MATEMATICKÁ OLYMPIÁDA
2019/2020

RIEŠENIA ÚLOH
DOMÁCEHO KOLA
KATEGÓRIE Z9

Krajská komisia MO

Košice

Z9-I-1

Zadanie:

Ondro, Matej a Kubo sa vracajú zo zberu orechov, celkovo ich majú 120. Matej sa sťažuje, že Ondro má ako vždy najviac. Otec prikáže Ondrovi, aby prisypal zo svojho Matejovi tak, aby mu počet orechov zdvojnásobil. Teraz sa sťažuje Kubo, že najviac má Matej. Na otcov príkaz prisype Matej Kubovi tak, že mu počet orechov zdvojnásobí. Nato sa hnevá Ondro, že najmenej zo všetkých má teraz on. Kubo teda prisype Ondrovi tak, že mu počet orechov zdvojnásobí. Teraz majú všetci rovnako a konečne je pokoj. Koľko orechov mal pôvodne každý z chlapcov?

Riešenie 1:

Úlohu vyriešime postupným vyplnením tejto tabuľky odzadu.

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok			
Ondro Matejovi			
Matej Kubovi			
Kubo Ondrovi			

Na konci majú všetci rovnako, čiže po tretine z celkového počtu 120:

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok			
Ondro Matejovi			
Matej Kubovi			
Kubo Ondrovi	40	40	40

Predtým, než Ondro dostal od Kuba, mal len polovicu, takže presúvalo sa 20:

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok			
Ondro Matejovi			
Matej Kubovi	20	40	60
Kubo Ondrovi	40	40	40

Predtým, než Kubo dostal od Mateja, mal len polovicu, takže presúvalo sa 30:

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok			
Ondro Matejovi	20	70	30
Matej Kubovi	20	40	60
Kubo Ondrovi	40	40	40

Predtým, než Matej dostal od Ondra, mal len polovicu, takže presúvalo sa 35:

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok	55	35	30
Ondro Matejovi	20	70	30
Matej Kubovi	20	40	60
Kubo Ondrovi	40	40	40

Na začiatku teda mal Ondro 55, Matej 35 a Kubo 30 orechov.

Riešenie 2:

Označme počty orechov Ondra, Mateja a Kuba postupne x, y, z. Podľa zadania vyplňme túto prehľadovú tabuľku:

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok	x	y	z
Ondro Matejovi	$x-y$	$2y$	z
Matej Kubovi	$x-y$	$2y-z$	$2z$
Kubo Ondrovi	$2(x-y)$	$2y-z$	$2z-(x-y)$

Podľa zadania teda platí $2(x-y) = 2y - z = 2z - (x-y) = \frac{120}{3} = 40$.

Z toho máme $x - y = \frac{40}{2} = 20$, potom $40 = 2z - (x-y) = 2z - 20$, takže $60 = 2z$, a teda $z = 30$.

Potom $40 = 2y - z = 2y - 30$, takže $70 = 2y$, z čoho $y = 35$.

Napokon $20 = x - y = x - 35$, takže $x = 55$.

Po dosadení týchto hodnôt dostávame prehľad celej transakcie:

situácia	Ondro	Matej	Kubo
začiatok	55	35	30
Ondro Matejovi	20	70	30
Matej Kubovi	20	40	60
Kubo Ondrovi	40	40	40

Na začiatku teda mal Ondro 55, Matej 35 a Kubo 30 orechov.

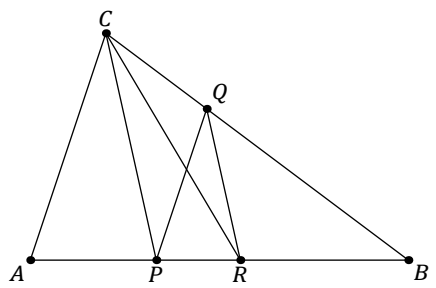
Z9-I-2

Zadanie:

V trojuholníku ABC leží bod P v tretine úsečky AB bližšie k bodu A, bod R je v tretine úsečky PB bližšie k bodu P a bod Q leží na úsečke BC tak, že uhly PCB a RQB sú zhodné. Určte pomer obsahov trojuholníkov ABC a PQC.

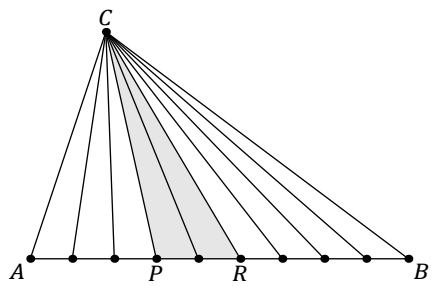
Riešenie 1:

Načrtnime:



Keďže uhly PCB a RQB sú zhodné, priamky CP a RQ sú rovnobežné (vlastnosť súhlasných uhlov). To znamená, že trojuholníky PCQ a PCR majú rovnaké výšky na spoločnú základňu PC, a teda majú aj rovnaký obsah. Stačí sa preto zaoberať obsahom trojuholníka PRC.

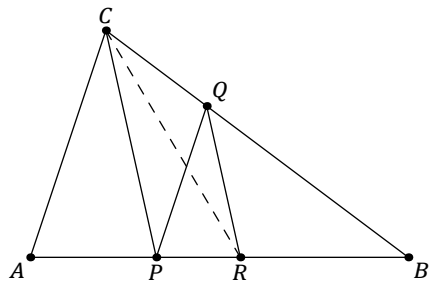
Rozdeľme stranu AB na 9 rovnakých častí a každý deliaci bod spojme s C:



Všetky vzniknuté elementárne trojuholníky majú rovnakú výšku z C a aj rovnako veľké základne, majú teda rovnaké obsahy. Trojuholník PRC je zložený z dvoch takýchto trojuholníkov, jeho obsah, a teda aj obsah PQC, sú preto $\frac{2}{9}$ obsahu ABC. Hľadaný pomer obsahov ABC a PQC je teda $9 : 2$.

Riešenie 2:

Pripomeňme, že trojuholník XYZ má obsah $\frac{1}{2} \cdot |XY| \cdot |Z; XY|$, kde $|Z; XY|$ je vzdialenosť bodu Z od priamky XY.



Keďže uhly PCB a RQB sú zhodné, priamky CP a RQ sú rovnobežné. To znamená, že $|Q; CP| = |R; CP|$. Potom platí:

$$\mathrm{S}(PQC) = \mathrm{S}(PCQ) = \frac{1}{2} \cdot |PC| \cdot |Q; CP| = \frac{1}{2} \cdot |PC| \cdot |R; CP| = \mathrm{S}(PCR) = \mathrm{S}(PRC) = \frac{1}{2} \cdot |PR| \cdot |C; PR| =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot |PR| \cdot |C; AB| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}|PB|\right) \cdot |C; AB| = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}|AB|\right) \cdot |C; AB| = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |C; AB| = \frac{2}{9} \cdot \mathrm{S}(ABC).$$

Hľadaný pomer $\frac{\mathrm{S}(ABC)}{\mathrm{S}(PQC)}$ je teda $\frac{9}{2}$.

Z9-I-3

Zadanie:

Pre ktoré celé čísla x je $\frac{x+11}{x+7}$ celé číslo? Nájdite všetky riešenia.

Riešenie 1:

Najprv si uvedomme, že menovateľ nesmie byť nulový, a teda $x \neq -7$. Keďže

$$\frac{x+11}{x+7} = \frac{(x+7)+4}{x+7} = \frac{x+7}{x+7} + \frac{4}{x+7} = 1 + \frac{4}{x+7},$$

aj číslo $\frac{4}{x+7}$ musí byť celé. Číslo $x + 7$ je teda celočíselným deliteľom čísla 4, takže je to jedno z čísel -4, -2, -1, 1, 2, 4. To však znamená, že číslo x je jedno z čísel -11, -9, -8, -6, -5, -3. Vyhovuje každé z nich:

- $\frac{-11+11}{-11+7} = \frac{0}{-1} = 0$,
- $\frac{-9+11}{-9+7} = \frac{2}{-2} = -1$,
- $\frac{-8+11}{-8+7} = \frac{3}{-1} = -3$,
- $\frac{-6+11}{-6+7} = \frac{5}{1} = 5$,
- $\frac{-5+11}{-5+7} = \frac{6}{2} = 3$,
- $\frac{-3+11}{-3+7} = \frac{8}{4} = 2$.

Riešenie 2:

Najprv si uvedomme, že menovateľ nesmie byť nulový, a teda $x \neq -7$. Keďže

$$\frac{x+11}{x+7} = \frac{(x+7)+4}{x+7} = \frac{x+7}{x+7} + \frac{4}{x+7} = 1 + \frac{4}{x+7},$$

aj číslo $\frac{4}{x+7}$ musí byť celé. Musí teda platiť $-4 \leq x + 7 \leq 4$, čiže $-11 \leq x \leq -3$. Zhrnutím dostávame, že x je jedno z čísel -11, -10, -9, -8, -6, -5, -4, -3. Vyskúšame každé z nich:

- $\frac{-11+11}{-11+7} = \frac{0}{-1} = 0$,
- $\frac{-10+11}{-10+7} = \frac{1}{-3}$, čo nie je celé číslo.
- $\frac{-9+11}{-9+7} = \frac{2}{-2} = -1$,
- $\frac{-8+11}{-8+7} = \frac{3}{-1} = -3$,
- $\frac{-6+11}{-6+7} = \frac{5}{1} = 5$,
- $\frac{-5+11}{-5+7} = \frac{6}{2} = 3$,
- $\frac{-4+11}{-4+7} = \frac{7}{3}$, čo nie je celé číslo.
- $\frac{-3+11}{-3+7} = \frac{8}{4} = 2$.

Zhrnutím dostávame, že vyhovujú práve čísla $-11, -9, -8, -6, -5, -3$.

Z9-I-4

Zadanie:

Maty dopadol padákom na ostrov obývaný dvoma druhmi domorodcov: Poctivcami, ktorí vždy hovoria pravdu, a Klamármi, ktorí vždy klamú. Pred dopadom zahliadol v diaľke prístav, ku ktorému sa mienil dostať. Na prvom rázcestí stretol Maty jedného domorodca a neďaleko videl druhého. Požiadal prvého, aby sa spýtal toho druhého, či je Klamár, alebo Poctivec. Prvý domorodec Matymu vyhovel, šiel sa spýtať, a keď sa vrátil, oznámil Matymu, že druhý domorodec tvrdí, že je Klamár. Potom sa Maty prvého domorodca spýtal, ktorá cesta vedie k prístavu. Ten mu jednu cestu ukázal a ďalej si Matyho nevšímal. Má, alebo nemá Maty domorodcovi veriť? Vedie, alebo nevedie oná cesta k prístavu?

Riešenie 1:

Rozoberme v prehľadnej tabuľke všetky prípady:

prvý domorodec	druhý domorodec	druhý domorodec o sebe	prvý domorodec o druhom
Klamár	Klamár	Poctivec	Klamár
Klamár	Poctivec	Poctivec	Klamár
Poctivec	Klamár	Poctivec	Poctivec
Poctivec	Poctivec	Poctivec	Poctivec

Prvý domorodec o druhom povedal, že je Klamár, nastal teda jeden z prvých dvoch prípadov. To však znamená, že prvý domorodec je Klamár. Maty mu teda nemá veriť a ním ukázaná cesta k prístavu nevedie.

Riešenie 2:

Uvedomme si, že žiaden domorodec o sebe nemôže tvrdiť, že je Klamár. Poctivec by totiž klamal a Klamár by, naopak, povedal pravdu.

To však znamená, že prvý domorodec Matymu klamal. Je to teda Klamár a Maty mu nemá veriť, takže ním ukázaná cesta k prístavu nevedie.

Z9-I-5

Zadanie:

Majka skúmala viacmiestne čísla, v ktorých sa pravidelne striedajú nepárne a párne číslice. Tie, ktorá sa začínajú nepárnou číslicou, nazvala komické a tie, ktoré sa začínají párnou číslicou, nazvala veselé. Majka vytvorila jedno trojmiestne komické a jedno trojmiestne veselé číslo, pričom šesť použitých číslic bolo navzájom rôznych a nebola medzi nimi 0. Súčet týchto dvoch čísel bol 1617. Súčin týchto dvoch čísel sa končil dvojčíslím 40. Určte Majkine čísla a dopočítajte ich súčin.

Riešenie:

Nech je Majkino komické číslo $\overline{abc}$ a veselé $\overline{def}$. Potom sú a, c, e nepárne a b, d, f párne a nenulové.

Keďže ich súčin sa končí na 0, vzhľadom na uvedenú paritu a nenulovosť platí $c = 5$. Súčet čísel sa končí na 7, takže nutne $f = 2$.

Máme teda $\overline{ab5} + \overline{de2} = 1617$, takže $\overline{ab} + \overline{de} = 161$.

Cifra b je párna, nenulová a rôzna od f čiže 2. Je to teda jedna z cifier 4, 6, 8. Rozoberme všetky prípady:

- Nech $b = 4$.

  Číslo $b + e$ sa končí na 1, takže nutne $e = 7$. Dostávame tak $\overline{a4} + \overline{d7} = 161$, takže $a + d = 15$.

  Cifra d je párna, nenulová a rôzna od b aj od f čiže od 4 a od 2. Je to teda jedna z cifier 6, 8. Rozoberme oba prípady:

  - Nech $d = 6$.

    Potom $a = 9$. Dostávame tak trojčíslia 945 a 672. Ich súčet je naozaj 1617 a súčin je 635040, čiže skutočne sa končí na 40.
  - Nech $d = 8$.

    Potom však $a = 7 = e$, čo nie je možné.
- Nech $b = 6$.

  Číslo $b + e$ sa končí na 1, takže nutne $e = 5 = c$, čo nie je možné.
- Nech $b = 8$.

  Číslo $b + e$ sa končí na 1, takže nutne $e = 3$. Dostávame tak $\overline{a8} + \overline{d3} = 161$, takže $a + d = 15$.

  Cifra d je párna, nenulová a rôzna od b aj od f čiže od 8 a od 2. Je to teda jedna z cifier 4, 6. Rozoberme oba prípady:

  - Nech $d = 4$.

    Potom $a = 11$, čo je spor.
  - Nech $d = 6$.

    Potom $a = 9$. Dostávame tak trojčíslia 985 a 632. Ich súčin je však 622520, čo je spor.

Zhrnutím dostávame, že Majkine čísla sú 945 a 672 a ich súčin je 635040.

Z9-I-6

Zadanie:

Kristína zvolila isté nepárne prirodzené číslo deliteľné tromi. Jakub s Dávidom potom skúmali trojuholníky, ktoré majú obvod v milimetroch rovný Kristínou zvolenému číslu a ktorých strany majú dĺžky v milimetroch vyjadrené navzájom rôznymi celými číslami. Jakub našiel taký trojuholník, v ktorom najdlhšia zo strán má najväčšiu možnú dĺžku, a túto hodnotu zapísal na tabuľu. Dávid našiel taký trojuholník, v ktorom najkratšia zo strán má najväčšiu možnú dĺžku, a túto hodnotu tiež zapísal na tabuľu. Kristína obe dĺžky na tabuli správne sčítala a vyšlo jej 1681 mm. Určte, ktoré číslo Kristína zvolila.

Riešenie 1:

Obaja chlapci teda majú rozdeliť Kristínino číslo n na tri kladné celé čísla tak, aby medzi nimi platila trojuholníková nerovnosť, teda aby súčet dvoch najmenších bol väčší ako najväčšie.

Jakubovo najväčšie číslo musí byť menšie ako $\frac{n}{2}$ (napríklad v prípade $n = 15$ by muselo byť menšie než 7,5). Číslo n je nepárne a deliteľné troma, takže $n - 1$ je párne a kladné. Jakubovo číslo teda môže byť najviac $\frac{n-1}{2}$ (v našom prípade $n = 15$ by to teda bolo najviac 7). Táto hodnota vyhovuje, zvyšné dve čísla môžu byť napríklad 2 a $n - \frac{n-1}{2} - 2$ čiže $\frac{n-3}{2}$ (v našom prípade 2 a 6).

Dávidovo najväčšie číslo musí byť menšie ako $\frac{n}{3}$ (v našom prípade 5). Číslo n je nepárne a deliteľné troma, takže $\frac{n}{3}$ je prirodzené a aspoň 2. Dávidovo číslo teda môže byť najviac $\frac{n}{3} - 1$ (v našom prípade 4). Táto hodnota vyhovuje, zvyšné dve môžu (dokonca musia) byť $\frac{n}{3}$ a $\frac{n}{3} + 1$ (v našom prípade 5 a 6).

Súčet čísel oboch chlapcov je podľa zadania 1681 (v našom prípade je to 7+4 čiže 11, takže náš pracovný predpoklad $n = 15$ zrejme platiť nebude). Platí teda:

$$\frac{n-1}{2} + \left(\frac{n}{3} - 1\right) = 1681,$$

$$3(n-1) + 2n - 6 = 6 \cdot 1681,$$

$$3n - 3 + 2n - 6 = 10086\,,$$

$$5n = 10095\,,$$

$$n = 2019.$$

To znamená, že Jakubovo číslo je $\frac{2019-1}{2}$ čiže 1009 (a zvyšné dve strany jeho trojuholníka sú napríklad 2 a 1008), a Dávidovo $\frac{2019}{3} - 1$ čiže 672 (a zvyšné dve strany jeho trojuholníka sú 673 a 674). Ich súčet je naozaj 1681.

Kristínino číslo je 2019.

Riešenie 2:

Označme Kristínino číslo n. Keďže je deliteľné tromi a je nepárne, platí $n = 6k + 3$ pre nejaké nezáporné celé číslo k.

Označme dĺžky strán Jakubovho trojuholníka a, b, c, pričom $a > b > c$ a podľa zadania $a + b + c = 6k + 3$. Podľa trojuholníkovej nerovnosti platí $a < b + c$. Po pričítaní a k oboch stranám rovnice dostávame $2a < a + b + c = 6k + 3$, takže po vydelení číslom 2 máme $a < 3k + \frac{3}{2}$, a teda $a \leq 3k + 1$. Hodnota na pravej strane sa naozaj môže nadobudnúť, a to napríklad vtedy, keď $a = 3k + 1$, $b = 3k$ a $c = 2$. Vtedy totiž naozaj $a > b > c$, platí aj $a + b + c = (3k + 1) + 3k + 2 = 6k + 3 = n$ a tiež trojuholníková nerovnosť $a = 3k + 1 < 3k + 2 = b + c$. Jakub teda na tabuľu napísal číslo $3k + 1$.

Označme dĺžky strán Dávidovho trojuholníka d, e, f, pričom $d > e > f$ a podľa zadania $d + e + f = 6k + 3$. Keďže ide o celé čísla, platí $f + 1 \leq e$ a $e + 1 \leq d$, a teda $f + 2 \leq d$. Potom teda platí

$$6k + 3 = n = d + e + f \geq (f + 2) + (f + 1) + f = 3f + 3,$$

z čoho $6k \geq 3f$, a teda $2k \geq f$. Hodnota na ľavej strane sa naozaj môže nadobudnúť, a to napríklad vtedy, keď $d = 2k+2$, $e = 2k+1$ a $f = 2k$. Vtedy totiž naozaj $d > e > f$, platí aj $d+e+f = (2k+2)+(2k+1)+2k = 6k+3 = n$ a tiež trojuholníková nerovnosť $d = 2k + 2 < 4k + 1 = (2k + 1) + 2k = e + f$. Dávid teda na tabuľu napísal číslo $2k$.

Súčet Jakubovho a Dávidovho čísla je $(3k + 1) + 2k$ a zároveň podľa zadania 1681. Z toho dostávame $1681 = (3k + 1) + 2k = 5k + 1$, takže $1680 = 5k$, a teda $k = 336$. To znamená, že Jakubovo číslo je 1009 (a zvyšné dve strany jeho trojuholníka sú napríklad 1008 a 2), Dávidovo číslo je 672 (a zvyšné dve strany jeho trojuholníka sú 673 a 674), takže ich súčet je naozaj 1681, a Kristínino číslo je 2019.

autor:	**Krajská komisia Matematickej olympiády v Košiciach**
názov:	**Matematická olympiáda 2019/2020**
	Riešenia úloh domáceho kola kategórie Z9
vydavateľ:	Krajská komisia Matematickej olympiády v Košiciach
	Klub učiteľov matematiky pri Ústave matematických vied PF UPJŠ v Košiciach
adresa:	Jesenná 5, 041 54 Košice
www:	http://umv.science.upjs.sk/mo/
verzia:	1.
dátum vydania:	4. 10. 2019
rozsah:	8 strán