f(A) \leq f(B)$.

(1) Ak $A = B$, tak $f(A) \leq 0 \leq f(B) = f(A)$ a $f(A) = f(B) = 0$. Ďalej, z $a_n < d_n < b_n$ a $A = B$ vyplýva existencia limity D, ako aj rovnosti $A = D = B$ a $f(D) = 0$.

(2) $A < B$

(21) Ak $f(A) < f(B)$, podľa pomocného tvrdenia T_5 jedna z množín $\mathcal{I}_a$, $\mathcal{I}_b$ je konečná a druhá nekonečná.

(211) Ak $\mathcal{I}_a$ je konečná a $\mathcal{I}_b$ nekonečná, tak z T_1 dostávame, že D existuje a platí $D = B$, a podľa T_4 máme $f(D) = f(B) = 0$.

(212) Ak $\mathcal{I}_b$ je konečná a $\mathcal{I}_a$ nekonečná, na základe T_2 a T_3 vieme, že D existuje, pričom $D = A$ a $f(D) = f(A) = 0$.

(22) Ak $f(A) = f(B)$, tak nerovnosti $f(A) \leq 0 \leq 0 \leq f(B)$ nám dávajú $f(A) = f(B) = 0$.

(221) Ak $\mathcal{I}_a$ je konečná, tak v súlade s T_1 vieme, že D existuje a $D = B$, je preto $f(D) = f(B) = 0$.

(222) Ak $\mathcal{I}_b$ je konečná, tak podobne ako v prípade **(221)** (tentoraz na základe T_2) D existuje a platí $D = A$, čo znamená, že je $f(D) = f(A) = 0$.

(223) Nech $\mathcal{I}_a$ aj $\mathcal{I}_b$ sú nekonečné množiny. Pretože $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je neklesajúca postupnosť s limitou A, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerastúca postupnosť s limitou B a $B - A > 0$, existuje $n_1 \in [1,\infty)$ také, že

$$\forall n \in [n_1,\infty)\ \max(A - a_n, b_n - B) < \frac{B-A}{2}. \tag{5.8}$$

Keďže $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) = 0$ a $-f(a_{n_1}) > 0$, existuje také $n_1' \in [n_1, \infty)$, že pre každé $n \in [n_1', \infty)$ je $|f(a_n) - 0| < -f(a_{n_1})$, čo je ekvivalentné s nerovnosťou $f(a_{n_1}) < f(a_n)$. Nech $n_2 \in [n_1, n_1']$ je také, že $f(a_{n_2}) = \min(f(a_n) : n \in [n_1, n_1']) =: m_a$. Pre každé $n \in [n_1, \infty)$ je potom splnená nerovnosť $m_a \leq f(a_n)$.

Analogicky z toho, že $\lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(B) = 0$ a $f(b_{n_1}) > 0$, dostaneme $n_1'' \in [n_1, \infty)$ spĺňajúce $f(a_n) < f(a_{n_1})$ pre každé $n \in [n_1'', \infty)$. Ak $n_3 \in [n_1, n_1'']$, pričom $f(b_{n_3}) = \max(f(b_n) : n \in [n_1, n_1'']) =: M_b$, tak pre každé $n \in [n_1, \infty)$ platí $f(b_n) \leq M_b$.

Sporom ukážeme, že platí $|m_a| \leq \frac{1}{2}|M_b|$. Pripusťme, že by bolo $|m_a| > \frac{1}{2}|M_b|$, t. j. $-m_a > \frac{1}{2}M_b$, $-2m_a > M_b$ a následne

$$\forall n \in [n_1, \infty) \;\; -2f(a_{n_2}) > M_b \geq f(b_n). \tag{5.9}$$

Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre každé $n \in [n_2, \infty)$ platí $a_n = a_{n_2}$. Pre $n = n_2$ niet čo dokazovať. Predpokladajme teda, že $n \in [n_2, \infty)$ a $a_n = a_{n_2}$. Podľa (5.4) potom získavame

$$d_n = a_n + \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(a_n) - f(b_n)} = a_{n_2} - \frac{f(a_{n_2})(b_n - a_{n_2})}{f(b_n) - f(a_{n_2})}. \tag{5.10}$$

Z toho, že $a_{n_2} \leq A < B \leq b_n$, dostávame

$$b_n - a_{n_2} \geq B - a_{n_2} > A - a_{n_2} \geq 0. \tag{5.11}$$

Keďže $n \geq n_2 \geq n_1$, $f(b_n) > 0$ a $f(a_{n_2}) < 0$, na základe (5.9) máme

$$0 < f(b_n) - f(a_{n_2}) < -2f(a_{n_2}) - f(a_{n_2}) = -3f(a_{n_2}),$$

a tak

$$\frac{1}{f(b_n) - f(a_{n_2})} > -\frac{1}{3f(a_{n_2})} > 0,$$

čo spolu s (5.11) dáva

$$\frac{b_n - a_{n_2}}{f(b_n) - f(a_{n_2})} > -\frac{B - a_{n_2}}{3f(a_{n_2})}. \tag{5.12}$$

Vynásobením oboch strán nerovnosti (5.12) kladným číslom $-f(a_{n_2})$ získavame nerovnosť

$$-\frac{f(a_{n_2})(b_n - a_{n_2})}{f(b_n) - f(a_{n_2})} > \frac{B - a_{n_2}}{3}$$

a z nej vzhľadom na (5.10)

$$d_n > a_{n_2} + \frac{B - a_{n_2}}{3} = \frac{B + 2a_{n_2}}{3} = A + \frac{2a_{n_2} + B - 3A}{3}.$$

Pretože $n_2 \geq n_1$, podľa (5.8) máme $A - a_{n_2} < \frac{B-A}{2}$, $2(A - a_{n_2}) < B - A$ a $2a_{n_2} + B - 3A > 0$, z čoho vyplýva $d_n > A$. Postupnosť $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ je neklesajúca, teda $a_{n+1} \leq A$, a preto nutne $d_n = b_{n+1}$. Z definičných pravidiel MRF(f, a, b) potom vyplýva $a_{n+1} = a_n$, podľa indukčného predpokladu teda $a_{n+1} = a_{n_2}$. Pre všetky $n \in [n_2, \infty)$ potom platí $a_{n+1} = a_{n_2} = a_n < d_n$, $b_{n+1} = d_n$ a $n \in \mathcal{I}_b$ v spore s nekonečnosťou množiny $\mathcal{I}_a$. Tento spor ukazuje, že platí nerovnosť $|m_a| \leq \frac{1}{2}|M_b|$.

Podobne ako vyššie využitím vyjadrenia (5.5) sa sporom dokáže aj nerovnosť $|M_b| \leq \frac{1}{2}|m_a|$; tentoraz predpoklad $|M_b| > \frac{1}{2}|m_a|$ implikuje, že pre každé $n \in [n_3, \infty)$ platí $b_n = b_{n_3}$.

Nerovnosti $|m_a| \leq \frac{1}{2}|M_b|$ a $|M_b| \leq \frac{1}{2}|m_a|$ vedú k nerovnostiam $0 < |m_a| \leq \frac{1}{2}|M_b| \leq \frac{1}{4}|m_a|$, z ktorých vyplýva sporná nerovnosť $1 \leq \frac{1}{4}$. To ukazuje, že prípad **(223)** reálne nemôže nastať.

Ak $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$, dôkaz prebieha analogicky ako v prípade alternatívy $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$. ■

5.3 Newtonova metóda

Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a pre reálnu funkciu f spojitú v intervale $\langle a, b\rangle$ platí $f(a)f(b) < 0$, z viet 5.3, resp. 5.6 vieme, že MPI(f, a, b), resp. MRF(f, a, b) umožňujú nájsť niektorý z nulových bodov funkcie f v intervale (a, b) (na základe tvrdenia 5.1.1 existuje aspoň jeden) s ľubovoľnou presnosťou. Nevýhodou metódy poltenia intervalu i metódy regula falsi môže byť pomalá konvergencia postupnosti aproximácií k nulovému bodu. Ďalšia metóda, s ktorou sa zoznámime, poskytuje vo všeobecnosti konvergenciu rýchlejšiu, je to však vyvážené náročnosťou požiadaviek, ktoré musia byť splnené, aby postupnosť aproximácií vôbec konvergovala k nulovému bodu funkcie f v intervale (a, b). Aby sme mohli metódu opísať, budeme potrebovať nasledovný pomocný výsledok.

Tvrdenie 5.7 *Nech reálna funkcia f je diferencovateľná v bode $z \in \mathbb{R}$, pričom $f'(z) \neq 0$, a nech $p \in \mathbb{R}[x]$ je polynóm, ktorého graf je dotyčnicou grafu funkcie f v bode $(z, f(z))$. Potom polynóm p má práve jeden koreň, a to $z - \frac{f(z)}{f'(z)}$.*

Dôkaz. Z geometrického významu prvej derivácie funkcie f vyplýva, že $p = kx + q$, kde $k = f'(z)$ je smernica dotyčnice spomenutej v tvrdení. Keďže na tej dotyčnici leží bod $(z, f(z))$, platí $f(z) = p(z) = f'(z)z + q$, a preto pre úsek q máme $q = f(z) - f'(z)z$. V súlade s tým, že $f'(z) \neq 0$, rovnica $f'(z)x + f(z) - f'(z)z = 0$ má jediné riešenie

$$\frac{f'(z)z - f(z)}{f'(z)} = z - \frac{f(z)}{f'(z)}. \quad \blacksquare$$

Na tvrdení 5.7 je založená *Newtonova metóda s parametrami f, z* (označenie NM(f, z)). Ide o rekurentný postup, ktorým sa definuje postupnosť reálnych čísel $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ podľa nasledovných pravidiel:

1. $z_1 := z$.

2. Nech $n \in [1, \infty)$ a nech z_n už je definované.

2.1. Ak $f(z_n)f'(z_n) \neq 0$, tak $z_{n+1} := z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$.

2.2. Ak $f(z_n)f'(z_n) = 0$, tak $z_{n+1} := z_n$ (metóda „zamrzla").

V prípade Newtonovej metódy teda dôvodom „zamrznutia" môže byť nielen to, že niektorá z aproximácií je nulovým bodom funkcie f ako v prípade metódy poltenia intervalu, resp. metódy regula falsi, ale aj principiálna nemožnosť vytvorenia ďalšej aproximácie v súlade s tvrdením 5.7 (ak $f'(z_n) = 0$). S ohľadom na postup získavania novej aproximácie sa Newtonova metóda nazýva aj *dotyčnicovou.*

Veta 5.8 *Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, reálna funkcia f je dvakrát spojite diferencovateľná v intervale $\langle a, b\rangle$, $f(a)f(b) < 0$, $z \in \langle a, b\rangle$, $f(z)f''(z) > 0$, nech pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $f'(x)f'(a) > 0$ a $f''(x)f''(a) > 0$ a nech $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť, ktorú vytvorila* NM(f, z). *Potom existuje $\lim\limits_{n\to\infty} z_n =: Z$ a Z je jediný nulový bod funkcie f ležiaci v (a, b).*

Dôkaz. Podľa tvrdenia 5.1.1 funkcia f má v intervale (a, b) nulový bod. Sporom ukážeme, že počet nulových bodov funkcie f v intervale (a, b) je 1. Nech teda $\alpha_1, \alpha_2 \in (a, b)$, $\alpha_1 < \alpha_2$ a $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$. Na základe Rolleho vety existuje $\beta \in (\alpha_1, \alpha_2) \subseteq (a, b)$, pre ktoré je $f'(\beta) = 0$, a to je v spore s nerovnosťou $f'(\beta)f'(a) > 0$. V ďalšom nech α označuje jediný nulový bod funkcie f v intervale (a, b).

Pretože platí práve jedna z nerovností $f'(a) < 0$ a $f'(a) > 0$ a tiež práve jedna z nerovností $f''(a) < 0$ a $f''(a) > 0$, celkove sú k dispozícii štyri možnosti pre znamienka čísel v usporiadanej dvojici $(f'(a), f''(a))$. Podrobne rozanalyzujeme prípad $f'(a) > 0$ a $f''(a) > 0$, keď pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ platí $f'(x) > 0$ aj $f''(x) > 0$; ostatné sa riešia analogicky.

Položme $z_0 := z$. Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre každé $n \in [0, \infty)$ platí séria nerovností $T(n)$: $\alpha < z_{n+1} \leq z_n \leq b$. Funkcia

f je rastúca v intervale $\langle a, b\rangle$, preto z $a < \alpha < b$ vyplýva $f(a) < f(\alpha) = 0 < f(b)$. Z predpokladov vety dostávame $f''(z) > 0$ a následne $f(z) > 0$. To, že f je rastúca v intervale $\langle a, b\rangle$, potom implikuje $\alpha < z = z_1 = z_0 \leq b$, a tak $T(0)$ platí.

Nech teraz $n \in [1, \infty)$ a tvrdenie $T(n-1)$ je pravdivé, teda $\alpha < z_n \leq z_{n-1} \leq b$. Keďže f rastie v $\langle a, b\rangle$, z $\alpha < z_n$ získavame $0 = f(\alpha) < f(z_n)$. Pretože $z_n \in (\alpha, b\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$, máme tiež $f'(z_n) > 0$ a odtiaľ $z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} < z_n$. (Všimnime si, že sme dokázali nielen $z_{n+1} \leq z_n$, ale dokonca $z_{n+1} < z_n$.) Podľa Taylorovej vety pre každé $x \in \langle a, z_n) \subseteq \langle a, b\rangle$ existuje $\xi(x) \in (x, z_n)$, pre ktoré je

$$f(x) = f(z_n) + f'(z_n)(x - z_n) + \frac{1}{2}f''(\xi(x))(x - z_n)^2.$$

Keďže $a < \alpha < z_n$, jeden z prípustných argumentov je $x = \alpha$; pritom z $\xi(\alpha) \in (\alpha, z_n) \subseteq \langle a, b\rangle$ vyplýva $f''(\xi(\alpha)) > 0$. Nerovnosť $\alpha < z_n$ nám dáva $(\alpha - z_n)^2 > 0$. Preto z $f(\alpha) = 0$ vyplýva

$$f(z_n) + f'(z_n)(\alpha - z_n) = -\frac{1}{2}f''(\xi(\alpha))(\alpha - z_n)^2 < 0$$

a následne

$$f'(z_n)(\alpha - z_n) < -f(z_n).$$

Na základe toho, že $f'(z_n) > 0$, z poslednej nerovnosti dostávame $\alpha < z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} = z_{n+1}$; tvrdenie $T(n)$ je tým dokázané.

Keďže postupnosť $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca a jej členy patria do intervalu $(\alpha, b\rangle$, limita Z existuje a platí pre ňu $a < \alpha \leq Z \leq z_2 < z_1 = z \leq b$. Funkcie f a f' sú spojité v intervale $\langle a, b\rangle$ a následne spojité sprava v bode $Z \in (a, b)$, preto $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(Z)$ a tiež $\lim_{n\to\infty} f'(z_n) = f'(Z) > 0$. V súlade s tým

$$Z = \lim_{n\to\infty} z_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}\right) = Z - \frac{f(Z)}{f'(Z)},$$

z čoho vyplýva $f(Z) = 0$ a $Z = \alpha$. ■

5.4 Aitkenov Δ^2-proces

Okrem použitia Newtonovej metódy existuje aj iná možnosť ako sa vysporiadať s pomalou konvergenciou postupnosti vytvorenej metódou poltenia intervalu (prípadne metódou regula falsi), ktorej limita je nulovým bodom príslušnej funkcie f.

Veta 5.9 *Ak $X \in \mathbb{R}$, postupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in (\mathbb{R} - \{X\})^{[1,\infty)}$ a $\left\{\frac{x_{n+1}-X}{x_n-X}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sú konvergentné, pričom platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = X$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-X}{x_n-X} \neq 1$, tak existuje také $n_1 \in [1,\infty)$, že pre každé $n \in [n_1,\infty)$ je $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$ a postupnosť $\left\{\frac{y_n-X}{x_n-X}\right\}_{n=n_1}^{\infty}$, v ktorej $y_n := x_n - \frac{(x_{n+1}-x_n)^2}{x_{n+2}-2x_{n+1}+x_n}$, je nulová.*

Dôkaz. Ak položíme $q := \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-X}{x_n-X}$, $\varepsilon_n := x_n - X$ a $z_n := \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} - q$ pre $n \in [1,\infty)$, tak $\varepsilon_{n+1} = (q + z_n)\varepsilon_n$ a $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$. Na základe toho

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+2} &= (q + z_{n+1})\varepsilon_{n+1} = (q + z_{n+1})(q + z_n)\varepsilon_n \\ &= [q^2 + q(z_n + z_{n+1}) + z_n z_{n+1}]\varepsilon_n\end{aligned}$$

a ďalej

$$\begin{aligned}x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n &= \varepsilon_{n+2} + X - 2(\varepsilon_{n+1} + X) + \varepsilon_n + X \\ &= \varepsilon_{n+2} - 2\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_n \\ &= [q^2 + q(z_n + z_{n+1}) + z_n z_{n+1} - 2(q + z_n) + 1]\varepsilon_n \\ &= [(q-1)^2 + w_n]\varepsilon_n, \end{aligned} \tag{5.13}$$

kde

$$w_n := q(z_n + z_{n+1}) + z_n z_{n+1} - 2z_n.$$

Keďže evidentne $\lim_{n\to\infty} w_n = 0$ a $(q-1)^2 > 0$, existuje také $n_1 \in [1,\infty)$, že pre každé $n \in [n_1,\infty)$ je $-w_n \leq |w_n| < (q-1)^2$, $(q-1)^2 + w_n > 0$ a následne (využijúc (5.13) a fakt, že $\varepsilon_n \neq 0$) $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n \neq 0$. Platí tiež

$$x_{n+1} - x_n = \varepsilon_{n+1} + X - (\varepsilon_n + X) = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = (q + z_n - 1)\varepsilon_n,$$

v dôsledku toho

$$y_n - X = x_n - X - \frac{(q + z_n - 1)^2\varepsilon_n^2}{[(q-1)^2 + w_n]\varepsilon_n} = \varepsilon_n\left[1 - \frac{(q + z_n - 1)^2}{(q-1)^2 + w_n}\right],$$

a teda aj

$$\frac{y_n - X}{x_n - X} = \frac{y_n - X}{\varepsilon_n} = 1 - \frac{(q + z_n - 1)^2}{(q-1)^2 + w_n}. \tag{5.14}$$

Z (5.14) vzhľadom na to, že

$$\lim_{n\to\infty}(q + z_n - 1)^2 = \lim_{n\to\infty}[(q-1)^2 + w_n] = (q-1)^2 \neq 0$$

dostávame

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n - X}{x_n - X} = 1 - \frac{1}{1} = 0. \ \blacksquare$$

Z vety 5.9 vyplýva limitný vzťah

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in[n_1,\infty)}}(y_n - X) = \lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in[n_1,\infty)}}\frac{y_n - X}{x_n - X}\cdot\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\in[n_1,\infty)}}(x_n - X) = 0\cdot 0 = 0.$$

Postupnosť $\{y_n\}_{n=n_1}^{\infty}$ teda konverguje k X takisto ako postupnosť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ale jej konvergencia je rýchlejšia, lebo pre každé $\varepsilon \in (0,\infty)$ existuje $n_\varepsilon \in [n_1,\infty)$ také, že pre všetky $n \in [n_\varepsilon,\infty)$ je $|y_n - X| < \varepsilon|x_n - X|$. (Ak ε je dostatočne malé, y_n je podstatne bližšie k X než x_n.)

Urýchľovanie konvergencie postupnosti prostredníctvom vety 5.9 nesie ná-zov *Aitkenov* Δ^2*-proces*. Aby sme tento názov ozrejmili, zavedieme pojem *diferencie* ako zobrazenia, ktoré postupnosti $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$ priraďuje postupnosť $\Delta x = \{\Delta x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$ tak, že $\Delta x_n := x_{n+1} - x_n$. Diferencia *$l$-tého rádu* Δ^l, $l \in [0,\infty)$, je definovaná rekurentne: pre každú postupnosť $x \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$ nech $\Delta^0 x := x$ (Δ^0 je operátor identity), $\Delta^1 x := \Delta x$, a ak $\Delta^l x = \{\Delta^l x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$ poznáme, tak $\Delta^{l+1}x := \Delta\Delta^l x = \{\Delta^{l+1}x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{[1,\infty)}$, čo znamená, že $\Delta^{l+1}x_n = \Delta^l x_{n+1} - \Delta^l x_n$. V súlade s uvedeným je

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_n &= \Delta^1 x_{n+1} - \Delta^1 x_n = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n\\ &= (x_{n+2} - x_{n+1}) - (x_{n+1} - x_n) = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.\end{aligned}$$

Preto je možné číslo y_n vystupujúce v Aitkenovom Δ^2-procese definovať aj predpisom

$$y_n := x_n - \frac{(\Delta^1 x_n)^2}{\Delta^2 x_n}.$$

5.5 Metóda postupných aproximácií

Ak f je reálna funkcia, riešenie rovnice $f(x) = x$ je hľadaním *pevného bodu* zobrazenia f, teda bodu, ktorý sa prostredníctvom f zobrazí sám do seba. Hľadanie pevného bodu zobrazenia je možné zasadiť do širšieho rámca metrických priestorov.

Nech (X,d) je metrický priestor, $f \in X^X$ a $\tilde{v} \in X$. Na hľadanie pev-ného bodu zobrazenia f sa používa *metóda postupných aproximácií s parametrami* $f,\tilde{v}$ (označenie MPA$(f,\tilde{v})$). Je to rekurentný postup, ktorým sa definuje postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in X^{[1,\infty)}$ podľa nasledovných pravidiel:

1. $v_1 := \tilde{v}$.

2. Ak $n \in [1,\infty)$ a v_n už je definované, tak $v_{n+1} := f(v_n)$.

Veta 5.10 *Ak (X, d) je úplný metrický priestor, $\tilde{v} \in X$, $l \in [2, \infty)$, $\kappa \in \langle 0, 1)$ a $f \in X^X$ je κ-kontraktívne zobrazenie, tak postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorú vytvorila* MPA$(f, \tilde{v})$*, je konvergentná, $V := \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ je jediný pevný bod zobrazenia f a $d(v_l, V) \leq \min\left(\frac{\kappa^{l-1}}{1-\kappa} d(v_1, v_2), \frac{\kappa}{1-\kappa} d(v_{l-1}, v_l)\right)$.*

Dôkaz. Zobrazenie f má nanajvýš jeden pevný bod. Keby totiž existovali $v', v'' \in X$, $v' \neq v''$, pre ktoré je $f(v') = v'$ a $f(v'') = v''$, tak $d(v', v'') > 0$, κ-kontraktívnosť zobrazenia f nám dáva

$$d(v', v'') = d(f(v'), f(v'')) \leq \kappa d(v', v'')$$

a následne $1 \leq \kappa$ v spore s $\kappa \in \langle 0, 1)$.

Vyriešme najprv triviálny prípad $\kappa = 0$. Keďže zobrazenie f je 0-kontraktívne, z axiómy (D_1) vyplýva, že $f(X) = \{\hat{v}\}$ pre nejaké $\hat{v} \in X$. Je teda $v_n = \hat{v}$ pre každé $n \in [2, \infty)$, $\hat{v}$ je jediný pevný bod zobrazenia f, $V = \lim_{n\to\infty} v_n = \hat{v}$, $d(v_l, V) = d(V, V) = 0$, a preto odhad $d(v_l, V) \leq 0$ je správny.

V ďalšom budeme predpokladať $\kappa \in (0, 1)$. Matematickou indukciou vzhľadom na k ukážeme, že

$$\forall i \in [1, \infty)\ d(v_i, v_{i+1}) \leq \kappa^{i-1} d(v_1, v_2). \tag{5.15}$$

Pre $i = 1$ máme $d(v_1, v_2) = \kappa^0 d(v_1, v_2)$. Ak $i \in [1, \infty)$ a $d(v_i, v_{i+1}) \leq \kappa^{i-1} d(v_1, v_2)$, tak z κ-kontraktívnosti zobrazenia f vyplýva $d(v_{i+1}, v_{i+2}) = d(f(v_i), f(v_{i+1})) \leq \kappa d(v_i, v_{i+1}) \leq \kappa \cdot \kappa^{i-1} d(v_1, v_2) = \kappa^{(i+1)-1} d(v_1, v_2)$.

Teraz overíme, že postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská. Keďže $\kappa \in (0, 1)$, $\{\sum_{i=0}^{p} \kappa^i\}_{p=0}^{\infty}$ je rastúca postupnosť konvergujúca k $\sum_{i=0}^{\infty} \kappa^i = \frac{1}{1-\kappa} > 0$. Preto ak $m \in [1, \infty)$ a $n \in [m, \infty)$, pomocou (5.15) a lemy 1.11 získavame

$$\begin{aligned} d(v_m, v_n) &\leq \sum_{i=m}^{n-1} d(v_i, v_{i+1}) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \kappa^{i-1} d(v_1, v_2) = d(v_1, v_2)\kappa^{m-1} \sum_{i=m}^{n-1} \kappa^{i-1-(m-1)} \\ &\leq d(v_1, v_2)\kappa^{m-1} \sum_{j=0}^{\infty} \kappa^j = \frac{\kappa^{m-1} d(v_1, v_2)}{1-\kappa}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Platí tiež $\lim_{j\to\infty} \kappa^j = 0$, a tak pre každé $\varepsilon \in (0, \infty)$ existuje také $n_1 \in [1, \infty)$, že pre všetky $m, n \in [n_1, \infty)$ je $d(v_m, v_n) < \varepsilon$.

Metrický priestor (X, d) je úplný a postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ je cauchyovská, existujú teda limity $\lim_{n\to\infty} v_n =: V$ a $\lim_{n\to\infty} d(v_n, V) = 0$. Ak $n \in [1, \infty)$, tak

$$0 \leq d(v_{n+1}, f(V)) = d(f(v_n), f(V)) \leq \kappa d(v_n, V);$$

z toho, že

$$\lim_{n\to\infty} \kappa d(v_n, V) = \kappa \lim_{n\to\infty} d(v_n, V) = 0,$$

preto vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} d(v_n, f(V)) = \lim_{n\to\infty} d(v_{n+1}, f(V)) = 0,$$

a tak $V = \lim_{n\to\infty} v_n = f(V)$ a V je pevný bod zobrazenia f.

Ak $n \in [l, \infty)$, trojuholníková nerovnosť spolu s (5.16) nám dáva

$$d(v_l, V) \le d(v_l, v_n) + d(v_n, V) \le \frac{\kappa^{l-1} d(v_1, v_2)}{1-\kappa} + d(v_n, V),$$

preto

$$d(v_l, V) \le \frac{\kappa^{l-1} d(v_1, v_2)}{1-\kappa} + \lim_{n\to\infty} d(v_n, V) = \frac{\kappa^{l-1} d(v_1, v_2)}{1-\kappa}. \tag{5.17}$$

Nech $\tilde{w} := v_{l-1}$ a nech $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť vytvorená MPA$(f, \tilde{w})$. Matematickou indukciou vzhľadom na n dokážeme, že pre každé $n \in [1, \infty)$ je $w_n = v_{n+l-2}$. Pre $n = 1$ máme $w_1 = \tilde{w} = v_{1+l-2}$. Ak $n \in [1, \infty)$ a $w_n = v_{n+l-2}$, tak z definície MPA$(f, \tilde{v})$ a MPA$(f, \tilde{w})$ dostávame $w_{n+1} = f(w_n) = f(v_{n+l-2}) = v_{n+1+l-2}$ tak, ako sme potrebovali. V dôsledku toho $\lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+l-2} = V$. Analógia odhadu (5.17) pre postupnosť $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ nám potom poskytuje

$$d(v_l, V) = d(w_2, V) \le \frac{\kappa^{2-1}}{1-\kappa} d(w_1, w_2) = \frac{\kappa}{1-\kappa} d(v_{l-1}, v_l),$$

a tak vzhľadom na (5.17) dostávame

$$d(v_l, V) \le \min\left(\frac{\kappa^{l-1}}{1-\kappa} d(v_1, v_2), \frac{\kappa}{1-\kappa} d(v_{l-1}, v_l)\right). \ \blacksquare$$

Dôsledok 5.11 *Ak $\tilde{v} \in \mathbb{R}$, $l \in [2, \infty)$, $\kappa \in \langle 0, 1)$ a reálna funkcia f je diferencovateľná, pričom pre každé $x \in \mathrm{dom}(f)$ je $|f'(x)| \le \kappa$, tak postupnosť $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$, ktorú vytvorila MPA$(f, \tilde{v})$, je konvergentná, $V := \lim_{n\to\infty} v_n$ je jediný pevný bod funkcie f a $|v_l - V| \le \min\left(\frac{\kappa^{l-1}}{1-\kappa}|v_1 - v_2|, \frac{\kappa}{1-\kappa}|v_{l-1} - v_l|\right)$.*

Dôkaz. Je dobre známe, že $(\mathbb{R}, d)$, kde $d \in \langle 0, \infty)^{(\mathbb{R}^2)}$ je euklidovská metrika, t. j. $d(x, y) = |x - y|$, je úplný metrický priestor. Podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote pre každé $x \in \mathbb{R}$ a $y \in (x, \infty)$ existuje také $z(x, y) \in (x, y)$, že $f'(z(x, y)) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Je teda tiež

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |f'(z(x, y))||x - y| \le \kappa|x - y| = \kappa d(x, y),$$

funkcia f je κ-kontraktibilná a požadované tvrdenia vyplývajú z vety 5.10. $\blacksquare$

5.6 Riešenie polynomických rovníc

Veľmi významnou triedou reálnych funkcií sú polynómy. Dôležitou úlohou numerickej matematiky je preto približné riešenie *polynomických* rovníc, teda aproximovanie koreňov polynómov z $\mathbb{R}[x]$.

Ak $p \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a $p(a)p(b) < 0$, metóda poltenia intervalu i metóda regula falsi umožňujú aproximovať (nejaký) koreň polynómu p patriaci do intervalu $\langle a, b\rangle$ s ľubovoľnou presnosťou. Ak vieme, že polynóm p má v $\langle a, b\rangle$ jediný koreň, tak *každý* koreň polynómu p v $\langle a, b\rangle$ dokážeme aproximovať s ľubovoľnou presnosťou. Vidno teda, že je vhodné vedieť určiť počet $S_c^d(p)$ koreňov polynómu p v reálnom intervale $\langle c, d\rangle$. Na to slúži Sturmova veta.

5.6.1 Sturmova veta

Zaveďme najprv zopár označení a dokážme pomocné tvrdenia, ktoré sa na ne viažu. Nech $l \in \mathbb{Z}$, $m \in [l, \infty)$ a $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k) \in \mathbb{R}^{m+1-l}$. *Počet znamienkových zmien v postupnosti* $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k)$ je číslo

$$Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k) := |\{n \in [l, m-1] : r_n r_{n+1} < 0\}|.$$

Ďalej, nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$ a nech $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k)$ je postupnosť reálnych funkcií; položme

$$Z_a^b\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k) := Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k(a)) - Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k(b)).$$

Lema 5.12 *Ak $l \in \mathbb{Z}$, $m \in [l, \infty)$, $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k) \in \mathbb{R}^{m+1-l}$, $q \in [1, \infty)$ a $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{q}(i_j) \in \mathbb{Z}^q$ je neklesajúca postupnosť, v ktorej $i_1 = l$ a $i_q = m$, tak $Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k) = \sum\limits_{j=1}^{q-1} Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(r_k)$.*

Dôkaz. Nech $n \in [l, m-1]$ a nech $r_n r_{n+1} < 0$ (teda n sa započítava pri výpočte čísla $Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k)$). Pre všetky $j \in [1, q-2]$ a $s \in [j+1, q-1]$ je $i_s \geq i_{j+1} > i_{j+1}-1$, a tak $[i_j, i_{j+1} - 1] \cap [i_s, i_{s+1} - 1] = \emptyset$. Preto $n \in [l, m-1]$ sa započítava pri výpočte najviac ak jedného z čísel $Z\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(r_k)$, kde $j \in [1, q-1]$.

Keďže $i_1 = l \leq n$, množina $I := \{j \in [1, q] : i_j \leq n\}$ je neprázdna, číslo $p := \max I$ je korektne definované a platí preň $i_p \leq n$. Z nerovnosti $n \leq m-1$

máme $i_q = m \geq n+1 > n$, $q \notin I$ a $p \in [1, q-1]$. Z definície množiny I vyplýva $i_{p+1} > n$, $i_{p+1} \geq n+1$, $n \leq i_{p+1} - 1$ a následne $n \in [i_p, i_{p+1} - 1]$. To znamená, že n sa započítava pri výpočte čísla $Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_p}^{i_{p+1}}(r_k)$, a nsledne práve raz pri výpočte sumy z tvrdenia lemy (lebo $p \in [1, q-1]$).

Nech teraz $j \in [1, q-1]$ a n sa započítava pri výpočte čísla $Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(r_k)$, teda $n \in [i_j, i_{j+1} - 1]$ a $r_n r_{n+1} < 0$. Potom $j+1 \leq q$, $i_{j+1} \leq i_q$ a $m = i_1 \leq i_j \leq n \leq i_{j+1} - 1 \leq i_q - 1 = l - 1$, teda $n \in [m, l-1]$ a n sa započítava pri výpočte čísla $Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(r_k)$. ■

Dôsledok 5.13 *Ak $l \in \mathbb{Z}$, $m \in [l, \infty)$, $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{m+1-l}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $q \in [1, \infty)$ a $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=1}^{q}(i_j) \in \mathbb{Z}^q$ je neklesajúca postupnosť, v ktorej $i_1 = l$ a $i_q = m$, tak $Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k) = \sum\limits_{j=1}^{q-1} Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(f_k)$.*

Dôkaz. Z lemy 5.12 a z definícií dostávame

$$
\begin{aligned}
Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k) &= Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k(a)) - Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k(b)) = \sum_{j=1}^{q-1} Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(f_k(a)) - \sum_{j=1}^{q-1} Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(f_k(b)) \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} \left[Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(f_k(a)) - Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(f_k(b)) \right] = \sum_{j=1}^{q-1} Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=i_j}^{i_{j+1}}(f_k). \quad ■
\end{aligned}
$$

Lema 5.14 *Ak $l \in \mathbb{Z}$, $m \in [l, \infty)$, $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{m+1-l}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a pre každé $k \in [l, m]$ je $f_k(a) f_k(b) > 0$, tak $Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k) = 0$.*

Dôkaz. Ak $n \in [l, m-1]$, tak

$$[f_n(a) f_{n+1}(a)][f_n(b) f_{n+1}(b)] = [f_n(a) f_n(b)][f_{n+1}(a) f_{n+1}(b)] > 0,$$

a preto

$$f_n(a) f_{n+1}(a) < 0 \Leftrightarrow f_n(b) f_{n+1}(b) < 0.$$

V dôsledku toho platí

$$
\begin{gathered}
|\{n \in [l, m-1] : f_n(a) f_{n+1}(a) < 0\}| = |\{n \in [l, m-1] : f_n(b) f_{n+1}(b) < 0\}|, \\
Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k(a)) = Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=l}^{m}(f_k(b))
\end{gathered}
$$

a následne

$$Z_a^b \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k) = Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k(a)) - Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k(b)) = 0. \ \blacksquare$$

Pripomeňme si, že funkcia $\operatorname{sgn}(x)$ (*signum*) je definovná predpisom

$$\operatorname{sgn}(x) := \left\{ \begin{array}{rl} -1 & x \in (-\infty, 0) \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x \in (0, \infty) \end{array} \right\}.$$

Lema 5.15 *Ak $l \in \mathbb{Z}$, $m \in [l, \infty)$, $\overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{m+1-l}$, $a, b \in \mathbb{R}$ a $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R} - \{0\}$, tak*

$$Z_a^b \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k) = Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{a} f_k(a)) - Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{b} f_k(b)) = Z_a^b \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\operatorname{sgn}(f_k)).$$

Dôkaz. Ak $x \in \mathbb{R}$ a $\tilde{x} \in \mathbb{R} - \{0\}$, tak $\tilde{x}^2 > 0$ a z definície funkcie signum vyplýva $x\operatorname{sgn}(x) \geq 0$ a $\operatorname{sgn}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Preto pre $n \in [l, m-1]$ máme

$$\begin{aligned} &[f_n(x) f_{n+1}(x)][\operatorname{sgn}(f_n(x))\operatorname{sgn}(f_{n+1}(x))] \\ =&[f_n(x)\operatorname{sgn}(f_n(x))][f_{n+1}(x)\operatorname{sgn}(f_{n+1}(x))] \geq 0, \end{aligned}$$

a následne

$$\begin{aligned} f_n(x) f_{n+1}(x) < 0 &\Leftrightarrow [\tilde{x} f_n(x)][\tilde{x} f_{n+1}(x)] < 0, \\ f_n(x) f_{n+1}(x) < 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sgn}(f_n(x))\operatorname{sgn}(f_{n+1}(x)) < 0. \end{aligned}$$

V súlade s tým

$$Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k(x)) = Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{x}(f_k(x))) = Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\operatorname{sgn}(f_k(x)))$$

a (s ohľadom na to, že $a, b \in \mathbb{R}$ a $\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R} - \{0\}$)

$$\begin{aligned} Z_a^b \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k) &= Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k(a)) - Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k(b)) = Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{a} f_k(a)) - Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{b} f_k(b)) \\ &= Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\operatorname{sgn}(f_k(a))) - Z \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\operatorname{sgn}(f_k(b))) = Z_a^b \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(\operatorname{sgn}(f_k)). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 5.16 *Ak $l \in \mathbb{Z}$, $m \in [l, \infty)$, $\overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^{m+1-l}$, $s \in [1, \infty)$ a $\overset{s}{\underset{j=1}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j) \in \mathbb{R}^s$, tak $Z_{a_1}^{a_s} \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k) = \sum_{j=1}^{s-1} Z_{a_j}^{a_{j+1}} \overset{m}{\underset{k=l}{\mathbf{\Gamma}}}(f_k)$.*

Dôkaz. Priamo z definícií vyplýva

$$
\begin{aligned}
&Z_{a_1}^{a_s} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k) = Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_1)) - Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_s)) \\
=& Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_1)) + \sum_{j=2}^{s-1} Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_j)) - \sum_{j=1}^{s-2} Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_{j+1})) - Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_s)) \\
=& \sum_{j=1}^{s-1} Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_j)) - \sum_{j=1}^{s-1} Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_{j+1})) \\
=& \sum_{j=1}^{s-1} \left[Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_j)) - Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k(a_{j+1})) \right] = \sum_{j=1}^{s-1} Z_{a_j}^{a_{j+1}} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{k=l}^{m} (f_k). \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Nech $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$ a $n \in [1, \infty)$. Postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n} (p_i) \in (\mathbb{R}[x])^{n+1}$ je *sturmovská* v intervale $\langle a, b \rangle$, ak sú splnené podmienky

(S_1) $\forall x \in \langle a, b \rangle$ $(p_0(x) = 0 \Rightarrow p_0'(x) p_1(x) > 0)$;
(S_2) $\forall x \in \langle a, b \rangle$ $\forall i \in [1, n-1]$ $(p_i(x) = 0 \Rightarrow p_{i-1}(x) p_{i+1}(x) < 0)$;
(S_3) $\forall x \in \langle a, b \rangle$ $p_n(x) \neq 0$.

Veta 5.17 *Ak $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $n \in [1, \infty)$, postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n} (p_i) \in (\mathbb{R}[x])^{n+1}$ je sturmovská v $\langle a, b \rangle$ a $\prod_{i=0}^{n} [p_i(a) p_i(b)] \neq 0$, tak $S_a^b(p_0) = Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n} (p_i)$.*

Dôkaz. Nech

$$Y := \{y \in (a, b) : p_0'(y) = 0 \vee (\exists i \in [0, n-1]\ p_i(y) = 0)\},$$

$r := |Y|$ a nech $Y = \{y_j : j \in [1, r]\}$, pričom $y_j < y_{j+1}$ pre každé $j \in [1, r-1]$. Keďže $Y \subseteq (a, b)$, existuje $\varepsilon \in (0, \infty)$ také, že otvorené ε-okolia bodov množiny Y sú po dvojiciach disjunktné podmnožiny intervalu (a, b). To znamená, že postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{2r+2} (c_j) := (a) \left[\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=1}^{r} (y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon) \right] (b)$ je rastúca a platí

$$\forall j \in [1, r]\ (c_{2j} = y_j - \varepsilon \wedge c_{2j+1} = y_j + \varepsilon).$$

Žiadny z polynómov p_i, $i \in [0, n]$, potom nemá koreň v žiadnom z intervalov $\langle c_{2j+1}, c_{2j+2} \rangle$, $j \in [0, r]$, a tak v súlade s dôsledkom 5.2

$$\forall i \in [0, n]\ \forall j \in [0, r]\ p_i(c_{2j+1}) p_i(c_{2j+2}) > 0.$$

Preto z lemy 5.14 máme

$$\forall j \in [0, r] \; Z_{c_{2j+1}}^{c_{2j+2}} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = 0$$

a z lemy 5.16 zasa

$$\begin{aligned} Z_a^b \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) &= Z_{c_1}^{c_{2r+2}} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = \sum_{l=1}^{2r+1} Z_{c_l}^{c_{l+1}} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) \\ &= \sum_{j=1}^{r} Z_{c_{2j}}^{c_{2j+1}} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = \sum_{j=1}^{r} Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Fixujme teraz $j \in [1, r]$ a vypočítajme číslo $Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i)$. Ak polynóm p_i, $i \in [0, n]$, má koreň v intervale $\langle y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon\rangle$, ide o koreň y_j. Na základe dôsledku 5.2 preto

$$\forall i \in [0, n] \; \forall x, y \in \langle y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon\rangle \; (p_i(y_j) \neq 0 \Rightarrow p_i(x)p_i(y) > 0). \tag{5.19}$$

Nech $I_j := \{i \in [0, n] : p_i(y_j) = 0\}$, $i_j := |I_j|$ a nech $I_j = \{i_{j,k} : k \in [1, i_j]\}$, pričom $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{k=1}^{i_j}(i_{j,k})$ je rastúca postupnosť. Všimnime si, že z podmienky (S_2) vyplýva

$$\forall k \in [1, i_j - 1] \; i_{j,k} + 1 \leq i_{j,k+1} - 1 \tag{5.20}$$

a z podmienky (S_3) zasa

$$i_{j,i_j} \leq n - 1. \tag{5.21}$$

Z (5.19) na základe lemy 5.14 dostávame

$$\forall l \in [0, n] \; \forall m \in [l, n] \; \left([l, m] \cap I_j = \emptyset \Rightarrow Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=l}^{m}(p_i) = 0\right). \tag{5.22}$$

Zo vzťahu (5.22) je zrejmé (pre $l = 0$ a $m = n$), že

$$I_j = \emptyset \Rightarrow \left(Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = 0 = S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0)\right); \tag{5.23}$$

v ďalšom preto budeme predpokladať $I_j \neq \emptyset$.

Nech $k \in [1, i_j]$, pričom $i_{j,k} \geq 1$. Z podmienky (S_3) potom máme $[i_{j,k} - 1, i_{j,k} + 1] \subseteq [0, n]$. Keďže $p_{i_{j,k}}(y_j) = 0$, na základe podmienky (S_2) platí $\operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}-1}(y_j)) = z \in \{-1, 1\}$, $\operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}+1}(y_j)) = -z$, a tak (5.19) vedie k tomu, že

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}-1}(y_j - \varepsilon)) &= z = \operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}-1}(y_j + \varepsilon)), \\ \operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}+1}(y_j - \varepsilon)) &= -z = \operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}+1}(y_j + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Okrem toho máme $\operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}}(y_j-\varepsilon)) = z_1 \in \{-1,1\}$ a tiež $\operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}}(y_j+\varepsilon)) = z_2 \in \{-1,1\}$, takže lema 5.15 nám dáva

$$\begin{aligned} Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_{i_{j,k}-1}, p_{i_{j,k}}, p_{i_{j,k}+1}) &= Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(\operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}-1}), \operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}}), \operatorname{sgn}(p_{i_{j,k}+1})) \\ &= Z(z, z_1, -z) - Z(z, z_2, -z). \end{aligned} \tag{5.24}$$

Ak $l \in [1,2]$, tak $z_l \in \{-1,1\}$, $(zz_l)[z_l(-z)] = -(zz_l)^2 = -1 < 0$, preto $\{Z(z,z_l), Z(-z_l,z)\} = \{-1,1\}$ a z lemy 5.12 máme $Z(z,z_l,-z) = Z(z,z_l) + Z(z_l,-z) = 1$. Vzhľadom na (5.24) teda $Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_{i_{j,k}-1}, p_{i_{j,k}}, p_{i_{j,k}+1}) = 1 - 1 = 0$, a to znamená, že

$$\forall k \in [1, i_j]\ (i_{j,k} \geq 1 \Rightarrow Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_{i_{j,k}-1}, p_{i_{j,k}}, p_{i_{j,k}+1}) = 0). \tag{5.25}$$

Uvážme postupnosť $(0)\left[\overset{i_j+1}{\underset{k=2}{\mathbf{\Gamma}}}(p_{i_{j,k-1}+1})\right](n)$; tá je, podľa (5.20) a (5.21), neklesajúca. Z lemy 5.12 potom vyplýva

$$Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) = Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{i_{j,1}+1}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) + \sum_{k=2}^{i_j} Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{i_{j,k}+1}{\underset{i=i_{j,k-1}+1}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) + Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{n}{\underset{i=i_{j,i_j}+1}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i). \tag{5.26}$$

Ak $k \in [2, i_j]$, podľa (5.20) postupnosť $(i_{j,k-1}+1, i_{j,k}-1, i_{j,k}+1)$ je tiež neklesajúca; z toho, že

$$[i_{j,k-1}+1, i_{j,k}-1] \cap I_j = \emptyset = [i_{j,i_j}+1, n] \cap I_j,$$

na základe (5.22) a (5.25) dostávame

$$\begin{aligned} Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{i_{j,k}+1}{\underset{i=i_{j,k-1}+1}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) &= Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{i_{j,k}-1}{\underset{i=i_{j,k-1}+1}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) + Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_{i_{j,k}-1}, p_{i_{j,k}}, p_{i_{j,k}+1}) \\ &= 0 + 0 = 0 = Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{n}{\underset{i=i_{j,i_j}+1}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i), \end{aligned}$$

a tak v súlade s (5.26) máme

$$Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) = Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}\overset{i_{j,1}+1}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i). \tag{5.27}$$

Predpokladajme najprv, že $i_{j,1} = 0$; vtedy $p_0(y_j) = 0$ a podmienka (S_1) nám dáva

$$z := \operatorname{sgn}(p_0'(y_j)) = \operatorname{sgn}(p_1(y_j)) \in \{-1,1\}, \tag{5.28}$$

a tak na základe (5.19) vidíme, že

$$\operatorname{sgn}(p_1(y_j-\varepsilon)) = \operatorname{sgn}(p_1(y_j+\varepsilon)) = z. \tag{5.29}$$

Ak (prvá) derivácia polynómu p_0 má koreň v intervale $\langle y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon\rangle$, ide o koreň y_j. Preto z $p_0'(y_j) \neq 0$ s ohľadom na dôsledok 5.2 vyplýva

$$\forall x, y \in \langle y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon\rangle \; p_0'(x)p_0'(y) > 0, \tag{5.30}$$

funkcia p_0 je v intervale $\langle y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon\rangle$ rýdzo monotónna (klesajúca alebo rastúca). Z $y_j - \varepsilon < y_j < y_j + \varepsilon$ preto dostávame

$$\min(p_0(y_j - \varepsilon), p_0(y_j + \varepsilon)) < 0 = p_0(y_j) < \max(p_0(y_j - \varepsilon), p_0(y_j + \varepsilon))$$

a ďalej

$$z_0 := \mathrm{sgn}(p_0(y_j - \varepsilon)) \in \{-1, 1\}, \tag{5.31}$$

$$\mathrm{sgn}(p_0(y_j + \varepsilon)) = -z_0. \tag{5.32}$$

Vzájomný vzťah medzi z a z_0 získame nasledovnou úvahou: Z Lagrangeovej vety o strednej hodnote vieme, že existuje $\xi \in (y_j - \varepsilon, y_j + \varepsilon)$, pre ktoré

$$p_0'(\xi) = \frac{p_0(y_j + \varepsilon) - p_0(y_j - \varepsilon)}{y_j + \varepsilon - (y_j - \varepsilon)} = \frac{p_0(y_j + \varepsilon) - p_0(y_j - \varepsilon)}{2\varepsilon}. \tag{5.33}$$

Vzhľadom na to, že $2\varepsilon > 0$, z (5.31)–(5.33) vidíme, že

$$\mathrm{sgn}(p_0'(\xi)) = \mathrm{sgn}(p_0(y_j + \varepsilon) - p_0(y_j - \varepsilon)) = -z_0. \tag{5.34}$$

Na základe (5.28), (5.30) a (5.34) dostávame

$$-z_0 = \mathrm{sgn}(p_0'(\xi)) = \mathrm{sgn}(p_0'(y_j) = z. \tag{5.35}$$

Podľa lemy 5.15 z (5.35) vyplýva, že

$$\begin{aligned} Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0, p_1) &= Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(\mathrm{sgn}(p_0), \mathrm{sgn}(p_1)) = Z(z_0, z) - Z(-z_0, z) \\ &= z(Z_0, -Z_0) - z(-Z_0, -Z_0) = 1 - 0 = 1, \end{aligned}$$

a tak s uvážením (5.26)

$$i_{j,1} = 0 \Rightarrow (Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0, p_1) = 1 = S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0)). \tag{5.36}$$

Za predpokladu $i_{j,1} \geq 1$ v súlade s (5.25) máme $Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=i_{j,1}-1}^{i_{j,1}+1}(p_i) = 0$. Keďže je tiež $[0, i_{j,1} - 1] \cap I_j = \emptyset$, podľa (5.23) a (5.27) v súlade s lemou 5.12 platí

$$i_{j,1} \geq 1 \Rightarrow Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{i_{j,1}-1}(p_i) + Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=i_{j,1}-1}^{i_{j,1}+1}(p_i) = 0 = S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0). \tag{5.37}$$

Podľa (5.36) a (5.37) dostávame

$$\forall j \in [1, r]\ Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) = S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0). \tag{5.38}$$

Na ukončenie dôkazu si teraz stačí uvedomiť, že pre každé $j \in [1, r]$ platí $S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0) \in [0, 1]$, pričom $S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0) = 1 \Leftrightarrow p_0(y_j) = 0$. V súlade s (5.18), (5.23), (5.26) a (5.38) totiž máme

$$\begin{aligned} Z_a^b \overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) &= \sum_{j=1}^{r} Z_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon} \overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) = \sum_{j=1}^{r} S_{y_j-\varepsilon}^{y_j+\varepsilon}(p_0) \\ &= |\{j \in [1, r] : p_0(y_j) = 0\}| = S_a^b(p_0). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 5.18 *Nech* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q, r \in \mathbb{R}[x] - \{0(x)\}$, *pričom* $\mathrm{nst}(q) \geq \mathrm{nst}(r)$, *a nech* $\overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) \in (\mathbb{R}[x])^{n+1}$ *je dlhšia z dvoch postupností, ktoré vytvoril* $\mathrm{MEA}(q, r)$. *Ak* $\prod_{i=0}^{n}[p_i(a)p_i(b)] \neq 0$ *a pre každé* $x \in \langle a, b\rangle$ *platí* $q(x) = 0 \Rightarrow q'(x)r(x) > 0$, *tak* $S_a^b(q) = Z_a^b \overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i)$.

Dôkaz. Keďže $p_0 = q$, stačí dokázať, že postupnosť $\overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i)$ je sturmovská v intervale $\langle a, b\rangle$; podľa vety 5.17 totiž potom $Z_a^b \overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) = S_a^b(p_0) = S_a^b(q)$.

Podmienka (S_1) je splnená, lebo $p_0 = q$ a $p_1 = r$.

Čo sa týka podmienky (S_2), matematickou indukciou vzhľadom na i dokážeme, že pre každé $i \in [1, n-1]$ platí tvrdenie

$$S_2(i): \ \forall x \in \langle a, b\rangle\ (p_i(x) = 0 \Rightarrow p_{i-1}(x)p_{i+1}(x) < 0).$$

Nech $n \geq 2$ (ináč nemáme čo dokazovať) a nech $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathbf{\Gamma}}}(u_i) \in (\mathbb{R}[x])^n$ je kratšia z postupností, ktoré vytvoril $\mathrm{MEA}(q, r)$. Pretože $p_0 = p_1u_1 - p_2$, rovnosť $r(x) = p_1(x) = 0$ podľa jedného z predpokladov lemy implikuje $p_0(x) = q(x) \neq 0$, ako aj $p_0(x) = -p_2(x)$, a následne $p_0(x)p_2(x) = -(p_0(x))^2 < 0$; výrok $S_2(1)$ je teda pravdivý.

Nech teraz $i \in [1, n-2]$ a nech $S_2(i)$ je pravdivé tvrdenie. Ak $p_{i+1}(x) = 0$, tak z $S_2(i)$ vidíme, že $p_i(x) \neq 0$; okrem toho z $p_i = p_{i+1}u_{i+1} - p_{i+2}$ máme $p_i(x)p_{i+2}(x) = -(p_i(x))^2 < 0$ a tvrdenie $S_2(i+1)$ tiež platí.

Splnenie podmienky (S_3) dokážeme sporom. Ak by totiž bolo $p_n(x) = 0$ pre nejaké $x \in \langle a, b\rangle$, tak z $\mathrm{nsd}(q, r) = \lambda p_n$ (pre isté $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$) dostaneme $q(x) = 0 = r(x)$ v spore s jedným z predpokladov lemy. $\blacksquare$

Veta 5.19 (Sturmova) *Nech* $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, \infty)$, $q \in \mathbb{R}[x]$, $\operatorname{nst}(q) \geq 1$ *a nech* $\overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i) \in (\mathbb{R}[x])^{n+1}$ *je dlhšia z dvoch postupností, ktoré vytvoril* $\operatorname{MEA}(q, q')$. *Ak* $\prod_{i=0}^{n}[p_i(a)p_i(b)] \neq 0$, *tak* $S_a^b(q) = Z_a^b \overset{n}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(p_i)$.

Dôkaz. Na úvod poznamenajme, že $\operatorname{MEA}(q, q')$ je korektne definovaný, lebo $\operatorname{nst}(q) \geq \operatorname{nst}(q') = \operatorname{nst}(q) - 1$ a $q' \neq 0(x)$.

Vetu dokážeme najprv za predpokladu, že $S_a^b(q) \leq 1$. Ak $S_a^b(q) = 0$ alebo $S_a^b(q) = 1$ a jediný koreň polynómu q v $\langle a, b\rangle$ je jednoduchý, tak na základe lemy 1.6 pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ je $q(x) = 0 \Rightarrow q'(x)q'(x) > 0$ a tvrdenie vety vyplýva z lemy 5.18.

Nech teraz $S_a^b(q) = 1$ a $\alpha \in \langle a, b\rangle$ je m-násobný koreň polynómu q, kde $m \in [2, \infty)$; keďže $p_0 = q$, je samozrejme $\alpha \in (a, b)$. Existuje teda polynóm $s \in \mathbb{R}[x] - \{0(x)\}$, pre ktorý $q = (x - \alpha)^m s$ a $s(\alpha) \neq 0$. V dôsledku toho je $\operatorname{nst}(q) \geq m$, $\operatorname{nst}(q') \geq m - 1 \geq 1$, a tak

$$q' = (x - \alpha)^{m-1}[ms + (x - \alpha)s'] \neq 0(x).$$

Nech polynómy $\tilde{q}, \tilde{r} \in \mathbb{R}[x]$ sú definované nasledovne:

$$\begin{aligned}\tilde{q} &:= (x - \alpha)s,\\ \tilde{r} &:= ms + (x - \alpha)s'.\end{aligned}$$

Všimnime si, že $\tilde{q} \neq 0(x)$, $\tilde{r} \neq 0(x)$ (lebo $\tilde{r}(\alpha) = ms(\alpha) \neq 0$) a $\operatorname{nst}(\tilde{q}) = \operatorname{nst}(s) + 1 \geq \operatorname{nst}(\tilde{r})$, a tak je korektne definovaný $\operatorname{MEA}(\tilde{q}, \tilde{r})$; nech $\overset{l}{\underset{i=0}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{p}_i)$ a $\overset{l}{\underset{i=1}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{u}_i)$ sú postupnosti polynómov, ktoré vytvoril $\operatorname{MEA}(\tilde{q}, \tilde{r})$.

Položme $k := \min(l, n)$. Matematickou indukciou vzhľadom na i dokážeme, že pre každé $i \in [1, k]$ je pravdivé tvrdenie

$$T(i):\ \forall j \in [0, i]\ p_i j (x - \alpha)^{m-1}\tilde{p}_j.$$

Pretože $p_0 = p$, $p_1 = r$, $\tilde{p}_0 = \tilde{q}$ a $\tilde{p}_1 = \tilde{r}$, tvrdenie $T(1)$ je pravdivé. Nech teda $i \in [1, k - 1]$ a nech platí $T(i)$. Z definície $\operatorname{MEA}(\tilde{q}, \tilde{r})$ máme $\tilde{p}_{i-1} = \tilde{p}_i\tilde{u}_i - \tilde{p}_{i+1}$ a $\operatorname{nst}(\tilde{p}_{i+1}) < \operatorname{nst}(\tilde{p}_i)$, pričom $p_{i+1} \neq 0(x)$. Potom je tiež

$$(x - \alpha)^{m-1}\tilde{p}_{i-1} = (x - \alpha)^{m-1}\tilde{p}_i\tilde{u}_i - (x - \alpha)^{m-1}\tilde{p}_{i+1};$$

ak označíme $v := -(x - \alpha)^{m-1}\tilde{p}_{i+1} \in \mathbb{R}[x]$, tak

$$\operatorname{nst}(v) = m - 1 + \operatorname{nst}(\tilde{p}_{i+1}) < m - 1 + \operatorname{nst}(\tilde{p}_i) = \operatorname{nst}(p_i),$$

a z $T(i)$ dostávame $p_{i-1} = p_i\tilde{u}_i + v$, čo znamená, že v je zvyšok pri delení polynómu p_{i-1} polynómom p_i. Z definície MEA(q,r) vieme, že aj $-p_{i+1}$ je zvyšok pri delení polynómu p_{i-1} polynómom p_i. V dôsledku jednoznačnosti delenia polynómov musí byť $v = -p_{i+1}$, preto $p_{i+1} = (x-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_{i+1}$ a výrok $T(i+1)$ je pravdivý.

Ďalej ukážeme, že $k = n = l$. Ak $k = l \leq n$, tak $\tilde{p}_l|\tilde{p}_{l-1}$, následne $p_l = (x-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_l|(x-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_{l-1} = p_{l-1}$, a preto v súlade s definíciou MEA(q,r) je $n = l$. Ak $k = n \leq l$, tak $(x-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_n = p_n|p_{n-1} = (x-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_{n-1}$, odkiaľ vyplýva $\tilde{p}_n|\tilde{p}_{n-1}$, a na základe definície MEA$(\tilde{q},\tilde{r})$ je $l = n$.

Keďže $\tilde{q} = \tilde{p}_0|p_0 = q$, každý koreň polynómu $\tilde{q}$ je aj koreňom polynómu q. Preto α je jediný koreň polynómu $\tilde{q}$ v $\langle a,b\rangle$. Z nerovnosti $\tilde{q}'(\alpha)\tilde{r}(\alpha) = s(\alpha)ms(\alpha) > 0$ vidíme, že pre každé $x \in \langle a,b\rangle$ platí $\tilde{q}(x) = 0 \Rightarrow \tilde{q}'(x)\tilde{r}(x) > 0$. Z predpokladov vety vyplýva

$$0 \neq \prod_{i=0}^{n}[p_i(a)p_i(b)] = \prod_{i=0}^{n}[(a-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_i(a)(b-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_i(b)],$$

preto je tiež $\prod_{i=0}^{n}[\tilde{p}_i(a)\tilde{p}_i(b)] \neq 0$, a tak z lem 5.15 a 5.18 (vzhľadom na to, že $(a-\alpha)^{m-1} \neq 0$ a $(b-\alpha)^{m-1} \neq 0$) dostávame

$$\begin{aligned} 1 &= S_a^b(q) = S_a^b(\tilde{q}) = Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(\tilde{p}_i) \\ &= Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}((a-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_i(a)) - Z \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}((b-\alpha)^{m-1}\tilde{p}_i(b)) = Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) \end{aligned}$$

tak, ako sme potrebovali.

Nech ďalej $t := S_a^b(q) \geq 2$. Vyberme rastúcu postupnosť $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{j=0}^{t}(a_j)$ tak, aby $a_0 = a$, $a_t = b$, $\prod_{i=0}^{n}\prod_{j=0}^{t} p_i(a_j) \neq 0$, a aby každý z intervalov $\langle a_j, a_{j+1}\rangle$ pre $j \in [0, t-1]$ obsahoval práve jeden z koreňov polynómu q. Podľa prvej časti dôkazu máme

$$\forall j \in [0,t-1]\ 1 = S_{a_j}^{a_{j+1}}(q) = Z_{a_j}^{a_{j+1}} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i),$$

a tak s ohľadom na lemu 5.16 platí

$$S_a^b(q) = t = \sum_{j=0}^{t-1} S_{a_j}^{a_{j+1}}(q) = \sum_{j=0}^{t-1} Z_{a_j}^{a_{j+1}} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = Z_{a_0}^{a_t} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i) = Z_a^b \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=0}^{n}(p_i). \quad \blacksquare$$

5.6.2 Bernoulliho metóda

Množina $Z = \{z_j : j \in [1,k]\}$ koreňov polynómu $a \in \mathbb{C}[x]$ je *dominantná*, ak každý jej prvok je jednoduchým koreňom polynómu a s absolútnou hodnotou rovnou $|z_1|$ a pre každé $z \in \mathbb{C} - Z$ platí $a(z) = 0 \Rightarrow |z| < |z_1|$. Samozrejme, nie každý polynóm $a \in \mathbb{C}[x]$ má dominantnú množinu koreňov. Ak $\{z_1\}$ je dominantná množinu koreňov polynómu a, jej jediný prvok z_1 je *dominantný* koreň polynómu a. Pritom ak $a \in \mathbb{R}[x]$, tak dominantný koreň polynómu a je nutne reálny; to vyplýva z faktu, že ak $a(z) = 0$ pre $z \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$, tak pre číslo $\bar{z}$ komplexne združené so z platí $a(\bar{z}) = 0$, $\bar{z} \neq z$ a $|\bar{z}| = |z|$.

Veta 5.20 *Nech $l \in [2, \infty)$, $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j) \in \mathbb{C}^{l+1}$, $a_l \neq 0$ a nech $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ je partikulárne riešenie* DR $\underset{j=0}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(a_j)$ *určené počiatočným úsekom $(0)^{l-1}(1)$. Ak polynóm $\sum_{j=0}^{l} a_j x^j$ má dominantný koreň z_1, tak existuje také $n_1 \in [0, \infty)$, že $\tilde{y}_n \neq 0$ pre každé $n \in [n_1, \infty)$, postupnosť $\{\frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n}\}_{n=n_1}^{\infty}$ je konvergentná a platí $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \geq n_1}} \frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n} = z_1$.*

Dôkaz. Vetu dokážeme len za dodatočného predpokladu, že všetky korene polynómu $a := \sum_{j=0}^{l} a_j x^j \in \mathbb{C}[x]$ sú jednoduché (vtedy máme k dispozícii lemu 1.13.2).

Nech $\{z_k : k \in [1, l]\}$ je množina všetkých koreňov polynómu a. Z toho, že z_1 je dominantný koreň polynómu a a $l \geq 2$, dostávame $|z_1| > |z_2| \geq 0$ a $z_1 \neq 0$; preto je korektne definované číslo

$$\mu := \max\left(\frac{|z_k|}{|z_1|} : k \in [2, l]\right) \in \langle 0, 1).$$

Podľa lemy 1.13.2 existuje postupnosť $\underset{k=1}{\overset{l}{\mathbf{\Gamma}}}(\tilde{x}_k) \in (\mathbb{C} - \{0\})^l$ spĺňajúca $\tilde{y}_n = \sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n$ a následne

$$\tilde{y}_n = z_1^n \left[\tilde{x}_1 + \sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k \left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n\right]. \tag{5.39}$$

Ak položíme

$$\xi := \sum_{k=2}^{l} |\tilde{x}_k|,$$

tak

$$0 \leq \left|\sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k \left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n\right| \leq \xi \mu^n;$$

keďže $\lim_{n\to\infty} \xi\mu^n = 0$, postupnosť $\{|\sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k (\frac{z_k}{z_1})^n|\}_{n=0}^{\infty}$ musí byť nulová. Z $|\tilde{x}_1| > 0$ preto dostávame existenciu takého $n_1 \in [0, \infty)$, že pre každé

$n \in [n_1, \infty)$ je $|\sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k(\frac{z_k}{z_1})^n| < |\tilde{x}_1|$ a následne, s uvážením (5.39), $\tilde{y}_n \neq 0$. Pre $n \in [n_1, \infty)$ je potom

$$\frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n} = z_1 \frac{\tilde{x}_1 + \sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k(\frac{z_k}{z_1})^{n+1}}{\tilde{x}_1 + \sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k(\frac{z_k}{z_1})^{n}},$$

a pretože

$$\lim_{n\to\infty} \left| \sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k \left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n \right| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{l} \tilde{x}_k \left(\frac{z_k}{z_1}\right)^n = 0,$$

a $\tilde{x}_1 \neq 0$, máme tiež $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_1}} \frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n} = z_1 \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_1} = z_1$. ■

Veta 5.21 *Nech $l \in [3, \infty)$, $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{j=0}^{l}(a_j) \in \mathbb{C}^{l+1}$, $a_l \neq 0$, nech $\{\tilde{y}_n\}_{n=0}^{\infty}$ je partikulárne riešenie* DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{i=0}^{l}(a_i)$*, ktoré je určené počiatočným úsekom $(0)^{l-1}(1)$, a nech pre každé $n \in [0, \infty)$ je*

$$D_n = \det \begin{pmatrix} \tilde{y}_{n+1} & \tilde{y}_n \\ \tilde{y}_{n+2} & \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix}, \qquad E_n = \det \begin{pmatrix} \tilde{y}_{n+2} & \tilde{y}_n \\ \tilde{y}_{n+3} & \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Ak polynóm $\sum_{j=0}^{l} a_j x^j$ má dominantnú množinu koreňov $\{z_1, z_2\}$, tak existuje také $n_1 \in [0, \infty)$, že $D_n \neq 0$ pre všetky $n \in [n_1, \infty)$, postupnosti $\{\frac{D_{n+1}}{D_n}\}_{n=n_1}^{\infty}$ a $\{\frac{E_n}{D_n}\}_{n=n_1}^{\infty}$ sú konvergentné a platí

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_1}} \frac{D_{n+1}}{D_n} = z_1 z_2, \qquad \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_1}} \frac{E_n}{D_n} = z_1 + z_2.$$

Dôkaz. Vetu opäť dokážeme len za dodatočného predpokladu, že všetky korene polynómu $a := \sum_{j=0}^{l} a_j x^j \in \mathbb{C}[x]$ sú jednoduché.

Nech $\{z_k : k \in [1, l]\}$ je množina všetkých koreňov polynómu a. Keďže a má dominantnú množinu koreňov $\{z_1, z_2\}$ a $l \geq 3$, je nutne $|z_1| = |z_2| > |z_3| \geq 0$, $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq 0$ a $z_2 \neq 0$. Položme

$$P_l := \{(p, q) : p \in [1, l], q \in [p, l]\} - \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}.$$

Podľa lemy 1.13.2 je $\tilde{y}_n = \sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^n$, kde $\tilde{x}_k \in \mathbb{C} - \{0\}$ pre každé $k \in [1, l]$. Vo vyjadrení determinantu D_n každý z exponentov v mocninách koreňov polynómu a je aspoň n, preto pre každé $(p,q) \in P_l$ existuje také $d_{p,q} \in \mathbb{C}$, že

$$\begin{aligned} D_n &= \tilde{y}_{n+1}^2 - \tilde{y}_n \tilde{y}_{n+2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^{n+1} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^{n} \right) \left(\sum_{k=1}^{l} \tilde{x}_k z_k^{n+2} \right) \\ &= \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 (2 z_1^{n+1} z_2^{n+1} - z_1^n z_2^{n+2} - z_1^{n+2} z_2^n) + \sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q} z_p^n z_q^n \\ &= z_1^n z_2^n \left[\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 (2 z_1 z_2 - z_2^2 - z_1^2) + \sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q} \left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2} \right)^n \right] \\ &= z_1^n z_2^n \left[-\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 (z_1 - z_2)^2 + \sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q} \left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2} \right)^n \right]. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ak $(p,q) \in P_l$, tak nutne $q \in [3,l]$, preto $|\frac{z_p z_q}{z_1 z_2}| = \frac{|z_p|}{|z_1|} \cdot \frac{|z_q|}{|z_2|} \leq \frac{|z_q|}{|z_2|} < 1$ a následne

$$\zeta := \max \left(\left| \frac{z_p z_q}{z_1 z_2} \right| : (p,q) \in P_l \right) \in \langle 0, 1).$$

Ak označíme

$$\delta := \sum_{(p,q)\in P_l} |d_{p,q}|,$$

tak

$$0 \leq \left| \sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q} \left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2} \right)^n \right| \leq \delta \zeta^n,$$

a preto z limitného vzťahu

$$\lim_{n\to\infty} \delta \zeta^n = 0$$

vyplýva, že postupnosť $\{| \sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q} (\frac{z_p z_q}{z_1 z_2})^n |\}_{n=0}^{\infty}$ je nulová. Pretože čísla $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ a $z_1 - z_2$ sú nenulové, je $| -\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 (z_1 - z_2)^2 | > 0$. V súlade s tým existuje také $n_1 \in [0, \infty)$, že pre všetky $n \in [n_1, \infty)$ je splnená nerovnosť

$$\left| \sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q} \left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2} \right)^n \right| < | -\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 (z_1 - z_2)^2 |,$$

a tak z (5.40) vidíme, že $D_n \neq 0$. Postupnosť $\{\sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q}(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2})^n\}_{n=0}^{\infty}$ je potom nulová a platí

$$\lim_{n\to\infty}\left[-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2+\sum_{(p,q)\in P_l} d_{p,q}\left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2}\right)^n\right]=-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2\neq 0. \tag{5.41}$$

Kombináciou (5.40) a (5.41) získavame

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq n_1}}\frac{D_{n+1}}{D_n}=z_1 z_2\cdot\frac{-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2}{-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2}=z_1 z_2.$$

Podobne ako vyššie pre každé $(p,q)\in P_l$ existuje také $e_{p,q}\in\mathbb{C}$, že

$$\begin{aligned}
E_n &= \tilde{y}_{n+2}\tilde{y}_{n+1}-\tilde{y}_n\tilde{y}_{n+3}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{l}\tilde{x}_k z_k^{n+2}\right)\left(\sum_{k=1}^{l}\tilde{x}_k z_k^{n+1}\right)-\left(\sum_{k=1}^{l}\tilde{x}_k z_k^{n}\right)\left(\sum_{k=1}^{l}\tilde{x}_k z_k^{n+3}\right)\\
&= \tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1^{n+2}z_2^{n+1}+z_1^{n+1}z_2^{n+2}-z_1^{n}z_2^{n+3}-z_1^{n+3}z_2^{n})+\sum_{(p,q)\in P_l} e_{p,q}z_p^n z_q^n\\
&= z_1^n z_2^n\left[\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1^2 z_2+z_1 z_2^2-z_2^3-z_1^3)+\sum_{(p,q)\in P_l} e_{p,q}\left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2}\right)^n\right]\\
&= z_1^n z_2^n\left[-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2(z_1+z_2)+\sum_{(p,q)\in P_l} e_{p,q}\left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2}\right)^n\right]
\end{aligned} \tag{5.42}$$

a platí limitný vzťah

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left[-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2(z_1+z_2)+\sum_{(p,q)\in P_l} e_{p,q}\left(\frac{z_p z_q}{z_1 z_2}\right)^n\right]\\
&= -\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2(z_1+z_2).
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Keďže $-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2\neq 0$, vzhľadom na (5.40)–(5.43) je

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\geq n_1}}\frac{E_n}{D_n}=\frac{-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2(z_1+z_2)}{-\tilde{x}_1\tilde{x}_2(z_1-z_2)^2}=z_1+z_2. \quad \blacksquare$$

Vety 5.20 a 5.21 sú základom Bernoulliho metódy, ktorá umožňuje testovať, či polynóm $a=\sum_{j=0}^{l} a_j x^j\in\mathbb{C}[x]$ má dominantnú množinu koreňov mohutnosti nanajvýš 2 (a v pozitívnom prípade aproximovať jej prvky).

V prvej fáze Bernoulliho metódy nájdeme toľko členov partikulárneho riešenia DR $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{i=0}^{l}(a_i)$ určeného počiatočným úsekom $(0)^{l-1}(1)$, aby bolo možné vzájomným porovnaním korektne definovaných zlomkov $\frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n}$ s veľkou pravdepodobnosťou odhadnúť, či postupnosť $\left\{\frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n}\right\}$ má konvergenčné tendencie (vtedy a pravdepodobne má dominantný koreň blízky k číslu $\frac{\tilde{y}_{n+1}}{\tilde{y}_n}$).

Ak a pravdepodobne nemá dominantný koreň, vypočítame aj čísla D_n, E_n a korektne definované zlomky $\frac{D_{n+1}}{D_n}$, $\frac{E_n}{D_n}$. Ak postupnosti $\left\{\frac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$ a $\left\{\frac{E_n}{D_n}\right\}$ javia konvergenčné tendencie, prvky z_1 a z_2 (predpokladanej) dvojprvkovej dominantnej množiny koreňov môžeme aproximovať vďaka tomu, že sú to korene kvadratického polynómu

$$(x-z_1)(x-z_2) = x^2 - (z_1+z_2)x + z_1z_2,$$

teda čísla

$$\frac{1}{2}\left[(z_1+z_2) + m\sqrt{(z_1+z_2)^2 - 4z_1z_2}\right],\ m=-1,1.$$

Ak $m \in \{-1,1\}$, tak $\frac{1}{2}\left(b + m\sqrt{b^2-4c}\right)$ je spojitá komplexná funkcia komplexných premenných b, c. V súlade s vetou 5.21 preto máme

$$\begin{aligned}\{z_1,z_2\} &= \left\{\frac{1}{2}\left[(z_1+z_2) \pm \sqrt{(z_1+z_2)^2 - 4z_1z_2}\right]\right\}\\ &\approx \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{E_n}{D_n} \pm \sqrt{\frac{{E_n}^2}{{D_n}^2} - 4\frac{D_{n+1}}{D_n}}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Ak vypočítané zlomky $\frac{D_{n+1}}{D_n}$ a $\frac{E_n}{D_n}$ nenaznačujú, že by postupnosti $\left\{\frac{D_{n+1}}{D_n}\right\}$ a $\left\{\frac{E_n}{D_n}\right\}$ mali (súčasne) konvergovať, môžeme sa domnievať, že polynóm a nemá ani dvojprvkovú dominantnú množinu koreňov.

Kapitola 6

Sústavy lineárnych rovníc

Z hľadiska praktických aplikácií veľmi dôležitou matematickou úlohou je riešenie sústav lineárnych algebrických rovníc. Svedčí o tom odhad, že spomedzi všetkých vedeckých problémov, ktoré majú v procese riešenia istým spôsobom zakomponované matematické metódy, okolo 75% ich pracuje so sústavami lineárnych algebrických rovníc.

Sústavu m (reálnych) lineárnych algebrických rovníc o n neznámych

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i \in [1, m], \tag{6.1}$$

môžeme zapísať v maticovom tvare ako $Ax = b$, kde matice $A \in \mathbb{R}(m, n)$, $b \in \mathbb{R}(m, 1)$ a neznáma matica x s n riadkami a jedným stĺpcom sú určené vzťahmi

$$\begin{aligned}(A)_{i,j} &:= a_{ij},\\ (b)_{i,1} &:= b_i,\\ (x)_{j,1} &:= x_j,\end{aligned}$$

kde $i \in [1, m]$ a $j \in [1, n]$. Ak $m = n$ a $\det A \neq 0$, tak existuje matica $A^{-1} \in \mathbb{R}(n, n)$. Z lineárnej algebry vieme, že vtedy rovnica $Ax = b$ má jediné riešenie, a to $A^{-1}b$. Ak teda chceme vyriešiť sústavu $Ax = b$, jednou z možností je urobiť to pomocou matice A^{-1}.

6.1 Gaussova-Jordanova redukcia

Nech $n \in [1, \infty)$ a nech matica $A \in \mathbb{R}(n, n)$ je regulárna. Na určenie matice A^{-1} inverznej k matici A máme k dispozícii explicitný vzorec, ten je však výpočtovo veľmi náročný už pre relatívne malé n. V praktických aplikáciách sa preto najčastejšie na určenie matice A^{-1} používa postup založený na Gaussovej-Jordanovej redukcii, ktorej podstata vyplýva z dôkazu toho, že pre každé $p \in [0, n]$ je pravdivé tvrdenie $T(n)$: existuje taká regulárna matica $A_p \in \mathbb{R}(n, n)$, že

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p] \ (A_p A)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Tvrdenie $T(0)$ je triviálne pravdivé, stačí vziať $A_0 := I_n$. Nech $p \in [1, n]$ a tvrdenie $T(p-1)$ je pravdivé, teda existuje taká regulárna matica $A_{p-1} \in \mathbb{R}(n, n)$, že

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p-1] \ (A_{p-1} A)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Položme

$$B := A_{p-1} A \in \mathbb{R}(n, n). \tag{6.2}$$

Matica B je regulárna, lebo $\det B = \det A_{p-1} \det A \neq 0$. Pretože v matici B sú v stĺpcoch s indexmi patriacimi do množiny $[1, p-1]$ všetky poddiagonálne prvky nulové, ľahko sa vidí, že je

$$0 \neq \det B = \left[\prod_{i=1}^{p-1} (B)_{i,i} \right] \det(B([p, n], [p, n]) = \det(B([p, n], [p, n]).$$

Žiadny stĺpec matice $B([p, n], [p, n])$ preto nie je nulový, a to znamená, že existuje $q \in [p, n]$, pre ktoré je $(B)_{q,p} \neq 0$; kvôli jednoznačnosti nech q je minimálne možné. Vzhľadom na vlastnosti matíc

$$D := \operatorname{diag}(1)^{p-1}(((B)_{q,p})^{-1})(1)^{n-p} \in \mathbb{R}(n, n) \tag{6.3}$$

a $P_n^{p,q}$ pre maticu

$$C := D P_n^{p,q} B \in \mathbb{R}(n, n) \tag{6.4}$$

platí

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p-1] \cup \{(p, p)\} \ (C)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Ďalej ukážeme matematickou indukciou vzhľadom na r, že pre každé $r \in [0, n]$ platí tvrdenie $\tilde{T}(r)$: existuje taká regulárna matica $C_r \in \mathbb{R}(n, n)$, že

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p-1] \cup (([1, r] \cup \{p\}) \times \{p\})) \ (C_r C)_{i,j} = \delta_{i,j}.$$

Tvrdenie $\tilde{T}(0)$ triviálne platí s maticou $C_0 := I_n$. Nech $r \in [1, n]$ a tvrdenie $\tilde{T}(r-1)$ je pravdivé, teda existuje taká regulárna matica $C_{r-1} \in \mathbb{R}(n, n)$, že

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p-1] \cup (([1, r-1] \cup \{p\}) \times \{p\}) \ (C_{r-1} C)_{i,j} = \delta_{i,j}. \tag{6.5}$$

Ak $r = p$, stačí vziať $C_r := C_{r-1}$. V ďalšom predpokladajme, že $r \in [1, n] - \{p\}$ a položme

$$\begin{aligned}\tilde{D} &:= \operatorname{diag}(0)^{p-1}(-(C_{r-1}C)_{r,p})(0)^{n-p},\\ C_r &:= (P_n^{p,r}\tilde{D} + I_n)C_{r-1}.\end{aligned}$$

Ak matica $P_n^{p,r}\tilde{D}$ má nenulový prvok, je to $(P_n^{p,r}\tilde{D})_{r,p} = -(C_{r-1}C)_{r,p}$. V dôsledku toho $P_n^{p,r}\tilde{D} + I_n \in \mathbb{R}_\Delta(n, n) \cup \mathbb{R}^\Delta(n, n)$,

$$\det(P_n^{p,r}\tilde{D} + I_n) = \prod_{i=1}^{n}(P_n^{p,r}\tilde{D} + I_n)_{i,i} = \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$$

a $\det C_r = \det C_{r-1} \neq 0$. Pretože $(C_{r-1}C)_{p,p} = 1$, z vlastností matíc $\tilde{D}$ a $P_n^{p,r}$ dostávame

$$\begin{aligned}(C_rC)_{r,p} &= (P_n^{p,r}\tilde{D}C_{r-1}C)_{r,p} + (C_{r-1}C)_{r,p}\\ &= -(C_{r-1}C)_{r,p} + (C_{r-1}C)_{r,p} = 0 = \delta_{r,p}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Ďalej, keďže matica $\tilde{D}C_{r-1}C$ môže mať nenulové prvky iba v riadku p, máme

$$\forall (i, j) \in ([1, n] - \{r\}) \times [1, n]\ (P_n^{p,r}\tilde{D}C_{r-1}C)_{i,j} = 0. \tag{6.7}$$

Napokon, z (6.5) vyplýva, že

$$\forall j \in [1, p-1]\ (P_n^{p,r}\tilde{D}C_{r-1}C)_{r,j} = (\tilde{D}C_{r-1}C)_{p,j} = (\tilde{D})_{p,p}\delta_{p,j} = 0. \tag{6.8}$$

Na základe (6.5), (6.7) a (6.8) platí

$$\begin{aligned}&\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, p-1] \cup (([1, r-1] \cup \{p\}) \times \{p\})\\ &(C_rC)i, j = (P_n^{p,r}\tilde{D}C_{r-1}C)_{i,j} + (C_{r-1}C)_{i,j} = 0 + \delta_{i,j} = \delta_{i,j},\end{aligned}$$

čo nám spolu s (6.6) dáva tvrdenie $\tilde{T}(r)$.

Podľa tvrdenia $\tilde{T}(n)$ existuje regulárna matica $C_n \in \mathbb{R}(n, n)$ spĺňajúca

$$\forall (i, j) \in ([1, n] \times [1, p])\ (C_nC)_{i,j} = \delta_{i,j}. \tag{6.9}$$

Pre maticu $A_p := C_nDP_n^{p,q}A_{p-1}$ potom vzhľadom na (6.2) a (6.4) platí $A_pA = C_nC$. Keďže z (6.3) získavame

$$\det A_p = \det C_n \det D \det P_n^{p,q} \det A_{p-1} = (\det C_n)((B)_{q,p})^{-1} \det A_{p-1} \neq 0,$$

(6.9) vlastne znamená, že tvrdenie $T(p)$ je dokázané.

V súlade s dôkazom existuje $k \in [1, \infty)$ a taká postupnosť $\overset{k}{\underset{i=1}{\mathbf{\Gamma}}}(M_i) \in (\mathbb{R}(n,n))^k$, že $A_n A = (\prod_{i=1}^{k} M_{k+1-i})A$, pričom pre každé $i \in [1,k]$ matica M_i je diagonálna, permutačná alebo sa líši od I_n v práve jednom prvku, a to nediagonálnom. Násobenie (zľava) maticami z postupnosti $\overset{k}{\underset{i=1}{\mathbf{\Gamma}}}(M_i)$ je preto veľmi jednoduché.

Z tvrdenia $T(n)$ vyplýva, že $A_n A = I_n$, preto $A_n = A^{-1}$. Nech $p \in [1, \infty)$ a $B \in \mathbb{R}(n,p)$. Pre blokovú maticu $(A\ B) \in \mathbb{R}((n),(n,p))$ platí $A_n(A\ B) = (A_nA\ A_nB) = (I_n\ A^{-1}B)$. Špeciálne ak $B = I_n$, tak $A_n(A\ I_n) = (I_n\ A^{-1})$. Preto Gaussova-Jordanova redukcia aplikovaná na blokovú maticu $(A\ I_n) \in \mathbb{R}((n),(n,n))$ dáva ako finálny výstup blokovú maticu s dvoma blokmi I_n a A^{-1}.

6.2 *LU*-rozklad

Gaussovu-Jordanovu redukciu môžeme modifikovať tak, že rezignujeme na elimináciu naddiagonálnych prvkov i na normovanie diagonálnych prvkov (vytváranie jednotiek na diagonále). Príslušný postup je potom klasická *Gaussova eliminácia*. Predpokladajme, že máme riešiť sústavu lineárnych algebrických rovníc v maticovom tvare $Ax = b$, kde $n \in [1, \infty)$, $A \in \mathbb{R}(n,n)$ je regulárna matica a $b \in \mathbb{R}(n,1)$. Gaussovou elimináciou prejdeme od matice A k regulárnej matici $\tilde{M}A \in \mathbb{R}^{\Delta}(n,n)$, kde $\tilde{M} = \prod_{i=1}^{l} \tilde{M}_{l+1-i}$ a matice $\tilde{M}_i$, $i \in [1,l]$, sú jednoduchého typu podobne ako pri Gaussovej-Jordanovej redukcii. Keďže $\det \tilde{M} \neq 0$, sústava $Ax = b$ je ekvivalentná so sústavou $\tilde{A}x = \tilde{b}$, kde $\tilde{A} := \tilde{M}A$ a $\tilde{b} := \tilde{M}b$. Maticu $\tilde{b}$ získame aplikáciou Gaussovej eliminácie na blokovú maticu $(A\ b) \in \mathbb{R}((n),(n,1))$ vďaka tomu, že $\tilde{M}(A\ b) = (\tilde{M}A\ \tilde{M}b) = (\tilde{A}\ \tilde{b})$.

Pretože $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{\Delta}(n,n)$ a $\det \tilde{A} = \prod_{i=1}^{n} (\tilde{A})_{i,i} \neq 0$, sústavu $\tilde{A}x = \tilde{b}$ vyriešime *spätným chodom*, t. j. určíme prvky hľadanej matice $x \in \mathbb{R}(n,n)$ v klesajúcom poradí indexov: ak $i \in [1,n]$, pričom $(x)_{j,1}$ už poznáme pre každé $j \in [i+1, n]$, tak

$$(x)_{i,1} = \frac{1}{(\tilde{A})_{i,i}} \left((\tilde{b})_{i,1} - \sum_{j=i+1}^{n} (\tilde{A})_{i,j}(x)_{j,1} \right).$$

Samozrejme, Gaussovu-Jordanovu redukciu môžeme modifikovať aj tak, že okrem normovania diagonálnych prvkov rezignujeme aj na elimináciu poddiagonálnych prvkov. Riešenie sústavy $Ax = b$ tým prevedieme na riešenie sústavy $\hat{A}x = \hat{b}$, kde $\hat{A} \in \mathbb{R}_{\Delta}(n,n)$ a $\hat{b} \in \mathbb{R}(n,1)$. Novú sústavu vyriešime *priamym chodom*, teda prvky matice $x \in \mathbb{R}(n,1)$ určíme vo vzostupnom poradí indexov: ak $i \in [1,n]$, pričom $(x)_{j,1}$ už poznáme pre každé $j \in [1, i-1]$, tak

$$(x)_{i,1} = \frac{1}{(\hat{A})_{i,i}} \left((\hat{b})_{i,1} - \sum_{j=1}^{i-1} (\hat{A})_{i,j} (x)_{j,1} \right).$$

Ako onedlho uvidíme, regulárnu maticu A je možné vyjadriť v tvare $A = LU$, kde $L \in \mathbb{R}^1_\Delta(n,n)$ a $U \in \mathbb{R}(n,n)$. Preto riešenie sústavy $Ax = LUx = b$ je ekvivalentné s riešením dvoch sústav $Ly = b$ a $Ux = y$. Najprv vyriešime sústavu $Ly = b$ priamym chodom a následne vyriešime sústavu $Ux = y$ spätným chodom. Pretože $\det L = 1$ a $\det U = \det A \neq 0$, obe sústavy sú riešiteľné jednoznačne a riešenie sústavy $Ux = y$ je totožné s riešením sústavy $Ax = b$.

Veta 6.1 *Ak $n \in [1, \infty)$, $A \in \mathbb{R}(n,n)$ a pre každé $i \in [1, n-1]$ je $\det(A([1,i], [1,i])) \neq 0$, tak existuje jediná taká usporiadaná dvojica $(L,U) \in \mathbb{R}^1_\Delta(n,n) \times \mathbb{R}^\Delta(n,n)$, že $A = LU$.*

Dôkaz. Položme $A_m := A([1,m],[1,m])$ pre $m \in [1,n]$. Matematickou indukciou vzhľadom na m dokážeme, že pre každé $m \in [1,n]$ platí tvrdenie $T(m)$: existuje jediná taká usporiadaná dvojica $(L_m, U_m) \in \mathbb{R}^1_\Delta(m,m) \times \mathbb{R}^\Delta(m,m)$, že $A_m = L_m U_m$.

Pretože $\mathbb{R}^1_\Delta(1,1) = \{I_1\} = \{(1)\}$ a $A_1 = ((A)_{1,1})$, jediná usporiadaná dvojica $(L_1, U_1) \in \mathbb{R}^1_\Delta(1,1) \times \mathbb{R}^\Delta(1,1)$, pre ktorú $A_1 = L_1 U_1$, je $(L_1, U_1) = (I_1, A_1)$; tvrdenie $T(1)$ teda platí.

Nech teda $m \in [1, n-1]$ a existuje jediná taká usporiadaná dvojica $(L_m, U_m) \in \mathbb{R}^1_\Delta(m,m) \times \mathbb{R}^\Delta(m,m)$, že $A_m = L_m U_m$. Ak maticu A_{m+1} budeme chápať ako blokovú maticu

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} A^{(11)}_{m+1} & A^{(12)}_{m+1} \\ A^{(21)}_{m+1} & A^{(22)}_{m+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}((m,1),(m,1)),$$

tak

$$\begin{aligned}
A^{(11)}_{m+1} &= A([1,m],[1,m]) = A_m, \\
A^{(12)}_{m+1} &= A([1,m],\{m+1\}), \\
A^{(21)}_{m+1} &= A(\{m+1\},[1,m]), \\
A^{(22)}_{m+1} &= A(\{m+1\},\{m+1\}) = ((A)_{m+1,m+1}).
\end{aligned}$$

Predpokladajme, že existuje usporiadaná dvojica

$$(L_{m+1}, U_{m+1}) \in \mathbb{R}^1_\Delta(m+1,m+1) \times \mathbb{R}^\Delta(m+1,m+1),$$

pre ktorú $A_{m+1} = L_{m+1}U_{m+1}$. Na matice L_{m+1} a U_{m+1} sa môžeme pozerať ako na blokové matice patriace do $\mathbb{R}((m,1),(m,1))$:

$$L_{m+1} = \begin{pmatrix} L_{m+1}^{(11)} & L_{m+1}^{(12)} \\ L_{m+1}^{(21)} & L_{m+1}^{(22)} \end{pmatrix}, \qquad U_{m+1} = \begin{pmatrix} U_{m+1}^{(11)} & U_{m+1}^{(12)} \\ U_{m+1}^{(21)} & U_{m+1}^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Zo štruktúry matíc L_{m+1} a U_{m+1} vyplýva, že je $L_{m+1}^{(11)} \in \mathbb{R}_{\Delta}^{1}(m,m)$, $L_{m+1}^{(12)} = O_{m,1}$, $L_{m+1}^{(22)} = (1)$, $U_{m+1}^{(11)} \in \mathbb{R}^{\Delta}(m,m)$ a $U_{m+1}^{(21)} = O_{1,m}$. Okrem toho, pre každé $i,j \in [1,2]$ je

$$A_{m+1}^{(ij)} = \sum_{k=1}^{2} L_{m+1}^{(ik)} U_{m+1}^{(kj)}.$$

Špeciálne pre $i = j = 1$ teda

$$A_m = L_{m+1}^{(11)}U_{m+1}^{(11)} + O_{m,1}U_{m+1}^{(21)} = L_{m+1}^{(11)}U_{m+1}^{(11)}.$$

Z $T(m)$ potom dostávame, že je nutne $L_{m+1}^{(11)} = L_m$ a $U_{m+1}^{(11)} = U_m$.

Ďalej pre $i = 1$, $j = 2$ máme

$$A([1,m],\{m+1\}) = L_m U_{m+1}^{(12)} + O_{m,1}U_{m+1}^{(22)} = L_m U_{m+1}^{(12)},$$

a keďže $\det L_m = 1 \neq 0$, je

$$U_{m+1}^{(12)} = L_m^{-1} A([1,m],\{m+1\}). \tag{6.10}$$

Ak $i = 2$ a $j = 1$, tak

$$A(\{m+1\},[1,m]) = L_{m+1}^{(21)}U_m + (1)O_{1,m} = L_{m+1}^{(21)}U_m.$$

Z toho, že $0 \neq \det A_m = \det L_m \det U_m = \det U_m$, získavame

$$L_{m+1}^{(21)} = A(\{m+1\},[1,m])U_m^{-1}. \tag{6.11}$$

Napokon pre $i = j = 2$ je

$$((A)_{m+1,m+1}) = A(\{m+1\},[1,m])U_m^{-1}L_m^{-1}A([1,m],\{m+1\}) + (1)U_{m+1}^{(22)},$$

a tak

$$U_{m+1}^{(22)} = ((A)_{m+1,m+1}) - A(\{m+1\},[1,m])U_m^{-1}L_m^{-1}A([1,m],\{m+1\}). \tag{6.12}$$

Z jednoznačnosti matíc L_m, U_m a z (6.10)–(6.12) vidíme, že existuje nanajvýš jedna usporiadaná dvojica

$$(L_{m+1}, U_{m+1}) \in \mathbb{R}_{\Delta}^{1}(m+1,m+1) \times \mathbb{R}^{\Delta}(m+1,m+1),$$

pre ktorú $A_{m+1} = L_{m+1}U_{m+1}$. Ľahko sa overí, že ak blokové matice

$$L_{m+1} := \begin{pmatrix} L_m & O_{m,1} \\ L^{(21)}_{m+1} & (1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}((m,1),(m,1)),$$
$$U_{m+1} := \begin{pmatrix} U_m & U^{(12)}_{m+1} \\ O_{1,m} & U^{(22)}_{m+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}((m,1),(m,1)),$$

ktorých bloky $L^{(21)}_{m+1}$, $U^{(12)}_{m+1}$ a $U^{(22)}_{m+1}$ sú určené vzťahmi (6.10)–(6.12), chápeme ako matice z $\mathbb{R}^1_\Delta(m+1,m+1)$, resp. $\mathbb{R}^\Delta(m+1,m+1)$, tak spĺňajú rovnosť $L_{m+1}U_{m+1} = A_{m+1}$. Tvrdenie $T(m+1)$ je preto pravdivé.

Keďže $A_n = A$, podľa $T(n)$ je $(L,U) := (L_n,U_n)$ jediná usporiadaná dvojica patriaca do $\mathbb{R}^1_\Delta(n,n) \times \mathbb{R}^\Delta(n,n)$, pre ktorú platí $A = LU$. ■

Vyjadrenie matice $A \in \mathbb{R}(n,n)$ v tvare $A = LU$, kde

$$(L,U) \in \mathbb{R}^1_\Delta(n,n) \times \mathbb{R}^\Delta(n,n),$$

sa nazýva *LU-rozkladom* matice A. Hľadanie LU-rozkladu je možné zorganizovať tak, že sa postupne určujú riadky matice U a stĺpce matice L, a to v poradí danom postupnosťou $\mathop{\mathbf{\Gamma}}\limits_{k=1}^{n}(U(\{k\},[1,n]), L([1,n],\{k\}))$.

Predpokladajme kvôli jednoduchosti, že $\det A \neq 0$. V takom prípade podľa vety 6.1 existuje jediný LU-rozklad matice A, pričom z $0 \neq \det A = \det U = \prod_{i=1}^n (U)_{i,i}$ vidíme, že $(U)_{i,i} \neq 0$ pre každé $i \in [1,n]$. Ak $k \in [1,n]$ a poznáme už $U([1,k-1],[1,n])$ a $L([1,n],[1,k-1])$, tak pre $q \in [k,n]$ z vyjadrenia

$$(A)_{k,q} = \sum_{i=1}^{n} (L)_{k,i}(U)_{i,q} = \sum_{i=1}^{k-1} (L)_{k,i}(U)_{i,q} + (U)_{k,q}$$

dostávame

$$(U)_{k,q} = (A)_{k,q} - \sum_{i=1}^{k-1} (L)_{k,i}(U)_{i,q}.$$

Pre $p \in [k+1,n]$ potom máme

$$(A)_{p,k} = \sum_{i=1}^{n} (L)_{p,i}(U)_{i,k} = \sum_{i=1}^{k-1} (L)_{p,i}(U)_{i,k} + (L)_{p,k}(U)_{k,k}$$

a následne

$$(L)_{p,k} = \frac{1}{(U)_{k,k}} \left((A)_{p,k} - \sum_{i=1}^{k-1} (L)_{p,i}(U)_{i,k} \right).$$

6.3 Iteračné metódy

Okrem priamych metód riešenia sústav lineárnych algebrických rovníc, ktoré poskytujú riešenie presné, existujú aj metódy iteračné, ktoré dávajú len istú aproximáciu riešenia. Tie sa používajú predovšetkým v prípade riedkych matíc (s malým počtom nenulových prvkov) veľkého rozmeru, keď presné riešenie by mohlo byť výpočtovo príliš náročné.

Predpokladajme, že máme riešiť sústavu

$$\tilde{A}x = \tilde{b},\ \ \tilde{A} \in \mathbb{R}(n,n),\ \ \tilde{b} \in \mathbb{R}(n,1),$$

kde $\tilde{A}$ je regulárna matica, a že s touto sústavou je ekvivalentná sústava

$$x = Ax + b,\ \ A \in \mathbb{R}(n,n),\ \ b \in \mathbb{R}(n,1).$$

To znamená, že obe sústavy majú tú istú (jednoprvkovú) množinu riešení. Nech $f \in \mathbb{R}(n,1)^{\mathbb{R}(n,1)}$ je zobrazenie, ktoré matici $x \in \mathbb{R}(n,1)$ priradí maticu $Ax + b \in \mathbb{R}(n,1)$. Riešiť sústavu $x = Ax + b$ potom vlastne znamená hľadať pevný bod zobrazenia f. Na maticu x sa môžeme pozerať ako na postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}\limits_{i=1}^{n}((x)_{i,1}) \in \mathbb{R}^n$, preto $\mathbb{R}(n,1)$ môžeme chápať ako metrický priestor s euklidovskou metrikou d, v ktorom pre $x, y \in \mathbb{R}(n,1)$ je

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n}((x)_{i,1} - (y)_{i,1})^2\right]^{1/2} = [(x-y)^{\mathrm{T}}(x-y)]^{1/2}.$$

Na aproximovanie pevného bodu zobrazenia f máme potom k dispozícii metódu postupných aproximácií $\mathrm{MPA}(f,c)$ s počiatočnou aproximáciou $c \in \mathbb{R}(n,1)$, ktorá definuje postupnosť $\{x^{(1)}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}(n,1)^{[1,\infty)}$ podľa známych pravidiel:

1. $x^{(1)} := c$.

2. Ak $k \in [1,\infty)$ a $x^{(k)}$ už je definované, tak $x^{(k+1)} := Ax^{(k)} + b$.

Pretože $\mathrm{MPA}(f,c)$ poskytuje iba aproximáciu presného riešenia, bolo by dobré vedieť, za akých okolností vytvára postupnosť konvergujúcu k (jedinému) pevnému bodu zobrazenia f bez ohľadu na voľbu počiatočnej aproximácie c.

Na maticu $B \in \mathbb{R}(m,n)$ sa môžeme zasa pozerať ako na postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}\limits_{i=1}^{m}[\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}\limits_{j=1}^{n}((B)_{i,j})] \in \mathbb{R}^{mn}$, preto $\mathbb{R}(m,n)$ môžeme považovať za metrický priestor $(\mathbb{R}, d)$ s euklidovskou metrikou d, keď pre $B, C \in \mathbb{R}(m,n)$ je

$$d(B,C) = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}((B)_{i,j} - (C)_{i,j})^2\right)^{1/2}.$$

Je ľahko vidieť, že konvergencia v zmysle tejto metriky je ekvivalentná s konvergenciou po prvkoch: ak $\{B_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}(m,n)^{[1,\infty)}$ a $B \in \mathbb{R}(m,n)$, tak

$$\lim_{k\to\infty} B_k = B \overset{\text{df.}}{\Leftrightarrow} (\forall i \in [1,m]\ \forall j \in [1,n]\ \lim_{k\to\infty} (B_k)_{i,j} = (B)_{i,j}).$$

Nasledovnú vetu vyslovíme bez dôkazu, ktorý využíva fakt, že každá matica $A \in \mathbb{R}(n,n)$ je podobná matici v Jordanovom kanonickom tvare.

Veta 6.2 *Nech* $n \in [1,\infty)$, $A \in \mathbb{R}(n,n)$, $b \in \mathbb{R}(n,1)$, $f := \{(x, Ax+b) : x \in \mathbb{R}(n,1)\}$ *a nech sústava* $x = Ax + b$ *má jediné riešenie* $\hat{x} \in \mathbb{R}(n,1)$. *Potom nasledovné tvrdenia sú ekvivalentné:*

(1) *Pre každé* $c \in \mathbb{R}(n,1)$ *postupnosť* $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, *ktorú vytvorila* MPA$(f,c)$, *je konvergentná a platí* $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = \hat{x}$.

(2) $\lim_{k\to\infty} A^k = O_{n,n}$.

(3) $\rho(A) < 1$.

Problém pri aplikácii vety 6.2 spočíva v tom, že určiť spektrálny polomer $\rho(A)$ matice $A \in \mathbb{R}(n,n)$ vo všeobecnosti nie je jednoduché. Často sa preto musíme uspokojiť iba s horným odhadom čísla $\rho(A)$. Ten máme k dispozícii vďaka vete 1.14 spolu s vetou 1.16, resp. s odhadom (1.7).

6.3.1 Jacobiho metóda

Všimnime si teraz dve konkrétne iteračné metódy na riešenie sústav lineárnych algebrických rovníc. Nech $n \in [1,\infty)$ a nech

$$\hat{A}x = \hat{b},\ \ \hat{A} \in \mathbb{R}(n,n),\ \ \hat{b} \in \mathbb{R}(n,1)$$

je sústava s regulárnou maticou sústavy $\hat{A}$. Pretože $\det \hat{A} \neq 0$, existuje permutácia $\pi \subseteq [1,n] \times [1,n]$, pre ktorú

$$\prod_{i=1}^{n} (\hat{A})_{i,\pi(i)} \neq 0.$$

V súlade s tým postupným násobením blokovej matice $(\hat{A}\ \hat{b}) \in \mathbb{R}((n),(n,1))$ zľava vhodnými permutačnými maticami vieme získať maticu $(\tilde{A}\ \tilde{b})$, v ktorej

$$\forall i \in [1,n]\ (\tilde{A})_{\pi(i),\pi(i)} = (\hat{A})_{i,\pi(i)} \neq 0.$$

Sústava $\hat{A}x = \hat{b}$ je potom ekvivalentná so sústavou $\tilde{A}x = \tilde{b}$ a ich (jednoznačne určené) riešenia sú totožné.

Vyjadrime maticu $\tilde{A}$ v tvare $\tilde{A} = \tilde{L} + \tilde{D} + \tilde{U}$, pričom

$$\begin{aligned} (\tilde{L})_{i,j} &:= (\tilde{A})_{i,j} \qquad i > j,\\ (\tilde{D})_{i,j} &:= (\tilde{A})_{i,j} \qquad i = j,\\ (\tilde{U})_{i,j} &:= (\tilde{A})_{i,j} \qquad i < j, \end{aligned}$$

zatiaľ čo všetky ostatné prvky v maticiach $\tilde{L}, \tilde{D}, \tilde{U}$ sú nulové. Keďže $\tilde{L} + \tilde{D}$ je dolná trojuholníková matica, $\tilde{D}$ je diagonálna matica a

$$\det(\tilde{L} + \tilde{D}) = \det \tilde{D} = \prod_{i=1}^{n} (\hat{A})_{i,\pi(i)} \neq 0,$$

matice $\tilde{L} + \tilde{D}$ a $\tilde{D}$ sú regulárne, pričom

$$\tilde{D}^{-1} = \operatorname{diag} \mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=1}^{n} (((\tilde{D})_{i,i})^{-1}).$$

Sústava

$$(\tilde{L} + \tilde{D} + \tilde{U})x = \tilde{A}x = \tilde{b}$$

je ekvivalentná s každou zo sústav

$$\begin{aligned} \tilde{D}x &= -(\tilde{L} + \tilde{U})x + \tilde{b},\\ x &= -\tilde{D}^{-1}(\tilde{L} + \tilde{U})x + \tilde{D}^{-1}\tilde{b}, \end{aligned}$$

a teda aj so sústavou $x = Ax + b$, kde

$$\begin{aligned} A &:= -\tilde{D}^{-1}(\tilde{L} + \tilde{U}),\\ b &:= \tilde{D}^{-1}\tilde{b}. \end{aligned}$$

Príslušná metóda postupných aproximácií sa nazýva *Jacobiho* iteračnou metódou.

6.3.2 Gaussova-Seidelova metóda

So sústavou $\tilde{A}x = \tilde{b}$ sú ekvivalentné aj sústavy

$$\begin{aligned} (\tilde{L} + \tilde{D})x &= -\tilde{U}x + \tilde{b}\\ x &= -(\tilde{L} + \tilde{D})^{-1}\tilde{U}x + (\tilde{L} + \tilde{D})^{-1}\tilde{b}. \end{aligned}$$

Metóda postupných aproximácií, ktorá tomu zodpovedá, sa nazýva *Gaussovou-Seidelovou* iteračnou metódou. Na prvý pohľad by sa mohlo zdať, že táto metóda nie je efektívna, lebo pri nej treba poznať maticu $-(\tilde{L}+\tilde{D})^{-1}$, čo môže byť výpočtovo náročné, pričom získame len istú aproximáciu riešenia sústavy. Ukazuje sa však, že maticu $-(\tilde{L}+\tilde{D})^{-1}$ nepotrebujeme určiť explicitne. Pri Gaussovej-Seidelovej iteračnej metóde je

$$\begin{aligned}
x^{(k+1)} &= -(\tilde{L}+\tilde{D})^{-1}\tilde{U}x^{(k)} + (\tilde{L}+\tilde{D})^{-1}\tilde{b}, \\
(\tilde{L}+\tilde{D})x^{(k+1)} &= -\tilde{U}x^{(k)} + \tilde{b}, \\
\tilde{D}x^{(k+1)} &= -\tilde{L}x^{(k+1)} - \tilde{U}x^{(k)} + \tilde{b}, \\
x^{(k+1)} &= -\tilde{D}^{-1}\tilde{L}x^{(k+1)} - \tilde{D}^{-1}\tilde{U}x^{(k)} + \tilde{D}^{-1}\tilde{b}.
\end{aligned}$$

Matica $-\tilde{D}^{-1}\tilde{L}$ má nulové prvky na tých istých pozíciách ako matica $\tilde{L}$, preto $(-\tilde{D}^{-1}\tilde{L})_{i,j} = 0$ pre všetky $i, j \in [1, n]$, pre ktoré $i \leq j$. V dôsledku toho pre každé $i \in [1, n]$ platí

$$(-\tilde{D}^{-1}\tilde{L}x^{(k+1)})_{i,1} = \sum_{j=1}^{n} (-\tilde{D}^{-1}\tilde{L})_{i,j}(x^{(k+1)})_{j,1} = \sum_{j=1}^{i-1} (-\tilde{D}^{-1}\tilde{L})_{i,j}(x^{(k+1)})_{j,1}.$$

To znamená, že

$$(x^{(k+1)})_{i,1} = \sum_{j=1}^{i-1} (-\tilde{D}^{-1}\tilde{L})_{i,j}(x^{(k+1)})_{j,1} + (-\tilde{D}^{-1}\tilde{U}x^{(k)})_{i,1} + (\tilde{D}^{-1}\tilde{b})_{i,1}$$

a prvky matice $x^{(k+1)}$ vieme získať v poradí, ktoré je určené postupnosťou $\mathop{\mathbf{\Gamma}}_{i=1}^{n}((x^{k+1})_{i,1})$. Pretože na určenie prvku $(x^{(k+1)})_{i,1}$ matice $x^{(k+1)}$ používame už aj prvky $(x^{(k+1)})_{j,1}$ pre $j \in [1, i-1]$, Gaussova-Seidelova iteračná metóda sa označuje tiež ako *metóda postupných opráv.*

6.4 Metóda najmenších štvorcov

Sústava m lineárnych algebrických rovníc (6.1) o n neznámych, v ktorej $m > n$, sa nazýva *preurčenou.* Ak príslušná maticová rovnica $Ax = b$ nie je riešiteľná (a to bude vo všeobecnosti takmer pravidlom), pre každé $x \in \mathbb{R}(n, 1)$ je $Ax - b \neq O_{m,1}$. V tom prípade sa budeme zaujímať o také $y \in \mathbb{R}(n, 1)$, pre ktoré je matica $Ay - b \in \mathbb{R}(m, 1)$ najbližšia k matici $O_{m,1} \in \mathbb{R}(m, 1)$ v zmysle euklidovskej metriky v priestore $\mathbb{R}(m, 1)$, ktorý chápeme ako $\mathbb{R}^m$. Chceme teda minimalizovať

$$d(Ax - b, O_{m,1}) = \left(\sum_{i=1}^{m} ((Ax - b)_{i,1})^2 \right)^{1/2} = \nu_2(Ax - b)$$

pre $x \in \mathbb{R}(n, 1)$.

Veta 6.3 *Ak $n \in [1, \infty)$, $m \in [n+1, \infty)$, $A \in \mathbb{R}(m,n)$, $b \in \mathbb{R}(m,1)$ a existuje $y \in \mathbb{R}(n,1)$ spĺňajúce $A^{\mathrm{T}}Ay = A^{\mathrm{T}}b$, tak pre každé $x \in \mathbb{R}(n,1)$ platí $\nu_2(Ax-b) \geq \nu_2(Ay-b)$.*

Dôkaz. Ak $c \in \mathbb{R}(m,1)$, tak

$$\nu_2(c)^2 = \sum_{i=1}^{m}((c)_{i,1})^2 = \sum_{i=1}^{m}(c^{\mathrm{T}})_{1,i}(c)_{i,1} = (c^{\mathrm{T}}c)_{1,1}.$$

Keďže $\nu_2(Ax-b) \geq 0$, minimalizácia $\nu_2(Ax-b)$ je ekvivalentná minimalizácii $(\nu_2(Ax-b))^2$ a následne minimalizácii $((Ax-b)^{\mathrm{T}}(Ax-b))_{1,1}$.

Ak pre $y \in \mathbb{R}(m,1)$ je $A^{\mathrm{T}}Ay = A^{\mathrm{T}}b$, tak

$$A^{\mathrm{T}}(Ay-b) = O_{n,1} \tag{6.13}$$

$$(Ay-b)^{\mathrm{T}}A = (A^{\mathrm{T}}(Ay-b))^{\mathrm{T}} = O_{1,n}. \tag{6.14}$$

Vezmime teraz ľubovoľné $x \in \mathbb{R}(n,1)$. Na základe (6.13) a (6.14) je

$$\begin{aligned}(Ax-b)^{\mathrm{T}}(Ax-b) &= (A(x-y)+Ay-b)^{\mathrm{T}}(A(x-y)+Ay-b)\\ &= (A(x-y))^{\mathrm{T}}A(x-y) + (x-y)^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(Ay-b)\\ &+ (Ay-b)^{\mathrm{T}}A(x-y) + (Ay-b)^{\mathrm{T}}(Ay-b)\\ &= (A(x-y))^{\mathrm{T}}A(x-y) + (Ay-b)^{\mathrm{T}}(Ay-b),\end{aligned}$$

preto máme

$$\begin{aligned}(\nu_2(Ax-b))^2 &= ((Ax-b)^{\mathrm{T}}(Ax-b))_{1,1}\\ &= ((A(x-y))^{\mathrm{T}}A(x-y))_{1,1} + ((Ay-b)^{\mathrm{T}}(Ay-b))_{1,1}\\ &= (\nu_2(A(x-y)))^2 + (\nu_2(Ay-b))^2 \geq (\nu_2(Ay-b))^2,\end{aligned}$$

odkiaľ už priamo vyplýva

$$\nu_2(Ax-b) \geq \nu_2(Ay-b). \quad \blacksquare$$

Ak existuje matica $y \in \mathbb{R}(n,1)$ z vety 6.3, nazýva sa riešením preurčenej sústavy $Ax = b$ v zmysle *metódy najmenších štvorcov.*

Kapitola 7

Vlastné čísla matíc

Nech $n \in [1, \infty)$ a $A \in \mathbb{C}(n, n)$. Vlastné číslo $\tilde{\lambda}$ matice A je *dominantné*, ak je jednoduché a $|\tilde{\lambda}| > |\lambda|$ pre všetky $\lambda \in \mathfrak{S}(A) - \{\tilde{\lambda}\}$. Dominantné vlastné číslo $\tilde{\lambda}$ matice A je možné aproximovať *mocninnou metódou*, ktorú si teraz priblížime.

7.1 Mocninná metóda

Nech $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=1}^{n}(\lambda_j)$ je úplná postupnosť vlastných čísel matice A, v ktorej λ_1 je dominantné vlastné číslo. Ak $n \in [2, \infty)$ (prípad $n = 1$ je triviálny), tak $\lambda_1 \neq 0$. Nasledujúce úvahy budeme robiť za predpokladu, že existuje báza $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=1}^{n}(x_j)$ komplexného vektorového priestoru $\mathbb{C}(n, 1)$, v ktorej $(x_1)_{1,1} \neq 0$ a x_j je vlastný vektor prislúchajúci k vlastnému číslu λ_j pre každé $j \in [1, n]$.

Vyberme maticu $y \in \mathbb{C}(n, 1) - \{O_{n,1}\}$ a položme

$$y^{(l)} := A^l y, \; l \in [1, \infty).$$

Podľa horeuvedeného predpokladu existuje jediná postupnosť $\mathop{\boldsymbol{\Gamma}}_{j=1}^{n}(c_j) \in \mathbb{C}^n$, pre ktorú $y = \sum_{k=1}^{n} c_k x_k$. Nech matice $B \in \mathbb{C}(n, n)$ a $c \in \mathbb{C}(n, 1)$ majú prvky

$$\begin{aligned} (B)_{j,k} &:= (x_j)_{k,1}, \\ (c)_{j,1} &:= c_j \end{aligned}$$

pre $j, k \in [1, n]$. Pretože pre všetky $j \in [1, n]$ je

$$(y)_{j,1} = \sum_{k=1}^{n} c_k (x_k)_{j,1} = \sum_{k=1}^{n} (B^{\mathrm{T}})_{j,k} (c)_{k,1} = (B^{\mathrm{T}} c)_{j,1},$$

máme $y = B^{\mathrm{T}}c$. Sústava $B^{\mathrm{T}}x = y$ má jediné riešenie c, teda matica B^{T} je regulárna, $c = (B^{\mathrm{T}})^{-1}y$ a žiadny riadok matice $(B^{\mathrm{T}})^{-1}$ nie je nulový.

V ďalšom budeme ešte navyše predpokladať, že $c_1 \neq 0$. Ak je totiž $c_1 = 0$, vieme nájsť maticu $\tilde{y} \in \mathbb{C}(n,1)$ líšiacu sa od y iba v jednom prvku, pre ktorú matica $\tilde{c} := (B^{\mathrm{T}})^{-1}\tilde{y}$ spĺňa $(\tilde{c})_{1,1} \neq 0$. Konkrétne, ak je

$$c_1 = (c)_{1,1} = \sum_{j=1}^{n}((B^{\mathrm{T}})^{-1})_{1,j}(y)_{j,1} = 0, \tag{7.1}$$

pre $k \in [1,n]$ platí $((B^{\mathrm{T}})^{-1})_{1,k} \neq 0$, $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ a matica $\tilde{y} \in \mathbb{C}(n,1)$ má prvky

$$(\tilde{y})_{j,1} := (y)_{j,1} + \alpha\delta_{j,k},\ j \in [1,n],$$

tak na základe (7.1) dostávame

$$(\tilde{c})_{1,1} = \sum_{j=1}^{n}((B^{\mathrm{T}})^{-1})_{1,j}((y)_{j,1} + \alpha\delta_{j,k}) = \alpha((B^{\mathrm{T}})^{-1})_{1,k} \neq 0.$$

Pre každé $j \in [1,n]$ máme $Ax_j = \lambda_j x_j$. Matematickou indukciou vzhľadom na l dokážeme, že

$$\forall l \in [1,\infty)\ A^l x_j = \lambda_j^l x_j.$$

Tvrdenie je zrejmé pre $l = 1$. Ak $l \in [1,\infty)$ a $A^l x_j = \lambda_j^l x_j$, tak

$$A^{l+1}y_j = A(A^l y_j) = A(\lambda_j^l y_j) = \lambda_j^l A y_j = \lambda_j^l \lambda_j y_j = \lambda_j^{l+1} y_j.$$

Preto je tiež

$$y^{(l)} = A^l y = A^l \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j A^l x_j = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^l x_j$$

a následne

$$(y^{(l)})_{1,1} = \lambda_1^l \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^l (x_j)_{1,1}. \tag{7.2}$$

Z definície dominantného vlastného čísla vyplýva, že

$$\mu := \max\left(\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| : j \in [2,n]\right) \in \langle 0,1),$$

a tak

$$\left|\sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^l (x_j)_{1,1}\right| \leq \sum_{j=2}^{n} |c_j||(x_j)_{1,1}| \left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right|^l \leq \left(\sum_{j=2}^{n} |c_j||(x_j)_{1,1}|\right)\mu^l.$$

V dôsledku toho, že $\lim_{l\to\infty} \mu^l = 0$, máme

$$\lim_{l\to\infty} \left| \sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^l (x_j)_{1,1} \right| = 0 = \lim_{l\to\infty} \sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^l (x_j)_{1,1}. \tag{7.3}$$

Okrem toho, na základe našich predpokladov je

$$c_1(x_1)_{1,1} \neq 0, \tag{7.4}$$

preto existuje také $l_1 \in [1, \infty)$, že

$$\forall l \in [l_1, \infty) \quad \left| \sum_{j=2}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^l (x_j)_{1,1} \right| < |c_1(x_1)_{1,1}|.$$

To má za následok

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^l (x_j)_{1,1} \neq 0,$$

a taktiež, vezmúc do úvahy (7.2), $(y^{(l)})_{1,1} \neq 0$. S ohľadom na (7.2)–(7.4) potom platí

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{l\to\infty \\ l\in[l_1,\infty)}} \frac{(y^{(l+1)})_{1,1}}{(y^{(l)})_{1,1}} &= \lim_{\substack{l\to\infty \\ l\in[l_1,\infty)}} \frac{\lambda_1^{l+1} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{l+1} (x_j)_{1,1}}{\lambda_1^{l} \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{l} (x_j)_{1,1}} \\
&= \lambda_1 \lim_{\substack{l\to\infty \\ l\in[l_1,\infty)}} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{l+1} (x_j)_{1,1}}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^{l} (x_j)_{1,1}} = \lambda_1 \frac{c_1(x_1)_{1,1}}{c_1(x_1)_{1,1}} = \lambda_1.
\end{aligned}$$

Ak postupnosť $\left\{\frac{(y^{(l+1)})_{1,1}}{(y^{(l)})_{1,1}}\right\}$, ktorá je zostavená z korektne definovaných podielov, nejaví konvergenčnú tendenciu, môžeme výpočty zopakovať s tým, že miesto matice y vezmeme maticu $\tilde{y}$, ktorá sa od y líši v práve jednom prvku.

V pozitívnom prípade (ak sa konvergenčná tendencia prejavuje) je možné konvergenciu urýchliť tým, že sa podiely $\frac{(y^{(l+1)})_{1,1}}{(y^{(l)})_{1,1}}$ počítajú špeciálne pre $l = 2^m$, $m \in [0, \infty)$. V postupnosti $\{A^{2^m}\}_{m=0}^{\infty}$ je

$$\forall p \in [0, \infty) \; A^{2^{p+1}} = (A^{2^p})^2,$$

maticu A^{2^m} teda vieme získať z matice A pomocou m násobení matice z $\mathbb{C}(n, n)$ s (tou istou) maticou z $\mathbb{C}(n, n)$.

7.2 Symetrické matice

Je známe, že ak matica $A \in \mathbb{R}(n,n)$ je symetrická, tak všetky jej vlastné čísla sú reálne. Ak matica A je symetrická a matica P je ortogonálna, tak aj matica $PAP^{-1} = PAP^{\mathrm{T}}$, ktorá má to isté spektrum ako má matica A, je symetrická, lebo

$$(PAP^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (P^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}} P^{\mathrm{T}} = PAP^{\mathrm{T}}.$$

Príkladom ortogonálnej matice je matica $R^{(n)}_{p,q}(\varphi) \in \mathbb{R}(n,n)$, $p,q \in [1,n]$, $p \neq q$, $\varphi \in \mathbb{R}$, ktorá má prvky

$$\begin{aligned}
&(R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{p,p} := \cos\varphi, && (R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{p,q} := \sin\varphi,\\
&(R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{q,p} := -\sin\varphi, && (R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{q,q} := \cos\varphi,\\
&(R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{i,j} := \delta_{i,j}, && (i,j) \in [1,n]^2 - \{(p,p),(p,q),(q,p),(q,q)\},
\end{aligned}$$

lebo sa ľahko overí nasledovné:

$$\begin{aligned}
(R^{(n)}_{p,q}(\varphi))^{\mathrm{T}} &= R^{(n)}_{p,q}(-\varphi),\\
(R^{(n)}_{p,q}(\varphi))R^{(n)}_{p,q}(-\varphi) &= I_n.
\end{aligned}$$

Podobnostná transformácia prostredníctvom ortogonálnej matice $(R^{(n)}_{p,q}(\varphi))^{\mathrm{T}}$ má tú výhodu, že matica $C := R^{(n)}_{p,q}(-\varphi)AR^{(n)}_{p,q}(\varphi)$ sa určí veľmi jednoducho vo dvoch krokoch.

V prvom kroku vypočítame maticu $B := AR^{(n)}_{p,q}(\varphi)$. Pre $j \in [1,n] - \{p,q\}$ platí

$$(B)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} (R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k}\delta_{k,j} = (A)_{i,j}$$

a ďalej

$$\begin{aligned}
(B)_{i,p} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} (R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{k,p} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq p,q}}^{n} (A)_{i,k}\delta_{k,p} + (A)_{i,p}\cos\varphi - (A)_{i,q}\sin\varphi\\
&= (A)_{i,p}\cos\varphi - (A)_{i,q}\sin\varphi, \qquad (7.5)\\
(B)_{i,q} &= \sum_{k=1}^{n} (A)_{i,k} (R^{(n)}_{p,q}(\varphi))_{k,q} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq p,q}}^{n} (A)_{i,k}\delta_{k,p} + (A)_{i,p}\sin\varphi + (A)_{i,q}\cos\varphi\\
&= (A)_{i,p}\sin\varphi + (A)_{i,q}\cos\varphi. \qquad (7.6)
\end{aligned}$$

V druhom kroku už dostaneme maticu $C = R^{(n)}_{p,q}(-\varphi)B$. Pre $i \in [1, n] - \{p, q\}$ máme

$$(C)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (R^{(n)}_{p,q}(-\varphi))_{i,k}(B)_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}(B)_{k,j} = (B)_{i,j},$$

zatiaľ čo

$$\begin{aligned}
(C)_{p,j} &= \sum_{k=1}^{n} (R^{(n)}_{p,q}(-\varphi))_{p,k}(B)_{k,j} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq p,q}}^{n} \delta_{p,k}(B)_{k,j} + \cos(-\varphi)(B)_{p,j} + \sin(-\varphi)(B)_{q,j} \\
&= \cos\varphi(B)_{p,j} - \sin\varphi(B)_{q,j}, \qquad (7.7) \\
(C)_{q,j} &= \sum_{k=1}^{n} (R^{(n)}_{p,q}(-\varphi))_{q,k}(B)_{k,j} \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq p,q}}^{n} \delta_{q,k}(B)_{k,j} - \sin(-\varphi)(B)_{p,j} + \cos(-\varphi)(B)_{q,j} \\
&= \sin\varphi(B)_{p,j} + \cos\varphi(B)_{q,j}. \qquad (7.8)
\end{aligned}$$

Nech $n \in [1, \infty)$ a $A \in \mathbb{R}(n, n)$ je symetrická matica. *Jacobiho metóda* je rekurentný postup, ktorým sa vytvára postupnosť symetrických matíc $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in (\mathbb{R}(n, n))^{[1,\infty)}$ podobných s maticou A, v ktorej $A_1 := A$.

Predpokladajme, že $k \in [1, \infty)$ a maticu A_k už poznáme. Ak matica A_k je diagonálna, multimnožina jej diagonálnych prvkov je totožná s multimnožinou jej vlastných čísel. V takom prípade môžeme metódu nechať „zamrznúť“ tým, že položíme $A_{k+1} := A_k$.

Ak matica A_k nie je diagonálna, vyberme $p \in [1, n - 1]$ a $q \in [p + 1, n]$ tak, aby

$$|(A_k)_{p,q}| = \max(|(A_k)_{i,j}| : i \in [1, n - 1], j \in [i + 1, n]).$$

Ukazuje sa, že vhodnou voľbou argumentu φ je možné dosiahnuť, aby pre maticu

$$A_{k+1} := R^{(n)}_{p,q}(-\varphi)A_k R^{(n)}_{p,q}(\varphi)$$

bolo $(A_{k+1})_{p,q} = 0$. Na základe toho, že matica A_k je symetrická, podľa (7.6) a (7.7) pre $(A_{k+1})_{p,q}$ dostávame vyjadrenie

$$\begin{aligned}
&\cos\varphi((A_k)_{p,p}\sin\varphi + (A_k)_{p,q}\cos\varphi) - \sin\varphi((A_k)_{q,p}\sin\varphi + (A_k)_{q,q}\cos\varphi)\\
=&\sin\varphi\cos\varphi((A_k)_{p,p} - (A_k)_{q,q}) + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)(A_k)_{p,q}\\
=&\frac{1}{2}\sin(2\varphi)((A_k)_{p,p} - (A_k)_{q,q}) + \cos(2\varphi)(A_k)_{p,q}.
\end{aligned}$$

Preto postačujúcou podmienkou na to, aby prvok $(A_{k+1})_{p,q}$ bol nulový, je

$$\operatorname{cotg}(2\varphi) = \frac{\cos(2\varphi)}{\sin(2\varphi)} = \frac{(A_k)_{q,q} - (A_k)_{p,p}}{2(A_k)_{p,q}}. \tag{7.9}$$

Vďaka tomu, že

$$\left\{\operatorname{cotg}\alpha : \alpha \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle - \{0\}\right\} = \mathbb{R},$$

argument φ spĺňajúci (7.9) existuje a navyše je možné vybrať ho z množiny $\langle -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\rangle - \{0\}$.

Dá sa dokázať, že za pomerne dosť všeobecných podmienok je postupnosť $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná a $\lim_{k\to\infty} A_k$ je diagonálna matica, ktorej diagonálne prvky sú vlastné čísla matice A.

Literatúra

[1] I. S. Berezin, N. P. Židkov. *Metody vyčislenij I, II.* Nauka, Moskva, 1966.

[2] G. Dahlquist, Å. Björck. *Numerical Methods.* Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, 1974 (obnovené vydanie Dover Publications, Mineola, 2003).

[3] B. P. Děmidovič, I. A. Maron. *Základy numerické matematiky.* Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1966.

[4] M. Fiedler. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice.* SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1981.

[5] J. Legras. *Metódy a použitie numerickej matematiky.* Alfa, Bratislava, 1978.

[6] G. I. Marčuk. *Metody numerické matematiky.* Academia, Praha, 1987.

[7] M. Nekvinda, J. Šrubař, J. Vild. *Úvod do numerické matematiky.* SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1976.

[8] A. Ralston. *Základy numerické matematiky.* Academia, Praha, 1973.

[9] M. Vlach. *Základní numerické metody.* SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha, 1971.

[10] J. Zítko. *Úvod do numerické matematiky I, II.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1977.

Register