Základné pojmy teórie grafov

- graf $G = (V,E)$ je usporiadaná dvojica konečných množín, kde E je podmnožina množiny všetkých 2-prvkových podmnožín z $\mathcal{P}(X)$. Prvky V sa nazývajú vrcholy, prvky E sa nazývajú hrany grafu G.
- nakreslenie (diagram) grafu $G = (V,E)$ je zobrazenie G do roviny, v ktorom každému vrcholu $v_i \in V$ je priradený bod roviny B_i a každej hrane $e = \{v_i, v_j\}$ oblúk $o(e) = \widehat{B_i B_j}$ spájajúci body B_i a B_j; pritom sa požaduje, aby body priradené rôznym vrcholom boli rôzne, oblúky sami seba nepretínali a okrem koncových bodov neobsahovali žiaden ďalší bod prislúchajúci niektorému z vrcholov G (pozn. dva oblúky sa môžu pretínať).

- označenie – hranu $e \in E$ tvorenú vrcholmi v_i, v_j označujeme $e = \{v_i, v_j\}$ alebo $e = v_i v_j$. Vrcholy v_i, v_j sa potom nazývajú koncové vrcholy hrany e; v tomto prípade sa v_i, v_j nazývajú susedné a hovoríme, že vrchol v_i (resp. v_j) inciduje s hranou e (je incidentný s e). Dve hrany sa nazývajú susedné, ak majú spoločný vrchol.
- stupeň vrchola v v grafe G je počet hrán incidentných s v; označuje sa $\deg_G(v)$ alebo $\deg(v)$. Vrchol stupňa 0 sa nazýva izolovaný, vrchol stupňa 1 sa nazýva visiaci.
- $\delta(G)$ označuje minimálny a $\Delta(G)$ maximálny spomedzi stupňov vrcholov grafu G

Veta: Ak počet hrán grafu G je m, tak súčet stupňov všetkých jeho vrcholov je rovný $2m$.

Dôsledok: Počet vrcholov nepárneho stupňa je v každom grafe párny.

- problém – je daná postupnosť $\{d_i\}_{i=1}^n$. Existuje taký graf G s množinou vrcholov $V = \{v_1, ..., v_n\}$, že pre každé $i \in \{1, ..., n\}$ platí $\deg_G(v_i) = d_i$? Ak áno, tak postupnosť $\{d_i\}_{i=1}^n$ sa nazýva grafová.

Veta (Havel, 1955): Nech je daná postupnosť $\{d_i\}_{i=1}^n$ taká, že $n \geq 2$, $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$. Potom postupnosť $\{d_i\}_{i=1}^n$ je grafová práve vtedy, keď je grafová postupnosť

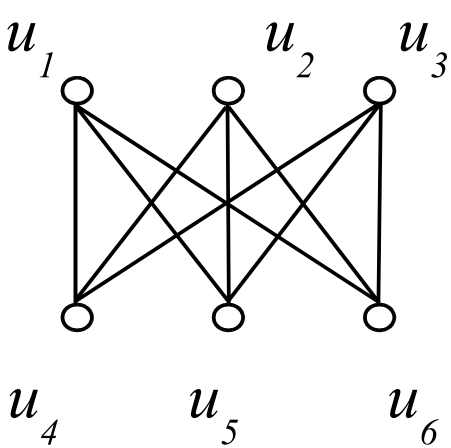
$$(d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$$

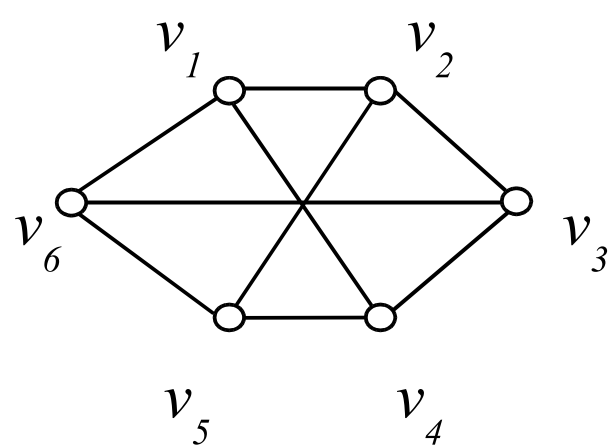
- graf $G' = (V',E')$ je podgraf grafu $G = (V,E)$, ak $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, pričom $e' = v_i v_j \in E'$ len ak $v_i, v_j \in V'$; označujeme $G' \subseteq G$. G' sa nazýva vlastný podgraf grafu G, ak buď $V' \subsetneq V$ alebo $E' \subsetneq E$. Ak $V' = V$, tak G' sa nazýva faktorový podgraf G.
- graf $G' = (V',E')$ je indukovaný podgraf grafu $G = (V,E)$, ak $V' \subseteq V$ a G' obsahuje všetky hrany spájajúce vrcholy z V' v grafe G; označujeme $\langle V \rangle_G$ resp. $\langle V \rangle$
- graf $\bar{G} = (V, E')$ je komplement grafu $G = (V,E)$, ak $v_i v_j \in E'$ práve vtedy, keď $v_i v_j \notin E$
- operácie s grafmi
    - odobratie vrchola: ak v je vrchol grafu $G = (V,E)$, tak graf $G - v = \langle V - v \rangle$ je graf získaný z G odobratím vrchola v a všetkých hrán incidentných s v

- odobratie hrany: ak e je hrana grafu $G = (V,E)$, tak graf $G - e = (V, E - \{e\})$ je graf získaný z G odobratím hrany e

- špeciálne grafy
  - kompletný (úplný) graf je graf, v ktorom sú každé dva vrcholy susedné; označujeme K_n (pre n-vrcholový úplný graf)
  - nulový graf je komplement kompletného grafu; označujeme D_n
  - regulárny (pravidelný) graf je graf, ktorého všetky vrcholy majú rovnaký stupeň; ak všetky vrcholy sú stupňa r, tak graf je r-regulárny
  - bipartitný (párny) graf je graf $G = (V,E)$ taký, že $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $E = \{xy: x \in V_1, y \in V_2\}$; označujeme $G = (V_1, V_2; E)$

- kompletný bipartitný graf je bipartitný graf $G = (V_1, V_2; E)$, v ktorom každý vrchol z V_1 susedí s každým vrcholom z V_2; označujeme $K_{r,s}$ (pre $|V_1| = r$, $|V_2| = s$)
- grafy $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ sú izomorfné, ak existuje bijektívne zobrazenie φ: $V_1 \to V_2$ také, že $(\forall\, u, v \in V_1)\ uv \in E_1 \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E_2$





izomorfizmus týchto grafov je daný predpisom $\varphi(u_i) = v_i$