Algoritmy farbenia grafov

Princíp hladného algoritmu farbenia vrcholov - vrcholy grafu usporiadame do nejakej postupnosti; pri farbení vrchola x použijeme prvú voľnú farbu, ktorá nie je použitá na susedoch x vyskytujúcich sa v postupnosti pred x.

Definícia

Nech $G = (V, E)$ je n-vrcholový graf a nech je dané poradie jeho vrcholov $v_1, \dots, v_n$. Hladné k-farbenie *(angl.* greedy colouring*) grafu G vzhľadom na poradie vrcholov $v_1, \dots, v_n$ je regulárne k-farbenie c také, že pre každé $i = 1, \dots, n$ platí, že $c(v_i)$ je najmenšie číslo, ktoré nie je použité na susedoch v_i vyskytujúcich sa v množine $\{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.*

Welsh-Powellov algoritmus hladného farbenia

Použije sa hladný algoritmus, pričom poradie $v_1, \dots, v_n$ je zvolené tak, že $\deg(v_1) \geq \dots \geq \deg(v_n)$.

Veta

Nech $G = (V, E)$ *je* n*-vrcholový graf a* $\deg(v_1) \geq \cdots \geq \deg(v_n)$*.*
Potom $\chi(G) \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} \min\{\deg(v_i), i - 1\}$*.*

Dôkaz: Pri zvolenom poradí vrcholov tak, aby postupnosť ich stupňov bola nerastúca, má vrchol v_i najviac $\min\{\deg(v_i), i - 1\}$ susedov spomedzi vrcholov $v_1, \ldots, v_{i-1}$, teda Welsh-Powellov algoritmus mu priradí farbu, ktorá nie je väčšia ako $1 + \min\{\deg(v_i), i - 1\}$. To platí pre všetky vrcholy, teda algoritmus použije celkovo $1 + \max_{1 \leq i \leq n} \min\{\deg(v_i), i - 1\}$ farieb.

Upozornenie

Welsh-Powellov algoritmus vo všeobecnosti nemusí nájsť presnú hodnotu chromatického čísla grafu (viď napr. graf $K_{n,n}$); hladné farbenie pre niektoré poradia vrcholov môže dokonca použiť viac farieb, než je maximálny stupeň grafu.

Grafové postupnosti

Každému grafu $G = (V, E)$ s $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ možno jednoznačne priradiť postupnosť $\{s_i\}_{i=1}^n$, kde $s_i = \deg_G(v_i)$ pre $i = 1, \ldots, n$. Obrátená otázka je, či každá konečná postupnosť nezáporných celých čísel je postupnosťou stupňov vrcholov nejakého grafu.

Definícia

Postupnosť $\{d_i\}_{i=1}^n$ sa nazýva grafová, *ak existuje n-vrcholový graf G taký, že $\{d_i\}_{i=1}^n$ je postupnosť jeho stupňov.*

Ak $\{d_i\}_{i=1}^n$ je grafová postupnosť, tak pre každé $i = 1, \ldots, n$ je $0 \leq d_i \leq n - 1$ a $\sum_{i=1}^{n} d_i \equiv 0 \pmod 2$. Tieto podmienky však nie sú postačujúce (čo vidno napr. na postupnosti $(1, 1, 3, 3, 5, 5)$).

Veta (Havel 1955)

Nech je daná postupnosť $\{d_i\}_{i=1}^n, n \geq 2$, *pričom* $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ a $1 \leq d_1 \leq n-1$. *Potom* $\{d_i\}_{i=1}^n$ *je grafová práve vtedy, keď je grafová postupnosť*

$$(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

Dôkaz: Ak $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$ je grafová postupnosť, tak existuje graf $G_2 = (V_2, E_2), V_2 = \{v_2, \ldots, v_n\}$ taký, že pre každé $i = 2, \ldots, d_1 + 1$ je $\deg_{G_2}(v_i) = d_i - 1$ a pre každé $j = d_1 + 2, \ldots, n$ je $\deg_{G_2}(v_i) = d_i$. Zostrojme graf G_1 tak, že ku grafu G_2 pridajme nový vrchol v_1 a spojme ho novými hranami s vrcholmi $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$. Potom platí $\deg_{G_1}(v_1) = d_1$, pre $i = 2, \ldots, d_1 + 1$ je $\deg_{G_1}(v_i) = \deg_{G_2}(v_i) + 1 = d_i - 1 + 1 = d_i$ a pre ostatné i je $\deg_{G_1}(v_i) = \deg_{G_2}(v_i) = d_i$. Teda G_1 má postupnosť stupňov vrcholov práve $\{d_i\}_{i=1}^n$, čiže táto postupnosť je grafová.

Nech $\{d_i\}_{i=1}^n$ je grafová postupnosť. Potom existuje graf $H = (V, E), V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ taký, že pre každé $i = 1, \ldots, n$ je $\deg_H(v_i) = d_i$. Ďalej rozlíšime dva prípady.

- V grafe H je vrchol v_1 spojený s každým vrcholom v_i pre $i = 2, \ldots, d_1 + 1$. Potom graf $H - v_1$ má postupnosť stupňov vrcholov práve $(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$, teda táto postupnosť je grafová.

- V grafe H existuje vrchol v_i, $2 \leq i \leq d_1 + 1$, ktorý nie je spojený hranou s v_1. Keďže $\deg_H(v_1) = d_1$, tak existuje vrchol v_j, $d_1 + 2 \leq j \leq n$, ktorý je spojený hranou s v_1. Pretože $j > i$, existuje ďalej vrchol v_k susedný s v_i, ale nesusedný s v_j. Z grafu H odoberme hrany v_1v_j, v_iv_k a pridajme hrany v_1v_i, v_jv_k. Tým vznikne graf H', ktorý má tú istú množinu vrcholov a tú istú postupnosť stupňov vrcholov, ako graf H. Avšak, v grafe H' má vrchol v_1 medzi vrcholmi $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$ väčší počet susedov, než mal v grafe H. Keď ďalej zopakujeme horeuvedenú analýzu prípadov pre H', tak po konečnom počte krokov dostaneme graf spĺňajúci prvý prípad.

Príklad

Zistite, či postupnosť $(6,6,5,4,3,3,3,3,2,1,0,0,0)$ je grafová.

Podľa Havlovej vety postupne dostávame

$$(6,6,5,4,3,3,3,3,2,1,0,0,0) \longrightarrow (6,\underline{6},\underline{5},\underline{4},\underline{3},\underline{3},\underline{3},3,2,1) \longrightarrow$$

$$(5,4,3,2,2,2,3,2,1) \longrightarrow (5,\underline{4},\underline{3},\underline{3},\underline{2},\underline{2},2,2,1) \longrightarrow$$

$$(3,2,2,1,1,2,2,1) \longrightarrow (3,\underline{2},\underline{2},\underline{2},2,1,1,1) \longrightarrow$$

$$(1,1,1,2,1,1,1) \longrightarrow (2,\underline{1},\underline{1},1,1,1,1) \longrightarrow$$

$$(0,0,1,1,1,1) \longrightarrow (1,\underline{1},1,1) \longrightarrow (0,1,1) \longrightarrow (\underline{1},1) \longrightarrow (0).$$

Posledná postupnosť je grafová (zodpovedá izolovanému vrcholu), teda aj pôvodná postupnosť je grafová.