MSTs súťaž - ako identifikovať tvorivých žiakov cez matematickú súťaž v triede

Ingrid Semanišinová

Ústav matematických vied,
Prírodovedecká fakulta, Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, Košice

Klub učiteľov matematiky, október 2017

Tvorivosť

Tvorivosť

Komponenty tvorivosti (podľa Torrance, 1974):

- fluencia
- originalita
- elaborácia
- flexibilita

Možnosti rozvíjania flexibility v triede

- Modifikácia úlohy (napríklad: zmena vstupných podmienok, čo bolo zadané je neznáme a naopak, ...).
- Rôzne úlohy, ktorých riešenie vedie k jednému matematickému modelu.
- Úloha má viacero možných riešení (napríklad: nájdite kváder, ktorý má objem 12 cm^3).
- Viacero stratégií riešenia jednej úlohy - MSTs úlohy.

MSTs úlohy (Multiple Solution Tasks)

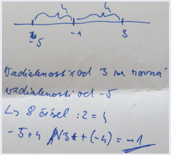
MSTs úloha

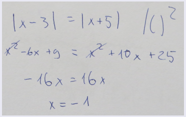
Úloha, v ktorej učiteľ explicitne požaduje, aby ju žiak vyriešil viacerými spôsobmi.

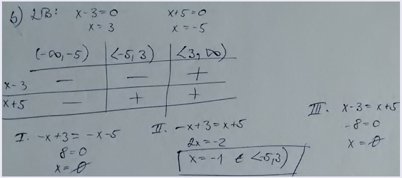
Čo myslíme pod viacerými spôsobmi riešenia:

Riešte rovnicu s absolútnou hodnotou: $|x-3| = |x+5|$.

Riešenie 1 **Riešenie 2** **Riešenie 3**







MSTs úlohy (Multiple Solution Tasks)

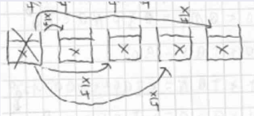
Čo myslíme pod viacerými spôsobmi riešenia:

Veronika vyrába jahodový džem a dodáva ho do niekoľkých cukrární. Na prevoz džemu do cukrární používa veľké zaváraninové fľaše. Po uvarení 80 litrov džemu ho rozdelila rovnomerne do fliaš. Neskôr sa rozhodla, že ušetrí 4 zaváraninové fľaše a džem z týchto fliaš rovnomerne rozdelila do ostatných fliaš. Zistila, že do každej fľaše pridala presne $\frac{1}{4}$ pôvodného objemu. Koľko zaváraninových fliaš použila na začiatku?

Riešenie 1

Do každej pridala štvrtinu pôvodného objemu, teda to je aj štvrtina z fliaš z ktorých džem prelievala. Teda z jednej fľaše doplnila džem do štyroch ďalších a ušetrila štyri fľaše, takže džem doplnila do $4 \cdot 4 = 16$ fliaš, teda na začiatku mala $(16 + 4) = 20$ fliaš.

Riešenie 2



Riešenie 3

$\frac{1}{4}$ objemu je $\frac{1}{5}$ nového objemu, teda 4 fľaše tvoria $\frac{1}{5}$ všetkých fliaš, z čoho vidíme, že na začiatku bolo 20 fliaš.

MSTs úlohy

Rozdiely medzi riešeniami

Dve riešenia budeme považovať za rozdielne ak žiaci použijú rôzne:

- reprezentácie matematickej situácie, matematického pojmu
- vlastnosti matematických objektov (definície, vety) v rámci jedného tematického celku
- vlastnosti matematických objektov (definície, vety) z rôznych tematických celkov

MSTs úlohy (Multiple Solution Tasks)

MSTs úloha

Úloha, v ktorej učiteľ explicitne požaduje, aby ju žiak vyriešil viacerými spôsobmi.

Argumenty proti:

- Nie je na to dostatok času.
- Ak si ukážeme viacero spôsobov, tak sa to bude žiakom pliesť.
- Musím žiakom ponúknuť bezpečnú cestu ako úlohu daného typu vyriešiť.
- Žiaci nechcú úlohu riešiť viacerými spôsobmi.

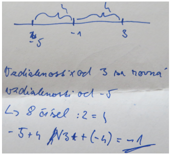
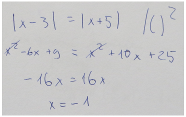
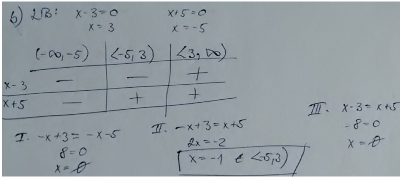
MSTs súťaž

- Trieda sa rozdelí na skupiny. V jednej skupine sú 3 alebo 4 žiaci.
- Každá skupina rieši zadané úlohy (spolu 4 až 6 úloh).
- Na úvod dostane každá skupina 2 úlohy. Po uplynutí cca 10 minút dostanete ďalšiu úlohu, resp. dve úlohy. Po uplynutí ďalších cca 10 minút od začiatku súťaže bude k dispozícii posledná úloha, resp. posledné dve úlohy.
- Každú úlohu skúste vyriešiť viacerými možnými spôsobmi. Jedno z riešení na papieri vyberte a viditeľne označte. (Označené riešenie sa bude rátať do celkového hodnotenia.)
- Súťaž trvá 35 minút. Vyhodnotenie prebieha na ďalšej vyučovacej hodine.
- Za správne riešenie úlohy získate: 1 bod + „počet skupín" – „počet skupín, ktoré odovzdali rovnaké riešenie".
- „Rovnakosť" metódy riešenia posudzuje učiteľ.
- Súčet bodov za všetky úlohy je bodový zisk skupiny.
- Skupina, ktorá získa najviac bodov vyhráva.

Príklad hodnotenia skupín

Absolute value equation

Riešte rovnicu s absolútnou hodnotou: $|x-3| = |x+5|$.

1 skupina	2 skupiny	3 skupiny
		
$1+6-1=6$ bodov	$1+6-2=5$ bodov	$1+6-3=4$ body

Do hodnotenia môžeme zapojiť žiakov, ktorí počas vyhodnotenia pri každej úlohe hlasujú o najzaujímavejšie riešenie. Skupina (skupiny), ktorej riešenie získa najviac hlasov, dostane 1 bod navyše.

MSTs súťaž - úlohy

Trojuholník

V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku je základňa dlhá 10 cm. Vypočítajte jeho obsah.

Bicyklisti

Dvaja bicyklisti sa pretekali okolo futbalového ihriska. Prvý išiel priemernou rýchlosťou 18 km/h a druhý 21 km/h. Druhý bicyklista vyštartoval až vtedy, keď prvý prešiel 300 m. Preteky skončili po prejdení šiestich okruhov. Aký dlhý bol jeden okruh, keď do cieľa prišli súčasne?

MSTs súťaž - úlohy

Rozdelenie detí

Štyri deti: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícii dve odlišné izby (jednu na prízemí a ďalšiu na poschodí). Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti?
(Napríklad: Anka, Beáta a Daniel budú spať v izbe na prízemí a Cyril v izbe na poschodí. V každej izbe je dostatok postelí.)

Šesťuholník

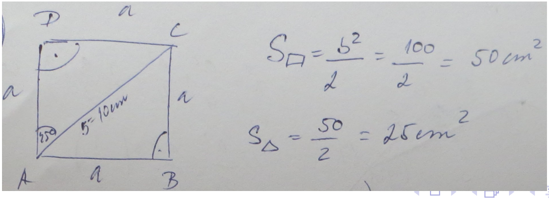
Stredy strán pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ sme označili postupne K, L, M, N, O, P a pospájali ich v tomto poradí. Aký je pomer obsahov šesťuholníkov $ABCDEF$ a $KLMNOP$?

Trojuholník - stratégie riešenia

V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku je základňa dlhá 10 cm. Vypočítajte jeho obsah.

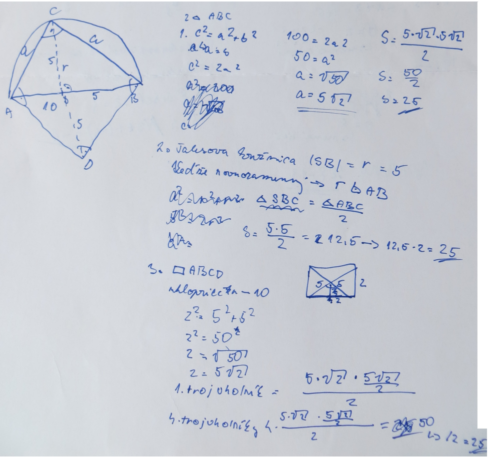
Stratégie riešenia

1. Dopočítanie odvesien s využitím **Pytagorovej vety**
2. Dopočítanie odvesien s využitím **goniometrických funkcií**
3. Dopočítanie **výšky trojuholníka** s využitím goniometrických funkcií
4. Dokreslenie **štvorca** (pozri obrázok)
5. Využitie **Talesovej vety**



Trojuholník - stratégie riešenia

V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku je základňa dlhá 10 cm. Vypočítajte jeho obsah.



Bicyklisti- stratégie riešenia

Dvaja bicyklisti sa pretekali okolo futbalového ihriska. Prvý išiel priemernou rýchlosťou 18 km/h a druhý 21 km/h. Druhý bicyklista vyštartoval až vtedy, keď prvý prešiel 300 m. Preteky skončili po prejdení šiestich okruhov. Aký dlhý bol jeden okruh, keď do cieľa prišli súčasne?

Stratégie riešenia

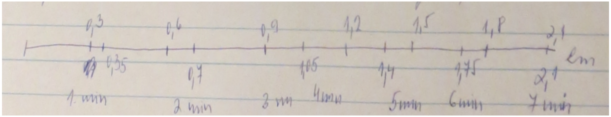
1. **Porovnávanie vzdialeností:**
   - $18t + 0,3 = 21t, x = \frac{21t}{6}$, kde t je čas odkedy sú obaja cyklisti na dráhe a x je dĺžka jedného okruhu.
   - $18t = 21(t - \frac{0,3}{18}), x = \frac{18t}{6}$, kde t je čas odkedy preteká prvý cyklista a x je dĺžka jedného okruhu.
2. **Porovnávanie časov:** $\frac{6x - 300}{18} = \frac{6x}{21}$, kde x je dĺžka jedného okruhu.

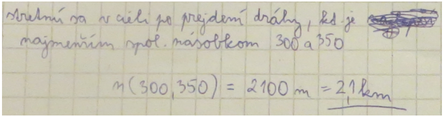
Bicyklisti- stratégie riešenia

Dvaja bicyklisti sa pretekali okolo futbalového ihriska. Prvý išiel priemernou rýchlosťou 18 km/h a druhý 21 km/h. Druhý bicyklista vyštartoval až vtedy, keď prvý prešiel 300 m. Preteky skončili po prejdení šiestich okruhov. Aký dlhý bol jeden okruh, keď do cieľa prišli súčasne?

Stratégie riešenia

3. **Obrázok a výpočet nsn** - obrázok hral kľúčovú úlohu pri riešení úlohy





Bicyklisti- stratégie riešenia

Dvaja bicyklisti sa pretekali okolo futbalového ihriska. Prvý išiel priemernou rýchlosťou 18 km/h a druhý 21 km/h. Druhý bicyklista vyštartoval až vtedy, keď prvý prešiel 300 m. Preteky skončili po prejdení šiestich okruhov. Aký dlhý bol jeden okruh, keď do cieľa prišli súčasne?

Stratégie riešenia

3. **Obrázok a výpočet nsn:**
   - $\dfrac{0.3}{18} = \dfrac{1}{60} \Rightarrow$ Rýchlosť prvého cyklistu je 0,3 km/min.
   - Vzdialenosť prejdená druhým cyklistom za minútu je $\dfrac{21}{60} = 0,35$. Rýchlosť druhého cyklistu je 0,35 km/min.
   - Obrázok a zápis $\text{nsn}(300, 350) = 2100$ m
   - $\dfrac{2100}{6} = 350$ m. **Jeden okruh je dlhý 350 m**.

Bicyklisti- stratégie riešenia

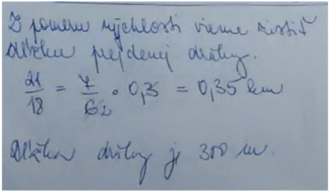
Dvaja bicyklisti sa pretekali okolo futbalového ihriska. Prvý išiel priemernou rýchlosťou 18 km/h a druhý 21 km/h. Druhý bicyklista vyštartoval až vtedy, keď prvý prešiel 300 m. Preteky skončili po prejdení šiestich okruhov. Aký dlhý bol jeden okruh, keď do cieľa prišli súčasne?

Stratégie riešenia

4. **Nesprávne riešenie:**

$$\frac{21}{18} \cdot 0,3 = \frac{7}{6} \cdot 0,3 = 0,35\text{m}.$$

Jeden okruh je dlhý 350 m.

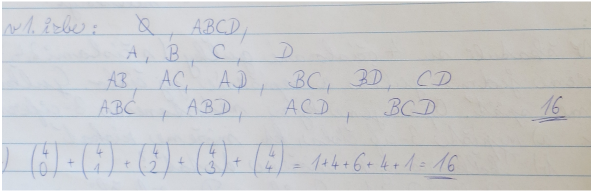


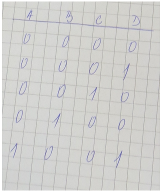
Rozdelenie detí - stratégie riešenia

Štyri deti: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícii dve odlišné izby (jednu na prízemí a ďalšiu na poschodí). Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti?
(Napríklad: Anka, Beáta a Daniel budú spať v izbe na prízemí a Cyril v izbe na poschodí. V každej izbe je dostatok posteľí.)

Stratégie riešenia

1. **Vypísanie možností**



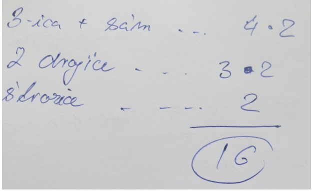


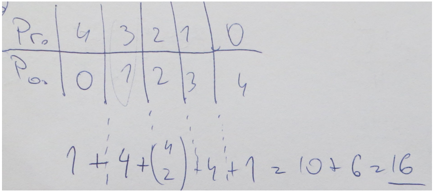
Rozdelenie detí - stratégie riešenia

Štyri deti: Anka, Beáta, Cyril a Daniel šli nocovať k starej mame. Majú k dispozícii dve odlišné izby (jednu na prízemí a ďalšiu na poschodí). Koľkými rôznymi spôsobmi môže rozmiestniť stará mama deti?
(Napríklad: Anka, Beáta a Daniel budú spať v izbe na prízemí a Cyril v izbe na poschodí. V každej izbe je dostatok postelí.)

Stratégie riešenia

2. **Tri prípady**
3. **Podmnožiny**





Šesťuholník - stratégie riešenia

Stredy strán pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ sme označili postupne K, L, M, N, O, P a pospájali ich v tomto poradí. Aký je pomer obsahov šesťuholníkov $ABCDEF$ a $KLMNOP$?

Stratégie riešenia

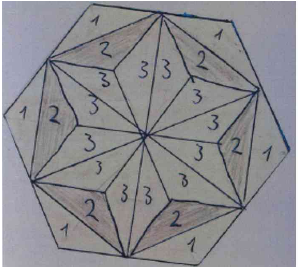
1. Rozdelenie oboch šesťuholníkov na 6 rovnostranných trojuholníkov, dopočítanie výšok trojuholníkov s využitím Pytagorovej vety. Výpočet obsahov šesťuholníkov a hľadaného pomeru.
2. Rozdelenie oboch šesťuholníkov na 6 rovnostranných trojuholníkov, dopočítanie výšok trojuholníkov s využitím goniometrických funkcií. Výpočet obsahov šesťuholníkov a hľadaného pomeru.
3. Obsah šesťuholníkov je v rovnakom pomere ako obsah im opísaných kružníc.

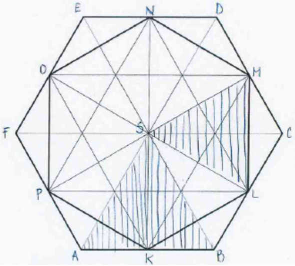
Šesťuholník - stratégie riešenia

Stredy strán pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$ sme označili postupne K, L, M, N, O, P a pospájali ich v tomto poradí. Aký je pomer obsahov šesťuholníkov $ABCDEF$ a $KLMNOP$?

Stratégie riešenia

4. Rozdelenie šesťuholníkov na zhodné trojuholníky (pozri obrázok).





Aké úlohy vyberať do súťaže

Štandardné úlohy

Vhodné pre priemernú triedu.

- Žiaci, ktorí vždy riešia úlohy štandardne, zmenia svoj prístup.
- Väčšina skupín nájde aspoň dve rôzne stratégie riešenia.
- Silné skupiny často nájdu neštandardné riešenie.
- Môžu sa prejaviť niektoré miskoncepcie, formálne porozumenie pojmom, vlastnostiam, metódam riešenia.
- Môže sa prejaviť preferovaný kognitívny štýl žiaka (vizuálny - žiak si kreslí k úlohe obrázok, analytický, harmonický).
- Kontrola výsledku riešenia - dva rôzne postupy, dva rôzne výsledky - pohľad späť a snaha žiakov o nájdenie chyby.

Aké úlohy vyberať do súťaže

Neštandardné úlohy

Vhodné skôr pre nadpriemernú triedu - maximálne 1 až 2 také úlohy. Učiteľ by mal poznať aspoň 1 efektívnu stratégiu riešenia úlohy.

- Niektoré skupiny úlohu vôbec nevyriešia.
- Skupiny zvyčajne nájdu len jedno riešenie.
- Riešenia rôznych skupín sa líšia.
- Počas vyhodnotenia sú pozitívne reakcie žiakov na efektívne riešenie.

Realizácia na vyučovacej hodine

Možnosť 1

Súťaž zaradíme na koniec tematického celku - vytvorenie prepojení v rámci tematického celku a tiež s inými tematickými celkami.

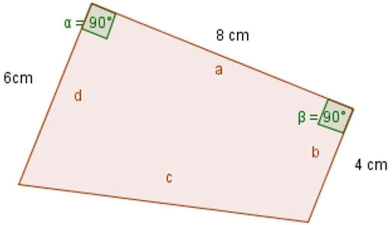
Úloha: Riešte kvadratickú nerovnicu: $x^2 > 4x$

Možnosť 2

Súťaž bude dlhodobá. Učiteľ zaradí na vybratej vyučovacej hodine jednu MSTs úlohu. Na konci istého obdobia vyhodnotí súťaž.

Realizácia na vyučovacej hodine

Vhodným zdrojom úloh sú niektoré úlohy Pytagoriády, ktoré majú zvyčajne jeden efektívny spôsob riešenia.
Napríklad: Vypočítajte obsah útvaru na obrázku:



Na základnej škole môžeme na začiatku zaradiť úlohy, ktoré majú viacero možných výsledkov riešenia, namiesto hľadania rôznych stratégií riešenia.
Napríklad: Do štvorcovej siete načrtnite trojuholník, ktorý má obsah 4 cm^2.

Ďakujem za pozornosť a otváram diskusiu.

Najbližší Klub učiteľov matematiky bude **6. novembra**
Téma: **Aplikácie ekonomickej a finančnej matematiky**
Prezentujúci: Katarína Lučivjanská