



P. J. ŠAFÁRIK UNIVERSITY
FACULTY OF SCIENCE
INSTITUTE OF MATHEMATICS
Jesenná 5, 041 54 Košice, Slovakia



I. Kovárová and J. Mihalčová

**Prieskum tvorivosti v žiackych
riešeniach vágne formulovanej úlohy**

IM Preprint, series A, No. 5/2007
February 2007

Prieskum tvorivosti v žiackych riešeniach vágne formulovanej úlohy

Ivana Kovárová, Jana Mihalčová

ABSTRAKT. V príspevku analyzujeme niektoré žiacke riešenia vágne formulovanej (difúznej) úlohy z hľadiska tvorivosti. Difúzna úloha je slovné formulovaná matematická úloha, ktorej zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi. Uvedieme výsledky prieskumu a konkrétne riešenia žiakov od šiesteho ročníka ZŠ až po študentov tretieho ročníka gymnázia.

ABSTRACT. In this paper we analyze some of student's solutions related to the creativity of students. To study the creativity we used the vague formulated problem. The vague formulated problem is a problem that could be interpreted in several ways. We present results of our investigation and solutions of students from the sixth class of a primary school up to third class of a grammar school.

1 Úvod

Tvorivosť je jednou z hlavných kľúčových kompetencii [4], preto je nevyhnutné rozvíjať ju už od detských čias. Učítelia, ktorí pochopili myšlienku citátu L. N. Tolstoja:

„Kto v škole sa nenaučil tvoriť, ten v živote bude vždy len napodobňovať, kopírovať.“

sa snažia k vyučovaniu pristupovať neštandardnými spôsobmi. V matematike je jedným z týchto spôsobov i zadávanie neštandardných úloh. Teda takých, ktoré sa neriešia podľa známeho štandardu (algoritmu), nie sú rutinnými úlohami, ich riešenie vyžaduje od žiaka istý stupeň tvorivosti, dôvtipu, originality. Žiak rieši úlohu na základe myslenia, čím sa on sám rozvíja [2]. Pri tomto prieskume sme, ako nástroj na „meranie“ tvorivosti, zvolili konkrétny typ neštandardnej úlohy a to vágne formulovanú úlohu, ktorej zadanie je interpretovateľné rôznymi spôsobmi. Žiaci základných a stredných škôl sa s takto formulovanými problémami stretávajú v živote i v škole. Škola by mohla žiakov pripraviť na nejednoznačné životné situácie tým, že bude rozvíjať ich tvorivé myslenie. Tvorivý človek je pripravený sa flexibilne popasovať s reálnymi situáciami. Na uplatnenie sa v

dnešnom svete je tvorivosť nevyhnutnou charakteristikou osobnosti, preto sa ňou budeme zaoberať aj v tomto článku.

2 Teoretická časť

Kľúčovým pojmom tohto článku je tvorivosť, preto je dôležité ujasniť si jej definíciu v školskom prostredí a všetky s ňou súvisiace teoretické poznatky. Tvorivosť na vyššom stupni možno charakterizovať ako aktivitu, ktorej výsledky sú nové (originálne, neobvyklé) a hodnotné (užitočné, zmysluplné) pre referenčnú skupinu ľudí (spoločnosť). V škole očakávame nižší stupeň tvorivosti. Myšlienky, nápady a riešenia sú nové a užitočné len pre samotný subjekt (žiaka). V publikáciách zaoberajúcich sa touto tematikou [1], [2] sú zahrnuté aj základné faktory tvorivosti, ktoré umožňujú v praxi posudzovať jej úroveň.

3 Praktická časť

Prieskum bol realizovaný v októbri 2006 v ôsmich triedach troch košických škôl: v šiestom až deviatom ročníku Základnej Školy Laca Novomeského, v prvom až treťom ročníku Gymnázia Tomáša Akvinského a siedmom ročníku Cirkevnej základnej školy svätého Cyrila a Metoda. Prebiehal na troch vyučovacích hodinách v po sebe nasledujúcich dňoch. Na prvej vyučovacej hodine sme žiakom dali presné inštrukcie k vyplneniu pracovného materiálu (Obrázok 5) a v stanovenom časovom rozsahu žiaci riešili zadanú úlohu. Na druhej hodine sme sa venovali rozboru úlohy. Diskutovali sme so žiakmi o ich vlastných riešeniach, postrehoch a názoroch. V triede sa objavili rôzne interpretácie danej úlohy a samotní žiaci prezentovali pred triedou svoje riešenia. Riešenia, ktoré boli v písomnej forme nezrozumiteľné nám žiaci dodatočne slovne vysvetlili. Na záverečnej tretej hodine žiaci vyplňali druhý pracovný materiál, v ktorom riešili druhú difúznú úlohu. Na materiály získané z prieskumu sme sa pozerali z dvoch nezávislých hľadísk. V tomto príspevku sa zaoberáme analýzou riešení z hľadiska tvorivosti no zaujímavá je i myšlienka vplyvu pravidelného zadávania difúzných úloh na rozvoj kľúčových kompetencií žiakov. Materiály z tretej vyučovacej hodiny a z kontrolnej triedy sú využité len v druhej časti tohto prieskumu. Za kontrolnú vzorku sme zvolili jednu triedu siedmeho ročníka Cirkevnej základnej školy.

Ako prostriedok skúmania tvorivosti sme zvolili difúznú úlohu, pretože jej zadanie dáva žiakom väčšiu voľnosť. Pri voľbe konkrétnej úlohy sme sa zamýšľali i nad možnosťou zadať v každej triede úlohu zodpovedajúcu úrovni vedomostí konkrétnej vekovej skupiny. Táto myšlienka narazila na závažný problém. Nie je jednoduché vymyslieť sedem rôznych úloh siedmich úrovní náročnosti, ktoré by boli medzi sebou plne porovnateľné. Z tohto dôvodu sme zvolili len jednu úlohu rovnakú pre všetky triedy. S tým súvisí veľká veková variabilita vzorky.

Žiakov sme pred samotným riešením:

- poučili o spôsobe vyplnenia pracovného materiálu a vysvetlili sme im každú jeho súčasť,
- boli tiež oboznámení s časovým limitom, ktorý mali k dispozícii (20 min na ZŠ a 10 min na SŠ),
- zakázali sme komunikáciu počas riešenia, prípadné otázky k úlohe či potrehy mali napísať do pracovného hárku,
- boli upozornení, že dôležitou súčasťou riešenia úlohy je popísanie myšlienkového postupu.

Zadanie úlohy je: „Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.“ Skúsenosti, ktoré človek v živote nadobudol, ovplyvnili pochopenie slova „vytvorte“. Ďalším je i nejednoznačné spojenie „vytvorte z čísla“. Niektorí žiaci písomne vyjadrili otázky, ktoré im počas riešenia zišli na um, iné sme sformulovali my zo získaných materiálov:

- Vytvorené číslo má byť deliteľné šiestimi?
- Musím vytvoriť len štvorciferné čísla?
- Môžu sa cifry opakovať?
- Môžem číslo vytvoriť aj početovými operáciami medzi ciframi?
- Hľadané čísla vytváram z cifier 1, 2, 4, 5?
- ...

Pokúsili sme sa preformulovať pôvodné zadanie tak, aby bolo v zhode so štandardnými jednoznačnými úlohami a roztriedili sme riešenia do skupín podľa spôsobu riešenia:

1. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne dvojciferné prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ak v každom čísle môžete každú z cifier použiť len raz.“
2. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne štvorciferné prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ak v každom čísle môžete každú z cifier použiť len raz.“
3. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ak v každom čísle môžete každú z cifier použiť len raz.“
4. „Napíšte všetky rôzne prirodzené čísla deliteľné číslom 6, ktoré vzniknú rôznymi početovými operáciami pomocou čísiel 1, 2, 4 a 5.“

5. „Napíšte všetky rôzne prirodzené čísla z cifier 1, 2, 4 a 5, ktoré sa dajú deliť číslom 6, bez ohľadu na zvyšok.“
6. „Napíšte pomocou cifier 1, 2, 4 a 5 všetky rôzne prirodzené čísla menšie ako 10000, deliteľné číslom 6, ak cifry môžete opakovať.“ Túto interpretáciu považujeme za tvorivú (podľa základného faktoru tvorivosti - originality) bez ohľadu na vek riešiteľa.
7. V niektorých riešeniach sa našli aj kombinácie predchádzajúcich interpretácií.
8. Riešenia, v ktorých žiaci pracujú s číslom 1245 ako s celkom, sme neočakávali. Žiaci napríklad číslo násobili párnym číslom, alebo rozkladali na menšie časti.
9. Riešenia, v ktorých nie je popísaný myšlienkový pochod a my netušíme ako sa riešiteľ k výsledkom dopracoval (je zrejmé, že to ani samotný riešiteľ nevie) sme zaradili do samostatnej skupiny. Spolu v tejto skupine sú i riešitelia, ktorí majú problém s definíciou deliteľnosti a s teoretickým základom, ktorý by už mali mať dávno zvládnutý.
10. Zaujímavý bol i postoj starších riešiteľov, ktorí úlohu neriešili so slovami: „Nedá sa!“.

Hľadisko posudzovania, či žiak tvorivo pristupoval k riešeniu zadanej úlohy sa môže zúžiť na vekovú kategóriu, triedu, či konkrétneho žiaka [1]. To či dané riešenie je tvorivé posudzujeme podľa základných faktorov tvorivosti a z hľadiska triedy či vekovej kategórie. Analyzovali sme riešenia žiakov jednotlivých ročníkov a pokúsili sme sa zhrnúť postrehy do jednotlivých bodov.

Základná škola:

Šiestaci:

Typickým riešením v tomto ročníku je hľadanie čísel, ktoré sa dajú deliť šiestimi bez ohľadu na zvyšok. Žiaci vypisujú čísla a delia ich. Súčasťou väčšiny riešení je manuálne delenie vytvorených čísel. V tomto ročníku považujeme za tvorivé i riešenie v interpretácii 1 (takéto úlohy doteraz neriešili, v tejto vekovej kategórii je interpretácia 1 nová a hodnotná). Podľa časovo tematických plánov pre 6. ročník sa kritéria deliteľnosti sa preberali až po uskutočnení prieskumu.

Siedmáci:

Ako vidíme v tabuľke (Tabuľka 1) v siedmackých riešeniach sa vyskytujú len pochopenia 2 a 3. Jediné riešenie v tomto ročníku bolo originálne. Zadanie v nich evokuje štandardné úlohy, ktoré už veľakrát riešili, aj keď príklad explicitne nie je naformulovaný tradične. Tento jav sa dá vysvetliť tým, že prieskum prebiehal bezprostredne po mesiaci opakovania učiva zo šiesteho ročníka (opakovali aj kritéria deliteľnosti čísel).

Ôsmaci:

Od tejto vekovej kategórie sa v každom ročníku vyskytujú riešenia vo viacerých interpretáciách. Väčšina žiakov sa orientuje len na jedno pochopenie a v ňom sa snažia nájsť čo možno najviac riešení. Rozoberieme konkrétne riešenie (Obrázok 1). Napriek tomu, že jeho názor na prieskumy nie je pozitívny, snažil sa vytvoriť čo najviac čísel rôznymi spôsobmi.

1. ciferným súčtom
2. súčtom dvojciferného vybraného čísla s dvoma „vhodnými“ ciframi
3. súčinom dvojciferného čísla s „vhodnou“ cifrou 1, 2, 3, 4.

Zaujímavosťou je, že žiaci v riešeniach delia čísla, o ktorých vopred vedeli, že sú deliteľné číslom šesť. Takýto postup sa vyskytol vo viacerých riešeniach (u žiakov v nižších ročníkoch je dôvod robenia takejto skúšky jasný, no u starších žiakov sme nepochopili opodstatnenie robenia skúšky v takejto podobe).

Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.

$1+2+4+5 = 12 : 6 = 2$ *niečo po súčtom*
 $2 \cdot 4 + 5 = 13$ $2 \cdot 4 + 5 = 13 \cdot 6 = 78$
niečo sú vytvorené súčtom
 $12 \cdot 5 = 60 : 6 = 10$
 $12 \cdot 4 = 48 : 6 = 8$
 $12 \cdot 5 = 60 : 6 = 10$
 ~~$12 \cdot 4 = 48 : 6 = 8$~~
niečo sú vytvorené násobením
 $24 \cdot 6 = 144 : 6 = 24$

niečo sú odčítaním a súčtom
Náročná mi medze robia - alebo toto číslo na kvantum možnosti.

Obrázok 1: Ôsmacké riešenie

Deviatáci:

Na Obrázoku 2 je riešenie taktiež deviataka, ktorému veľmi prekáža vágnosť zadanej úlohy. Takto formulovanú úlohu nerieši. S rozhorčením ju preformuluje

na sebe vyhovujúcu, no ani tak ju nerieši. Takéto prípady sa vyskytli už len v druhom (5 žiakov) a v treťom ročníku (4 žiaci) na gymnáziu. No žiaľ bez komentárov, alebo len so strohým konštatovaním: „Nedá sa!“

Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.

Zadanie je veľmi chybné, lebo z čísla 1245 sa ~~nedá vytvoriť~~ ^{nedá vytvoriť}
 ani jedno číslo. Skôr by bolo iba 1235. Ďalšie ~~to~~ ^{to} chybné
 číslo zadanie. Každé číslo sa dá deliť ^{6 alebo} ~~6~~ po pridaní alebo
 odčítaní čísel prípadne periódov.
 Gymnázium zadanie by malo znieť: Vytvorte z čísla
 1, 2, 4, 5, tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi ale
 bez zvyšku. A ešte tu je ani napísané, že každá cifra
 má byť po vytvorení úlohy.

Obrázok 2: Deviatacké riešenie

Gymnázium:

Prváci:

Okrem šiesteho a deviateho ročníka, sa v každej triede nájdu i žiaci, ktorých riešenia sme zaradili do interpretácie 9 (napr. Obrázok 3).

Druháci:

Žiaci v tomto ročníku našli všetky pochopenia (okrem interpretácií 4, 7 a 8). Nad možnosťou vyriešenia zadaného príkladu vo viacerých pochopeniach sa nezamýšľali. Výsledky získané v tomto ročníku môžu byť negatívne ovplyvnené tým, že sa žiaci pripravovali na dôležitú písomnú prácu z matematiky.

Tretiaci:

V treťom ročníku sa vyskytlo viacero originálnych riešení, ktoré sme u žiakov iných ročníkov nenašli. Jedným z nich (Obrázok 4) je vytváranie čísla pomocou odčítania trojnásobku nepárneho prirodzeného čísla.

Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.

- spočítam cifry v čísle a dostanem ciferný súčet, ak
ciferný súčet je deliteľný 3, tak číslo je deliteľné 6
a potom kombinujeme rôznymi spôsobmi

1245	2451	4512	5124
1254	2415	4521	5142
1425	2514	4215	5241
1452	2541	4251	5214
1524	2145	4254	5421
1542	2154	4125	5412

Obrázok 3: Prvácke riešenie

Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.

12, 42, 54, 24

↳ párne a ciferný súčet deliteľný 3

$$\frac{1245}{1244} + \frac{1245-3}{1242} + \frac{1245-5}{1239} + \frac{1245-7}{1238} + \frac{1245-9}{1236}$$

$$1245 = 3n$$

↑
kde n je násobok 3.

Obrázok 4: Tretiacke riešenie

4 Závery prieskumu

Výsledky prieskumu nás oprávňujú domnievať sa, že práca s difúznymi úlohami rozvíja u žiakov schopnosť vyrovnáť sa s komplexnosťou problému riešenia slovných úloh. Pod komplexnosťou problému rozumieme,

- žiak rozpozná nejednoznačnosť zadania úlohy,
- z viacerých interpretácií vyberie obhájitelnú, „korešpondujúcu“ so zadaním a rieši ju.

Difúzne úlohy vytvárajú priestor pre prejav tvorivosti žiakov práve tým, že nie sú formulované štandardným spôsobom. Žiak sa môže realizovať v riešení úlohy a vydať sa rôznymi cestami k obhájiteľnému riešeniu. Žiaci sa musia naučiť zastávať svoje názory na veci a javy okolo nás, matematiku nevyvímajúc. Práve voľba obhájiteľnej interpretácie úzko súvisí s kritickým rozmyšľaním.

Žiaci často strácajú snahu ďalej pracovať, pretože ich predchádzajúce riešenia neboli akceptované. Neraz sa stretávajú s vlastnou chybou a majú o všetkých svojich riešeniach negatívnu mienku. Mnoho žiakov nemá pozitívny vzťah k matematike. Dôvodov je mnoho. Niektorí jej nerozumejú, iní sa jej boja, či nevidia jej praktické využitie. Mnohokrát majú strach prezentovať svoje riešenie pred spolužiakmi. Stáva sa, že difúznú úlohu vyrieši tvorivo práve žiak, ktorý v matematike nemá najlepšie výsledky. Vyzdvihnutie konkrétneho riešenia by mohlo zlepšiť jeho matematické sebavedomie a podporiť ho v ďalšej práci. Zadávanie difúzných úloh môže byť jedným z prostriedkov zvyšovania motivácie žiakov a zmeny ich postojov k matematike.

Didaktické výskumy sú dôležité z hľadiska zlepšovania prístupu učiteľov k vyučovaniu. Prieskum bol uskutočnený za podpory riaditeľov a učiteľov zúčastnených škôl, za čo by sme sa im chceli touto cestou poďakovať.

5 Prílohy

MENO TRIEDA

SVOJE VEDOMOSTI Z MATEMATIKY BY SOM OHODNOTIL/A

A veľmi dobré

B dobré

C ani dobré, ani slabé

D slabé

E veľmi slabé

.....
.....

ČO SI MYSLÍTE O TEJTO ÚLOHE?.....

.....
.....

ZADANIE ÚLOHY

Vytvorte z čísla 1245 tie čísla, ktoré sa dajú deliť šiestimi.

Obrázok 5: Zadanie

Trieda/ počet žiakov	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
6.B/22	19	2	-	-	-	1	-	-	-
7.C/25	-	-	11	11	-	1	-	-	2
8.C/22	1	1	3	6	2	-	-	7	2
9.C/24	1	8	-	8	4	1	2	-	-
1.B/29	-	4	3	13	3	4	-	2	-
2.C/34	2	2	12	10	-	3	5	-	-
3.B/28	2	2	5	10	-	2	4	3	-
Spolu 183	21	19	37	60	11	13	11	9	2

Tabuľka 1: Tabuľka

Literatúra

- [1] Hrdina, Ľ., Mäsiar, P.: Tvorivosť žiakov vo vyučovaní matematiky, Metodické centrum v Bratislave 1994, ISBN 80-85185-69-5.
- [2] Cirjak, M.: Zbierka divergentných a iných neštandardných úloh, Essox, Prešov 2000, ISBN 80-968369-0-0.
- [3] Szobiová, E. Tvorivosť. Od záhady k poznaniu. Stimul, Bratislava 1999.
- [4] Sekerák, J.: Kľúčové kompetencie v matematickom vzdelávaní, Matematika-Informatika-Fyzika 29, 2006 (v tlači).

Adresa autorov:

Mgr. Ivana Kovárová, Mgr. Jana Mihalčová

Ústav matematických vied

Prírodovedecká fakulta

Univerzity Pavla Jozefa Šafárika

Jesenná 5

041 54 Košice

e-mail: ivana.kovarova@upjs.sk, jana.mihalcova@upjs.sk

Recent IM Preprints, series A

2003

- 1/2003 Ceclárová K.: *Eigenvectors of interval matrices over max-plus algebra*
2/2003 Mihók P. and Semanišin G.: *On invariants of hereditary graph properties*
3/2003 Ceclárová K.: *A problem on optimal transportation*

2004

- 1/2004 Jendroľ S. and Voss H.-J.: *Light subgraphs of graphs embedded in the plane and in the projective plane – survey*
2/2004 Dražnová S., Ivančo J. and Semaničová A.: *Numbers of edges in supermagic graphs*
3/2004 Skřivánková V. and Kočan M.: *From binomial to Black-Scholes model using the Liapunov version of central limit theorem*
4/2004 Jakubíková-Studenovská D.: *Retracts of monounary algebras corresponding to groupoids*
5/2004 Hajduková J.: *On coalition formation games*
6/2004 Fabrici I., Jendroľ S. and Semanišin G., ed.: *Czech – Slovak Conference GRAPHS 2004*
7/2004 Berežný Š. and Lacko V.: *The color-balanced spanning tree problem*
8/2004 Horňák M. and Kocková Z.: *On complete tripartite graphs arbitrarily decomposable into closed trails*
9/2004 van Aardt S. and Semanišin G.: *Non-intersecting detours in strong oriented graphs*
10/2004 Ohriska J. and Žulová A.: *Oscillation criteria for second order non-linear differential equation*
11/2004 Kardoš F. and Jendroľ S.: *On octahedral fulleroids*

2005

- 1/2005 Ceclárová K. and Vaľová V.: *The stable multiple activities problem*
2/2005 Lihová J.: *On convexities of lattices*
3/2005 Horňák M. and Woźniak M.: *General neighbour-distinguishing index of a graph*
4/2005 Mojsej I. and Ohriska J.: *On solutions of third order nonlinear differential equations*
5/2005 Ceclárová K., Fleiner T. and Manlove D.: *The kidney exchange game*
6/2005 Fabrici I., Jendroľ S. and Madaras T., ed.: *Workshop Graph Embeddings and Maps on Surfaces 2005*
7/2005 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2005*

2006

- 1/2006 Semanišinová I. and Trenkler M.: *Discovering the magic of magic squares*
2/2006 Jendroľ S.: *NOTE – Rainbowness of cubic polyhedral graphs*
3/2006 Horňák M. and Woźniak M.: *On arbitrarily vertex decomposable trees*
4/2006 Ceclárová K. and Lacko V.: *The kidney exchange problem: How hard is it to find a donor ?*

- 5/2006 Horňák M. and Kocková Z.: *On planar graphs arbitrarily decomposable into closed trails*
- 6/2006 Biró P. and Cechlárová K.: *Inapproximability of the kidney exchange problem*
- 7/2006 Rudašová J. and Soták R.: *Vertex-distinguishing proper edge colourings of some regular graphs*
- 8/2006 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2006*
- 9/2006 Borbeľová V. and Cechlárová K.: *Pareto optimality in the kidney exchange game*
- 10/2006 Harminc V. and Molnár P.: *Some experiences with the diversity in word problems*
- 11/2006 Horňák M. and Zlámalová J.: *Another step towards proving a conjecture by Plummer and Toft*
- 12/2006 Hančová M.: *Natural estimation of variances in a general finite discrete spectrum linear regression model*

2007

- 1/2007 Haluška J. and Hutník O.: *On product measures in complete bornological locally convex spaces*
- 2/2007 Cichacz S. and Horňák M.: *Decomposition of bipartite graphs into closed trails*
- 3/2007 Hajduková J.: *Condorcet winner configurations in the facility location problem*
- 4/2007 Kovárová I. and Mihalčová J.: *Vplyv riešenia jednej difúznej úlohy a následný rozbor na riešenie druhej difúznej úlohy o 12-tich kockách*