Priebeh funkcie

Veta

Ak funkcia f je v bode x_0 neklesajúca (resp. nerastúca) a $f'(x_0)$ existuje, tak $f'(x_0) \geq 0$ (resp. $f'(x_0) \leq 0$).

Dôkaz: urobíme ho pre neklesajúcu funkciu (pre nerastúcu je obdobný). Z predpokladu neklesajúcosti máme, že existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je $f(x) \leq f(x_0)$ a pre všetky $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ je $f(x) \geq f(x_0)$. Potom z toho vyplýva, že $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ pre všetky $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), x \neq x_0$, z čoho limitným prechodom pre $x \to x_0$ dostávame $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, teda $f'(x_0) \geq 0$. □

Dôsledok

Nech f má v x_0 deriváciu. Potom f je v bode x_0 neklesajúca (resp. nerastúca) práve vtedy, keď $f'(x_0) \geq 0$ (resp. $f'(x_0) \leq 0$).

Upozornenie

Ak funkcia f je rastúca v bode x_0 a $f'(x_0)$ existuje, tak $f'(x_0) \geq 0$, ale **nemusí** platiť $f'(x_0) > 0$: $f: \; y = x^3$ je rastúca na $\mathbb{R}$, teda aj v bode 0, ale $f'(0) = 0$.

Definícia

Bod x_0 sa nazýva **stacionárny bod** *funkcie f, ak $f'(x_0) = 0$. x_0 sa nazýva* **kritický bod** *f, ak $f'(x_0) = 0$ alebo $f'(x_0)$ neexistuje.*

Veta

Ak má funkcia f v bode x_0 lokálne minimum alebo maximum a $f'(x_0)$ existuje, tak x_0 je stacionárny bod.

Dôkaz: dokážeme pre prípad minima. Nech f má v x_0 lokálne minimum, t.j. nech existuje $\delta^* > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_0 - \delta^*, x_0 + \delta^*)$ platí $f(x) \geq f(x_0)$. Predpokladajme, že $f'(x_0) \neq 0$; nech najprv $f'(x_0) > 0$. Potom f je rastúca v bode x_0, teda existuje $\delta' > 0$ také, že pre všetky $x \in (x_0 - \delta', x_0)$ je $f(x) < f(x_0)$. Ak vezmeme $\delta = \min\{\delta^*, \delta'\}$, tak pre všetky $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ je súčasne $f(x) \geq f(x_0)$ aj $f(x) < f(x_0)$, čo je spor. Prípad $f'(x_0) < 0$ sa dokáže obdobne; dostávame tak, že $f'(x_0) = 0$, t.j. x_0 je stacionárny bod. □

Funkcia môže teda nadobúdať lokálny extrém (maximum resp. minimum) **iba** v kritickom bode.

Príklad

Zistite, kde rastie, kde klesá a v ktorých bodoch nadobúda extrémy funkcia $f : y = x \ln x$.

Máme $\mathcal{D}(f) = (0, \infty)$; na tejto množine je f spojitá a $f'(x) = 1 + \ln x$. Platí

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1} \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{e}, \infty\right);$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(0, \frac{1}{e}\right).$$

Teda funkcia f je na $(\frac{1}{e}, \infty)$ rastúca, na $(0, \frac{1}{e})$ klesajúca; v bode $x_0 = \frac{1}{e}$ nadobúda lokálne minimum.

Príklad

Nájdite lokálne extrémy funkcie $f : y = (x^2 - 1)^3 + 1$.

Platí $f'(x) = 3 \cdot (x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 6x \cdot (x+1)^2(x-1)^2$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, teda lokálne extrémy môžu byť len v stacionárnych bodoch, teda v $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$. Pretože $f'(x) > 0$ práve vtedy, keď $x > 0$ a $f'(x) < 0$ práve vtedy, keď $x < 0$, je extrém len v bode x_2; v bode x_1 je f klesajúca a v bode x_2 je rastúca.

Veta

Predpokladajme, že funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 a $f'(x_0), f''(x_0)$ existujú. Ak $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), tak f má v bode x_0 lokálne minimum (resp. lokálne maximum).

Dôkaz: dokážeme prvú časť tvrdenia.
Funkcia f'' je v bode x_0 spojitá (lebo f'' má v x_0 deriváciu) a $f''(x_0) > 0$, teda existuje okolie U bodu x_0, v ktorom $f''(x) > 0$. Ak označíme $g = f'$, tak pre všetky $x \in U$ je $g'(x) > 0$, preto funkcia g je na U rastúca.

Nech $x \in U$, $x > x_0$. Podľa Lagrangeovej vety existuje $x_1 \in (x_0, x)$ taký, že $g'(x_1) = \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$. Potom

$$0 < f''(x_1) = g'(x_1) = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(x) - 0}{x - x_0} = \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

Keďže $x > x_0$, musí byť aj $f'(x) > 0$ a potom v x je funkcia f rastúca.

Nech teraz $x \in U$, $x < x_0$. Podľa Lagrangeovej vety existuje $x_2 \in (x, x_0)$ taký, že $g'(x_2) = \dfrac{g(x_0) - g(x)}{x_0 - x}$. Máme

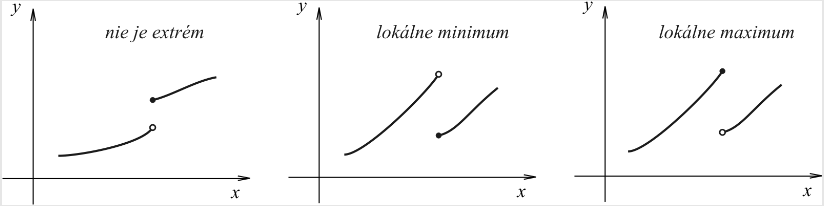
$$0 < f''(x_2) = g'(x_2) = \frac{f'(x_0) - f'(x)}{x_0 - x} = \frac{0 - f'(x)}{x_0 - x} = \frac{-f'(x)}{x_0 - x},$$

z čoho vyplýva (keďže $x < x_0$), že $-f'(x) > 0$, čiže $f'(x) < 0$. To znamená, že funkcia f je v x klesajúca.

Overili sme teda, že naľavo od x_0 je f klesajúca a napravo od x_0 je rastúca, teda že v x_0 je lokálne minimum. □

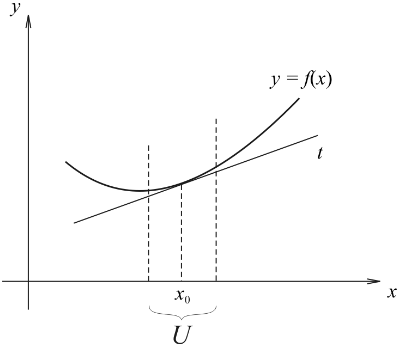
Upozornenie

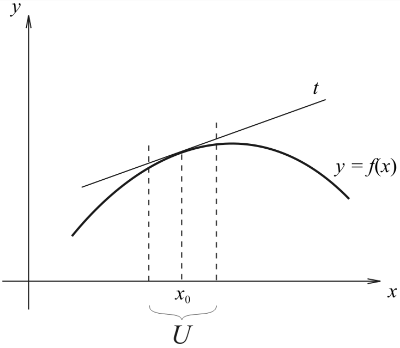
Ak funkcia je v bode x_0 definovaná a spojitá, a naľavo aj napravo od x_0 je rastúca (resp. klesajúca) tak v x_0 nie je extrém; avšak, ak je funkcia v x_0 **nespojitá**, extrém v x_0 môže a nemusí nastať:



Definícia

Nech funkcia f je definovaná v okolí bodu x_0 a má v bode x_0 deriváciu. Potom f sa nazýva **konvexná v bode** x_0*, ak existuje také okolie U bodu x_0, že dotyčnica v bode x_0 je na U* **celá** *(okrem bodu $[x_0, f(x_0)]$)* **pod** *grafom f. Podobne, f sa nazýva* **konkávna v bode** x_0*, ak dotyčnica v bode x_0 je na U* **celá** *(okrem bodu $[x_0, f(x_0)]$)* **nad** *grafom f.*

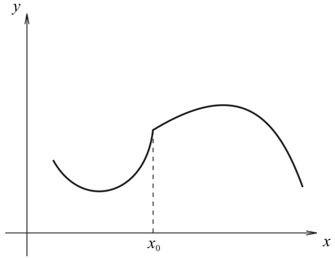




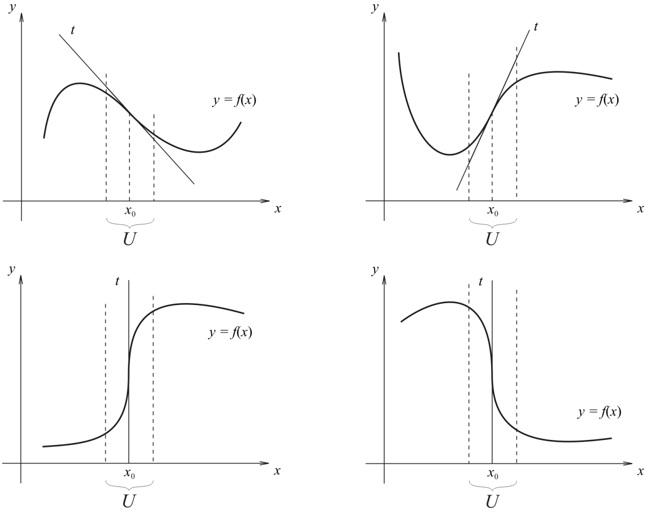
Definícia

Bod x_0 *sa nazýva* **inflexný bod** *funkcie* f, *ak* f *je definovaná v okolí bodu* x_0, *existuje* $f'(x_0)$ *(vlastná alebo nevlastná) a existuje také okolie* U *bodu* x_0, *že pre všetky* $x \in U$, $x < x_0$ *je funkcia* f *konvexná (resp. konkávna) a pre všetky* $x \in U$, $x > x_0$ *je funkcia* f *konkávna (resp. konvexná).*

V definícii inflexného bodu sa vyžaduje, aby v bode x_0 existovala dotyčnica; teda aj keď sa v bode x_0 mení konvexnosť na konkávnosť (resp. naopak), ale v bode x_0 má funkcia "hrot" (t.j. nemá v ňom dotyčnicu), tak takýto bod **nepovažujeme** za inflexný bod.



Príklady inflexných bodov:



Inflexný bod môže byť aj taký bod, v ktorom je derivácia funkcie **nevlastná**.

Veta

Predpokladajme, že funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0 a že funkcia f'' je v bode x_0 spojitá. Ak $f''(x_0) > 0$ (resp. $f''(x_0) < 0$), tak f je v bode x_0 konvexná (resp. konkávna).

Dôkaz: Nech $f''(x_0) > 0$. Vzhľadom na spojitosť f'', existuje okolie U bodu x_0 také, že $f''(x) > 0$ pre všetky $x \in U$. Potom funkcia f' je rastúca na U. Dotyčnica t v x_0 má rovnicu $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Teda k overeniu konvexnosti, t.j. toho, že dotyčnica leží pod grafom f, treba overiť, či pre všetky $x \in U$, $x \neq x_0$ platí

$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) < f(x)\,.$$

Najprv nech $x \in U$, $x > x_0$. Podľa Lagrangeovej vety existuje $x_1 \in (x_0, x)$ také, že $f'(x_1) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Máme $f'(x) > f'(x_1) > f'(x_0)$, teda $f'(x_1) \cdot (x - x_0) > f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (násobíme výrazom $x - x_0 > 0$).

Potom

$$f(x) - f(x_0) > f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,,$$
$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) < f(x)\,.$$

Teraz nech $x \in U$, $x < x_0$. Podľa Lagrangeovej vety existuje $x_2 \in (x, x_0)$, že $f'(x_2) = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$. Znovu z rastúcosti funkcie f' máme $f'(x_0) > f'(x_2) > f(x)$ a po vynásobení $x - x_0 < 0$ dostávame

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) < f'(x_2) \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0)\,,$$
$$f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) < f(x)\,.$$

Tým je tvrdenie dokázané. $\square$

Veta

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu x_0, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ a f''' je spojitá v bode x_0. Potom má f v x_0 inflexný bod.

Dôkaz: budeme predpokladať, že $f'''(x_0) > 0$ (prípad $f'''(x_0) < 0$ sa dokáže analogicky). Zo spojitosti funkcie f''' vyplýva, že existuje okolie U bodu x_0 také, že pre všetky $x \in U$ je $f'''(x) > 0$. Potom funkcia f'' je na U rastúca.

Nech $x \in U$, $x > x_0$. Keďže $0 = f''(x_0) < f''(x)$, je funkcia f' v x rastúca. Podľa Lagrangeovej vety existuje $x_1 \in (x_0, x)$ taký, že $f'(x_1) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Platí $f'(x_0) < f'(x_1) < f'(x)$, teda $f'(x_0) \cdot (x - x_0) < f'(x_1) \cdot (x - x_0) = f(x) - f(x_0)$. Potom

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)\,,$$

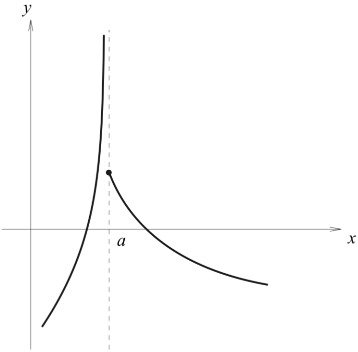
čiže napravo od x_0 je dotyčnica pod grafom funkcie f.

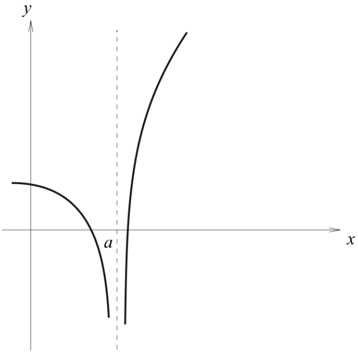
Nech $x \in U$, $x < x_0$. Potom $f''(x) < f''(x_0) = 0$, je f' v x_0 klesajúca. Podľa Lagrangeovej vety existuje $x_2 \in (x, x_0)$ také, že $f'(x_2) = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$. Platí $f'(x_2) > f'(x) > f(x_0)$, $f'(x_2) \cdot (x_0 - x) > f'(x_0) \cdot (x_0 - x)$, čiže $f(x_0) - f(x) > f'(x_0) \cdot (x_0 - x)$. Potom $f(x) < f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, čiže naľavo od x_0 je dotyčnica nad grafom funkcie f.
Preto f má v x_0 inflexný bod. $\square$

Definícia

Priamka $x = a$ sa nazýva **asymptota bez smernice** *grafu funkcie f, ak f má v bode a nevlastnú limitu sprava alebo zľava.*

Ak $x = a$ je asymptota bez smernice, tak hodnota $f(a)$ môže a nemusí byť definovaná.

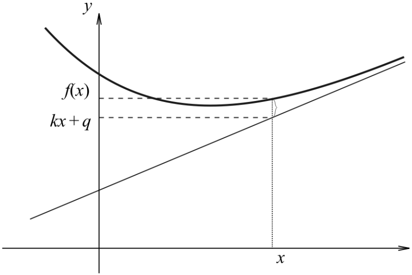




Definícia

Nech funkcia f je definovaná na intervale (a, ∞) (resp. $-\infty, a)$) pre nejaké $a \in \mathbb{R}$. Priamka $y = kx + q$ sa nazýva **asymptota so smernicou** *grafu funkcie f pre $x \to \infty$ (resp. $x \to -\infty$), ak $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + q)) = 0$).*

Ak pre definičný obor f platí $\mathcal{D}(f) \subseteq (-\infty, a)$ pre nejaké $a \in \mathbb{R}$, tak funkcia f **nemá** asymptotu so smernicou pre smer ∞, a podobne, ak $\mathcal{D}(f) \subseteq (a, \infty)$, tak f nemá asymptotu so smernicou pre smer $-\infty$.



Veta

Priamka $y = kx + q$ *je asymptotou so smernicou ku funkcii* f *pre* $x \to \infty$ *(pre* $x \to -\infty$*) práve vtedy, keď*

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \left(k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}\right)$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - k \cdot x) \qquad \left(q = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k \cdot x)\right).$$

Dôkaz: Tvrdenie dokážeme pre $x \to \infty$ (druhá časť sa dokáže podobne). Nech $y = kx + q$ je asymptota so smernicou ku grafu funkcie f. Potom

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0\,.$$

Potom platí aj

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - k \cdot x - q}{x} = 0\,,$$

z čoho vyplýva

$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to\infty} k - \lim_{x\to\infty} \frac{q}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k\,,$$
$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}\,.$$

Využitím už vyrátaného k môžeme počítať $q = \lim_{x\to\infty}(f(x) - k\cdot x)$. Obrátene, nech k, q spĺňajú podmienky 1) a 2). Potom z 2) vyplýva, že $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - q) = 0$. Priamka $y = kx + q$ je asymptotou so smernicou funkcie f. □

Funkcia môže mať dve **rôzne** asymptoty so smernicou, preto je dôležité vypočítať príslušné limity aj pre $x \to -\infty$ (zvlášť v prípade, keď predpis funkcie obsahuje exponenciálne resp. cyklometrické funkcie).

Pri zisťovaní priebehu funkcie f zisťujeme nasledujúce skutočnosti:

1. $\mathcal{D}(f)$, párnosť, nepárnosť, nulové body, priesečník s osou y
2. f'
3. f''
4. stacionárne body a body, v ktorých f' neexistuje
5. rast, klesanie
6. lokálne extrémy
7. body, v ktorých $f''(x) = 0$ a body, v ktorých f'' neexistuje
8. konvexnosť, konkávnosť, inflexné body
9. asymptoty bez smernice
10. asymptoty so smernicou
11. skompletizovanie údajov (tabuľka)
12. náčrt grafu

Priebeh funkcie $f: \; y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$

1. Definičný obor: výraz v menovateli má byť nenulový, teda
   $3x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$
   $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
2. Párnosť/nepárnosť: $\mathcal{D}(f)$ je symetrický vzhľadom na bod 0;
   $f(-x) = \dfrac{1-2(-x)}{3(-x)^2} = \dfrac{1+2x}{3x^2}$;
   pre $x = 1$ je $f(-1) = \dfrac{1+2\cdot 1}{3\cdot 1^2} = \dfrac{3}{3} = 1$;
   $f(1) = \dfrac{1-2\cdot 1}{3\cdot 1^2} = -\frac{1}{3}$
   Teda $f(-1) \neq \pm f(1)$, čiže f nie je ani párna, ani nepárna.
3. Nulové body: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-2x}{3x^2} = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Priebeh funkcie $f: \ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

4. Priesečník s osou y: $f(0)$ neexistuje, keďže $0 \notin \mathcal{D}(f)$
   teda priesečník s osou y neexistuje
5. Prvá derivácia:
   $$f'(x) = \tfrac{1}{3}\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)' = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(1-2x)'\cdot x^2-(1-2x)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} =$$
   $$\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(-2)x^2-(1-2x)\cdot(2x)}{x^4} = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{2x(-x-(1-2x))}{x^4} = \frac{2(x-1)}{3x^3}$$
6. Druhá derivácia:
   $$f''(x) = \tfrac{2}{3}\left(\frac{x-1}{x^3}\right)' = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{(x-1)'\cdot x^3-(x-1)\cdot(x^3)'}{(x^3)^2} =$$
   $$\tfrac{2}{3}\cdot\frac{1\cdot x^3-(x-1)\cdot(3x^2)}{x^6} = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{x^2(x-3(x-1))}{x^6} = \frac{2(3-2x)}{3x^4}$$

Priebeh funkcie $f: \ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

7. Stacionárne body: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(x-1)}{3x^3} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x = 1$
8. Rast/klesanie: body dôležité vzhľadom na prvú deriváciu: 0,1

Interval	$(-\infty, 0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
f'	$+$	$-$	$+$

Teda f je klesajúca na $(0,1)$, rastúca na $(-\infty,0), (1,\infty)$.

9. Extrémy: z tabuľky máme, že v určitom ľavom okolí bodu 1 funkcia klesá a v pravom okolí 1 rastie.
Teda v bode 1 je lokálne minimum.

Priebeh funkcie $f: \ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

10. **Inflexné body:** $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2(3-2x)}{3x^4} = 0 \Leftrightarrow 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$
11. **Konvexnosť/konkávnosť:** body dôležité vzhľadom na druhú deriváciu: $0, \frac{3}{2}$

Interval	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
f''	$+$	$+$	$-$

Teda f je konvexná na $(-\infty, 0), \left(0, \frac{3}{2}\right)$, konkávna na $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$.

Priebeh funkcie $f:\ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

12. Asymptoty bez smernice: jediný bod, ktorý prichádza do úvahy, je $x = 0$ (bod nespojitosti)

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1-2x}{3x^2} = +\infty$ (typ "$\frac{\neq 0}{0}$" s kladným čitateľom a menovateľom v pravom okolí 0)

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1-2x}{3x^2} = +\infty$ (typ "$\frac{\neq 0}{0}$" s kladným čitateľom a menovateľom v ľavom okolí 0)

Teda rovnica asymptoty bez smernice je $x = 0$.

Priebeh funkcie $f:\ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

13 Asymptoty so smernicou: pre smer $+\infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1-2x}{3x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-2x}{3x^3} = 0$$

$$q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1-2x}{3x^2} - 0\cdot x\right) = 0$$

Výsledok limít sa nezmení, ak ich budeme uvažovať pre $x \to -\infty$.

Teda rovnica asymptoty so smernicou je $y = 0\cdot x + 0 = 0$.

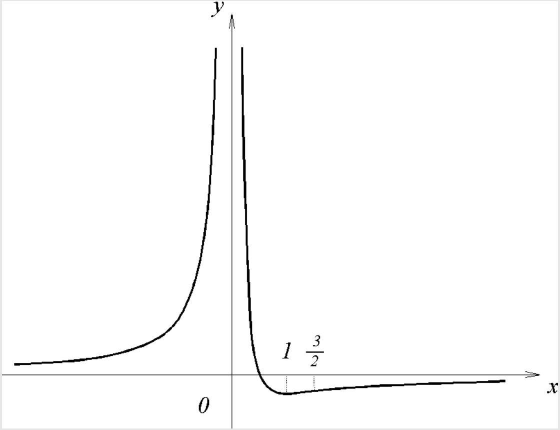
Priebeh funkcie $f: \ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

14 Tabuľka:

Interval	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$
Rast/klesanie	$\nearrow$	ABS	$\searrow$	min. $f(1) = -\frac{1}{3}$	$\nearrow$		$\nearrow$
Konv./konk.	$\smile$		$\smile$		$\smile$	i.b. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{8}{27}$	$\frown$

Priebeh funkcie $f:\ y = \dfrac{1-2x}{3x^2}$ (pokr.)

15 Graf:



Priebeh funkcie $f: \ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$

1. Definičný obor: žiadne obmedzujúce podmienky nie sú, teda $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
2. Párnosť/nepárnosť: $\mathcal{D}(f)$ je symetrický vzhľadom na bod 0;
   $f(-x) = (-x)^2 - 4\sqrt[3]{(-x)^2} = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2} = f(x)$

   Teda f je párna.
3. Nulové body: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt[3]{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4\sqrt[3]{x^2} \Leftrightarrow x^6 = 64x^2 \Leftrightarrow x^6 - 64x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-8)(x^2+8) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-\sqrt{8})(x+\sqrt{8})(x^2+8) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm 2\sqrt{2}$
4. Priesečník s osou y: $[0, f(0)] = [0, 0]$

Priebeh funkcie $f:\ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$ (pokr.)

5. Prvá derivácia:

$$f'(x) = (x^2 - 4\sqrt[3]{x^2})' = 2x - \left(4 \cdot x^{\frac{2}{3}}\right)' = 2x - 4 \cdot \tfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = 2x - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$

6. Druhá derivácia:

$$f''(x) = \left(2x - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}\right)' = 2 - \left(\tfrac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)' = 2 - \tfrac{8}{3}\left(-\tfrac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}\right) = 2 + \frac{8}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

7. Stacionárne body: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{8}{3\sqrt[3]{x}} \Leftrightarrow$

$$6x\sqrt[3]{x} = 8 \Leftrightarrow 27x^4 = 64 \Leftrightarrow x^4 = \left(\tfrac{4}{3}\right)^3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{\left(\tfrac{4}{3}\right)^3}$$

Body, kde f' neexistuje: vzhľadom na výraz $\sqrt[3]{x}$ v menovateli v f', f' neexistuje pre $x = 0$

Priebeh funkcie $f: \ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$ (pokr.)

8. Rast/klesanie: body dôležité vzhľadom na prvú deriváciu: $0, \alpha = -\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}, \beta = \sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}$

Interval	$(-\infty, \alpha)$	$(\alpha, 0)$	$(0, \beta)$	(β, ∞)
f'	$-$	$+$	$-$	$+$

Teda f je klesajúca na $\left(-\infty, -\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\right), \left(0, \sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\right)$, rastúca na $\left(-\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}, 0\right), \left(\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}, \infty\right)$.

9. Extrémy: z tabuľky máme, že v určitom ľavom okolí bodu α a bodu β funkcia klesá a v ich pravom okolí rastie.
Súčasne platí, že v 0 neexistuje prvá derivácia, ale v určitom ľavom okolí 0 funkcia rastie a v jej pravom okolí klesá.
Teda v bodoch α, β je lokálne minimum, v bode 0 lokálne maximum.

Priebeh funkcie $f:\ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$ (pokr.)

10. Inflexné body: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{8}{9\sqrt[3]{x^4}} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{9\sqrt[3]{x^4}} = -2$. Táto rovnica nemá riešenie (jej pravá strana je pre všetky $x \neq 0$ kladná). V bode $x = 0$ druhá derivácia neexistuje, avšak funkcia f má v 0 hrot, čiže tento bod nie je inflexný.
Teda inflexné body neexistujú.
11. Konvexnosť/konkávnosť: body dôležité vzhľadom na druhú deriváciu: 0

Interval	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
f''	$+$	$+$

Teda f je konkávna na $(-\infty, 0), (0, \infty)$.

Priebeh funkcie $f: \ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$ (pokr.)

12. Asymptoty bez smernice: daná funkcia je spojitá na $\mathbb{R}$ preto asymptoty bez smernice neexistujú.

13. Asymptoty so smernicou: pre smer $+\infty$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} x - \frac{4\sqrt[3]{x^2}}{x} =$$

$$\lim_{x\to\infty} x - 4\sqrt{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} x - 4\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Výsledok tejto limity sa nezmení, ak ju budeme uvažovať pre $x \to -\infty$.

Teda asymptota so smernicou neexistuje.

Priebeh funkcie $f: \ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$ (pokr.)

14. Tabuľka:

Interval	$(-\infty, \alpha)$	α	$(\alpha, 0)$	0	$(0, \beta)$	β	(β, ∞)
Rast/klesanie	$\searrow$	min. $f(\alpha) \doteq -3.079..$	$\nearrow$	max. $f(0) = 0$	$\searrow$	min. $f(\beta) \doteq -3.079..$	$\nearrow$
Konv./konk.	$\smile$		$\smile$		$\smile$		$\smile$

Priebeh funkcie $f: \ y = x^2 - 4\sqrt[3]{x^2}$ (pokr.)

15 Graf: