P. J. Šafárik University
Faculty of Science
Institute of Mathematics
Jesenná 5, 041 54 Košice, Slovakia

M. Kolková and J. Pócsová

Metóda Monte Carlo na hodine matematiky

IM Preprint, series A, No. 6/2009
April 2009

Metóda Monte Carlo na hodine matematiky

Mária Kolková, Jana Pócsová

Abstrakt

This paper deals with the simulation of a random variable using the well-known Monte Carlo method. We suggest to use this method in two problems, which are difficult for students to resolve using mathematical calculations. We introduce these problems, which contain few calculations, but do have deep mathematical background in fact. First problem concerns with the qualitative evaluating of the probability of a random event. In the second one, we estimate the expected value of a random variable using this method.

1 Úvod

Metóda Monte Carlo (pod týmto názvom známa od r. 1949) je štatistická metóda, ktorej podstatou je využitie náhodných čísel pri simulácii náhodných premenných. Táto metóda sa používa na riešenie nielen matematických, ale tiež napr. fyzikálnych, spoločenských, ekonomických problémov. ([7], s. 509)

Myšlienkou použiť konkrétne rozloženia kariet namiesto zložitých kombinatorických výpočtov sa ako prvý zaoberal Stanislaw Marcin Ulam (poľský matematik) v snahe vypočítať šancu úspechu v hre Solitaire. Rozpracovanie tejto myšlienky s Johnom von Neumannom viedlo k vzniku tejto metódy [1].

Usudzovanie spojené so stochastickou simuláciou, formulovanie vierohodných úsudkov vyplývajúcich zo štatistických údajov, zbieranie a spracovanie štatistických dát sú dôležitými prvkami stochastického vzdelávania [5]. Preto v článku navrhujeme, ako Metódu Monte Carlo sprístupniť žiakom.

Teoretické pozadie problémov a ilustrácie simulácií sú uvedené len pre čitateľa, ktorý chce hlbšie preniknúť do riešených problémov. Prvý z nich je vhodný použiť pri zoznamovaní sa žiakov s pravdepodobnosťou na druhom stupni základnej školy. Druhý možno odporučiť pre žiakov strednej školy pri práci s aritmetickým priemerom.

V článku rešpektujeme etapy, ktoré možno pri aplikácii metódy rozlíšiť ([7], s. 506–524). Sú nimi:

- konštrukcia simulačnej schémy (pojem vysvetlíme neskôr),
- určenie spôsobu realizácie simulačnej schémy pomocou tabuľky náhodných čísel alebo iných generátorov náhodných hodnôt,
- identifikovanie parametra (charakteristiky), ktorého hodnotu chceme odhadnúť,
- zbieranie a spracovanie štatistických údajov vhodnými nástrojmi,
- určenie hodnoty parametra (charakteristiky) na základe získaných údajov,
- fáza interpretácie.

V článku sa odvolávame na nasledujúce pojmy:

Náhodný pokus chápeme podľa [3] (s. 14) ako experiment, jav, pokus, o ktorého priebehu a výsledku rozhoduje náhoda, pričom množina výsledkov pokusu je konečná alebo spočítateľná a pre každý výsledok možno kvantitatívne ohodnotiť pravdepodobnosť, s akou sa pokus týmto výsledkom skončí (náhodný pokus označujeme podľa [2] gréckym písmenom δ).

Stochastický model náhodného pokusu δ je dvojica (Ω, p), kde Ω je množina všetkých výsledkov náhodného pokusu δ a p je funkcia, ktorá každému výsledku priradí pravdepodobnosť, s akou náhodný pokus δ môže skončiť týmto výsledkom ([3], s. 36, 44, 62).

Simulačná schéma náhodného pokusu δ je náhodný pokus δ_s vykonávaný prostredníctvom losovacích nástrojov s matematickými vlastnosťami (prostredníctvom kociek, úrn, ruliet, mincí), ktorý má s náhodným pokusom δ izomorfný stochastický model ([3], s. 98; [2], s. 255).

Kvalitatívne ohodnotenie pravdepodobnosti sú úsudky typu:

- „udalosť A je málo pravdepodobná“,
- „udalosť B je veľmi pravdepodobná“,
- „udalosť A je menej pravdepodobná ako udalosť B“ ([4], s. 251).

Náhodná premenná je funkcia z množiny Ω, kde (Ω, p) je pravdepodobnostný priestor, do množiny $\mathbb{R}$ reálnych čísel ([3] s. 245).

Tabuľka náhodných čísel je protokol z mnohonásobného losovania s návratom guliek do urny U, v ktorej je 10 guliek očíslovaných od 0 do 9 (porov. [3], s. 114 – 119).

2 Ohodnotenie pravdepodobnosti udalosti Metódou Monte Carlo

Uvažujme o probléme:

Problém 1:
Janko má veľmi rád Cini Minis. V každom balení je jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne [1]*. Janko chce mať čím skôr celú sériu postavičiek, ale mama mu dovolí každý deň kúpiť si len jedno balenie. V pondelok si kúpil prvé balenie. Aká veľká je šanca, že bude mať celú sériu už v sobotu?*

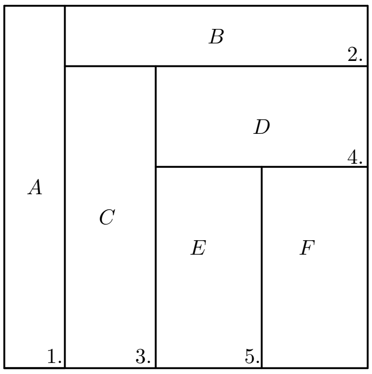
Tento problém je možné zadať žiakom aj v jednoduchšej podobe:

Problém 2:
Janko má veľmi rád Cini Minis. V každom balení je jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne. Obchod, v ktorom nakupuje Janko, každý deň objedná šesť balení, pričom v každom balení je iná postavička. Každý deň sa rozpredá všetkých šesť balení cereálií. Janko chce mať čím skôr celú sériu postavičiek, ale mama mu dovolí každý deň kúpiť si len jedno balenie. V pondelok si kúpil prvé balenie. Aká veľká je šanca, že bude mať celú sériu už v sobotu?

Táto formulácia môže podnecovať nasledujúcu otázku: *Záleží na čase, kedy Janko príde do obchodu?* (Teda či si pri kúpe vyberá zo šiestich alebo z menšieho počtu balení.)

Ak nevie, aké postavičky kúpili v balení zákazníci pred ním, tak sa pravdepodobnosť kúpy danej postavičky nemá dôvod meniť. Rovnosť šancí zákazníkov zdôvodňuje nasledujúci tangram. Uvažujme napríklad o postavičke leva Alexa.

[1] Táto podmienka nám zabezpečuje, že balení s každým z typov postavičiek je rovnako veľa. A teda pravdepodobnosť výberu jednej z nich je $\frac{1}{6}$.



Obr. 1: Tangram

Priebeh, ako vznikal tangram, je naznačený indexami čiar. Jednotkový štvorec rozdelila prvá čiara na dva útvary, ktoré znázorňujú veľkosti pravdepodobností udalostí: $\{$*prvý zákazník kúpil balenie s levom Alexom*$\}$ (A), $\{$*prvý zákazník nekúpil balenie s levom Alexom*$\}$ (útvar zložený z častí *B, C, D, E, F*). Tieto veľkosti sú určené obsahom útvarov vymedzených prvou čiarou. Útvar reprezentujúci udalosť $\{$*j-ty zákazník nekúpil balenie s levom Alexom*$\}$ rozdeľuje *(j+1)*-vá čiara ($j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$). Pretože obsah útvarov $A, B, \ldots, F$ je rovnaký, aj pravdepodobnosti udalostí $\{$*j-ty zákazník kúpil balenie s levom Alexom*$\}$ je rovnaká pre $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

V Probléme 1 zohráva dôležitú úlohu náhoda. Kúpa balenia s postavičkou je náhodným pokusom (ďalej v texte ho označujeme δ). Od pondelka do soboty Janko kúpi šesť balení. Opakovanie pokusu δ šesťkrát je novým náhodným pokusom (označujeme ho δ_{r_1}). V súvislosti s pokusom δ_{r_1} môžno hovoriť o dvoch navzájom opačných udalostiach:

$A = \{$*v každom balení bude iná postavička*$\}$,

$B = \{$*aspoň v dvoch baleniach bude rovnaká postavička*$\}$.

Riešenie problému Metódou Monte Carlo spočíva v určení pravdepodobností týchto udalostí, ktorá je mierou šance ich nastatia v budúcnosti. Prostredníctvom štatistických údajov ich možno určiť kvalitatívne. Štatistické údaje získame simuláciou pokusu δ_{r_1}.

V prvej etape Metódy Monte Carlo je potrebné nájsť vhodnú simulačnú schému pokusu δ_{r_1}. Keďže naším cieľom je, aby ju žiaci samostatne odhalili, je vhodné predostrieť im nasledujúce pomocné otázky.

Pomocné otázky:

Janko má veľmi rád Cini Minis. V každom balení je jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne. Janko si kúpil jedno balenie. Aká je pravdepodobnosť, že v ňom nájde postavičku leva Alexa?

Žiak by si mal uvedomiť, že podmienka rovnomernosti zabezpečuje 6 rovnako pravdepodobných výsledkov pokusu δ_{r_1}.

Ako možno simulovať kúpu balenia s levom Alexom pomocou kocky?

Táto otázka vedie k priradeniu postavičke leva Alexa jedno konkrétne číslo na kocke.

Ako možno pomocou kociek simulovať pôvodný problém?

Otázka vedie k určeniu simulačnej schémy náhodného pokusu δ_{r_1}, ktorou je opakovanie hodu kockou šesťkrát alebo hod šiestimi kockami. Uprednostníme druhý pokus, označujeme ho δ_{s_1}.

Simulačná schéma δ_{s_1} umožňuje určiť analogické udalosti k udalostiam A a B:

$A_K = \{\textit{na každej kocke padne iné číslo}\}$,

$B_K = \{\textit{aspoň na dvoch kockách padne rovnaké číslo}\}$.

Ako generátor náhodných hodnôt v druhej etape Metódy Monte Carlo použijeme 6 hracích kociek.

Tretia etapa si vyžaduje uvedomenie, že podstatné je interpretovať výsledky realizovaní simulačnej schémy δ_{s_1} vo vzťahu k udalostiam A_K a B_K.

Zozbieraním výsledkov náhodného pokusu δ_{s_1} a ich sprehľadnením v tabuľkách prechádzame do štvrtej etapy Metódy Monte Carlo.

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	nastala udalosť A_K/B_K
1.							
…							
10.							

Tabuľka 1: Záznam 10–tich pokusov δ_{s_1} žiaka

Každý zo žiakov uskutoční 10–krát pokus δ_{s_1}. Po ukončení pokusov bude každý riadok *Tabuľky 1* obsahovať 6 čiarok. V poslednom stĺpci bude informácia

Nastala udalosť A_K	
Nastala udalosť B_K	

Tabuľka 2: Vyhodnotenie výsledkov celej triedy

o vzťahu k udalostiam A_K a B_K. Záznam z pokusov celej triedy sprehľadňuje *Tabuľka 2.*

Druhý stĺpec *Tabuľky 2* bude obsahovať počty pokusov žiakov, v ktorých na každej kocke padlo iné číslo (prvý riadok tabuľky) a počty pokusov, v ktorých aspoň na dvoch kockách padlo rovnaké číslo (druhý riadok tabuľky).

Na získanie predstavy o tom, aké výsledky možno v triede očakávať, uvádzame výsledky desiatich simulácií v prostredí Microsoft Excel. V každej z nich sme pokus δ_{s_1} uskutočnili 300–krát.

Nastala udalosť A_K	6	1	3	4	2	2	6	2	3	2
Nastala udalosť B_K	294	299	297	296	298	298	294	298	297	298

Tabuľka 3: Simulácie náhodného pokusu δ_{s_1}

So žiakmi budeme môcť formulovať úsudky *a posteriori* (teda úsudky vyplývajúce zo štatistických údajov):

Udalosť A_K nastala len veľmi zriedka. Môžeme očakávať, že ak by sme pokus opakovali, získali by sme veľmi podobné výsledky. Znamená to, že táto udalosť je veľmi málo pravdepodobná.

Udalosť B_K nastala skoro zakaždým, teda táto udalosť je veľmi pravdepodobná.

Štatistické výsledky podnecujú k hľadaniu ich matematického zdôvodnenia. Aby ohodnotenie pravdepodobnosti udalosti B_K prostredníctvom štatistických údajov bolo vierohodné, je nevyhnutné opakovať pokus δ_{s_1} dostatočne veľakrát. Potom vierohodnosť úsudku o pravdepodobnosti udalosti B_K zaručuje Bernoulliho zákon veľkých čísel ([2], s. 267).

V stochastickom modeli tohoto náhodneho pokusu (a teda v pravdepodobnostnom priestore) je pravdepodobnosť udalosti A_K zlomkom:

$$P(A_K) = \frac{6!}{6^6} = \frac{720}{46656} \approx 0,015.$$

A teda

$$P(B_K) = 1 - P(A_K) \approx 0,985.$$

Výpočet, uvedomenie si, že rozdiel pravdepodobností udalostí A_K, B_K je dostatočne veľký a aplikácia Bernoulliho zákona veľkých čísel tvoria *reflexiu a posteriori*.

Pravdepodobnosti udalostí A a A_K a udalostí B a B_K sú rovnaké. Preto udalosť {*v každom balení bude iná postavička*} je veľmi málo pravdepodobná a udalosť {*aspoň v dvoch baleniach bude rovnaká postavička*} je veľmi pravdepodobná. Tento úsudok už spadá do etapy interpretácie Metódy Monte Carlo. Prostredníctvom tejto metódy sme získali odpoveď na problém: Šanca, že Janko už v sobotu bude mať celú sériu postavičiek, je veľmi malá.

3 Odhad strednej hodnoty náhodnej premennej Metódou Monte Carlo

Problém 3:

Janko má veľmi rád Cini Minis. V každom balení je jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne. Janko chce mať čím skôr celú sériu postavičiek, ale mama mu dovolí každý deň kúpiť si len jedno balenie. Koľko dní môže Janko očakávať, že bude kupovať cereálie, kým nazbiera celú sériu? (porov. [2], s. 342; [7], s. 506)

Rovnako ako v prvom probléme možno formulovať podobnú úlohu.

Problém 4:

Janko má veľmi rád Cini Minis. V každom balení je momentálne je jedna zo série šiestich postavičiek z rozprávky Madagaskar. Každý deň si kupuje jedno balenie, pretože chce mať čím skôr celú sériu. Obchod, v ktorom nakupuje Janko, každý deň objedná šesť balení, pričom v každom balení je iná postavička. Každý deň sa rozpredá všetkých šesť balení cereálií. Koľko dní môže Janko očakávať, že bude kupovať cereálie, kým nazbiera celú sériu, za predpokladu, že postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne?

V probléme sa stretávame s dvoma náhodnými pokusmi:

- kúpa balenia s náhodnou postavičkou (δ),
- opakovanie kúpy balení tak dlho, až Janko získa celú sériu postavičiek. (Tento pokus ma náhodný počet etáp. Ďalej v texte ho označujeme δ_{r_2}).

Riešenie problému prostredníctom Metódy Monte Carlo si v prvej etape vyžaduje uvedomenie, že postavičky sú v baleniach rozdelené rovnomerne. Preto kúpe jedného zo šiestich balení zodpovedá hod kockou. Každej postavičke zodpovedá jedno číslo na kocke. Preto pokus δ_{r_2} možno simulovať opakovaním hodu kockou tak dlho, až na nej padne každé z čísel aspoň raz. Tento analogický pokus k pokusu δ_{r_2} budeme označovať δ_{s_2}.

V druhej etape Metódy Monte Carlo je potrebné popísať spôsob simulácie náhodného pokusu δ_{s_2} pomocou tabuľky náhodných číslel[2]. Uprednostníme však skutočnú realizáciu pokusu δ_{s_2} s hracou kockou.

Janko kupuje cereálie tak dlho, až získa celú sériu. Tento čas čakania na sériu je náhodnou premennou T, ktorá nadobúda hodnoty od šesť počnúc. Stredná (očakávaná) hodnota $E(T)$ náhodnej premennej T je jej charakteristikou, ktorú je potrebné určiť v tretej etape Metódy Monte Carlo.

Na základe štatistických údajov získaných opakovaním náhodného pokusu δ_{s_2} bude možné určiť aritmetický priemer etáp pokusu δ_{s_2}. Podľa Chinčinovho zákona veľkých čísel je aritmetický priemer dobrým odhadom strednej hodnoty náhodnej premennej ([2], s. 484).

V štvrtej etape navrhujeme použiť *Tabuľku 4* na spracovanie získaných údajov. Jednotlivé riadky (od 1 do 10) znamenajú realizáciu pokusu δ_{s_2}. V druhom až siedmom stĺpci sú znázornené výsledky po hode kockou. Posledný stĺpec zachytáva počet etáp pokusu δ_{s_2}.

Ako príklad uvádzame takú postupnosť čísel, ktorá padla pri jednom čakaní na kompletnú sériu: $(1, 6, 4, 5, 4, 6, 2, 1, 3)$. Túto situáciu sme znázornili v prvom riadku *Tabuľky 4*:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅	Počet etáp pokusu δ_{s_2}
1.	II	I	I	II	I	II	9
...							
10.							

Tabuľka 4: Záznam 10–tich pokusov δ_{s_2} žiaka

Pri dostatočnom opakovaní pokusu δ_{s_2} bude s pravdepodobnosťou blízkou 1 aritmetický priemer počtu etáp blízky hodnote $14,7$.
(Ďalej ukážeme, že $E(T) = 14,7$.)

Vo fáze interpretácie môžeme formulovať úsudok *a posteriori*:

[2] Simuláciu pomocou tabuľky náhodných čísel čitateľ nájde v literatúre [6], s. 221.

Priemerne 15 *dní musí Janko chodiť do obchodu, kým získa celú sériu postavičiek.*

Uvádzame podstatné kroky výpočtu strednej hodnoty bez ich dôsledného zdôvodnenia, nakoľko to nie je predmetom článku. (Podrobnejší spôsob výpočtu čitateľ nájde v literatúre [7], s. 347 – 348 a [3], s. 339–342.)

Opakovanie kúpy balenia s náhodnou postavičkou tak dlho, až získame celú sériu, možno rozdeliť na šesť po sebe nasledujúcich fáz. Nachádzanie sa v j-tej fáze ($j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$) znamená, že Janko zatiaľ nazbieral j rôznych postavičiek. Teda j-tá fáza je čakaním na jednu zo $6 - j$ postavičiek, ktoré Janko ešte nemá.

Dĺžka trvania tohto čakania je náhodnou premennou, jej hodnotou je počet opakovaní náhodného pokusu δ do získania balenia s novou postavičkou (vrátane). Označujeme ju T_j.

K náhodnej premennej T teda môžno pristupovať ako k súčtu náhodných premenných $T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$. Keďže stredná hodnota súčtu náhodných premenných je súčtom ich stredných hodnôt ([3], s. 341 veta 9.10), získanie $E(Tj)$ pre každé $j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ by viedlo k získaniu $E(T)$.

Opakovanie náhodného pokusu δ v j-tej fáze ($j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) je Bernoulliho pokusom. Stačí kúpenie novej postavičky v j-tej fáze interpretovať ako úspech a kúpenie takej postavičky, akú Janko už má, ako neúspech. Ak pravdepodobnosť, že nastal úspech v j-tej fáze označíme u_j, potom $u_j = \frac{6-j}{6}$.

Z definície strednej hodnoty [3] určíme stredný čas čakania na prvý úspech. V prípade náhodnej premennej T_j platí $P(T_j = k) = (1 - u_j)^{k-1} \cdot u_j$, kde $k \in \mathbb{N}$. Jej stredná hodnota je teda $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (1 - u_j)^{k-1} \cdot u_j$. Pre u_j spĺňajúce podmienku $0 < u_j < 1$ je tento rad absolútne konvergentný a jeho súčet je $\frac{1}{u_j}$. Podmienku uvažované $j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ spĺňa.

Ostáva nájsť $E(T_0)$. Je isté, že Janko pri prvej kúpe hneď získa novú postavičku, pretože ešte žiadnu nemá, a teda $P(T_0 = 1) = 1$, z čoho vyplýva, že $E(T_0) = 1$.

Teda očakávaný čas čakania na všetky postavičky zo série je

$$E(T_0) + E(T_1) + E(T_2) + E(T_3) + E(T_4) + E(T_5) = 1 + \frac{6}{5} + \frac{3}{2} + 2 + 3 + 6 = 14,7.$$

[3]Stredná hodnota náhodnej premennej X so spočítateľným oborom hodnôt je definovaná ako súčet radu $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot P(X = x_k)$ za predpokladu, že tento rad je absolútne konvergentný ([3], s. 339).

Na základe Čebyševovej nerovnosti:

$\forall \varepsilon > 0$: $P\left(|x - 14,7| \leq \varepsilon\right) \geq \frac{38,99}{n \cdot \varepsilon^2}$ (hodnota 38, 99 je rozptyl náhodnej premennej T)

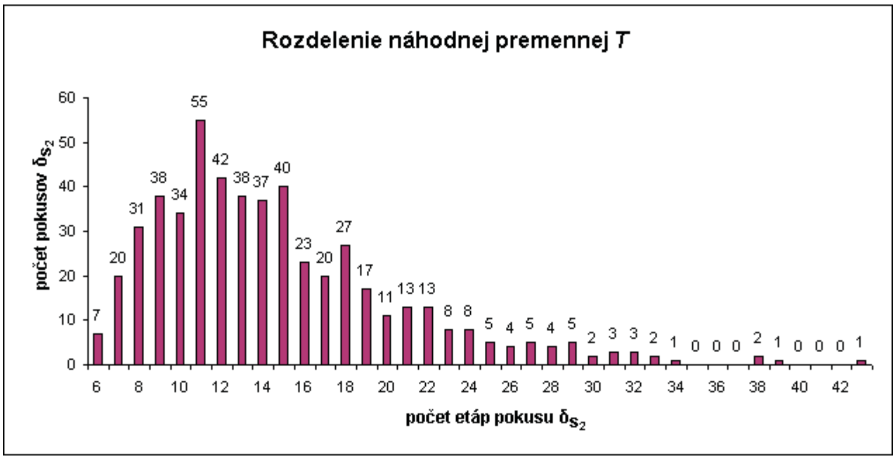
pre dané n a zvolené ε možno určiť pravdepodobnosť, že rozdiel medzi priemerom výsledkov získaným z opakovania pokusu δ_{s_2} a teoretickou hodnotou strednej hodnoty náhodnej premennej T bude menší ako ε.

Napr. pre $n = 520$ s pravdepodobnosťou väčšou ako 99% bude rozdiel menší ako 2, 74 a s pravdepodobnosťou približne 85% rozdiel menší ako 0, 7.

Ako ilustráciu uvádzame výsledky pokusu, ktorý sme uskutočnili so študentami Pedagogickej univerzity v Krakove.

Na hodine bolo 52 študentov a každý z nich opakoval pokus δ_{s_2} 10-krát. Priemerný počet etáp pokusov celej skupiny bol 14, 68.

Nasledujúci graf dáva informáciu o rozdelení náhodnej premennej T.



Obr. 2: Výsledky 520–tich pokusov δ_{s_2}

4 Záver

Proces používania matematiky na riešenie mimomatematických problémov je organizovaný v troch fázach: fáza matematizácie, fáza výpočtov a dedukcie a fáza interpretácie. V prvej fáze hľadáme matematickú formuláciu mimomatematického problému. V nasledujúcej fáze riešime už matematický problém matematickými prostriedkami. Vysvetlenie získaného výsledku v pôvodnom kontexte tvorí záverečnú fázu. ([2], s. 131)

Na realizáciu fázy výpočtov a dedukcie v predložených problémoch žiaci nemajú potrebný matematický aparát. Preto sme na ich riešenie navrhli metódu Monte Carlo. Hoci predložené problémy vyžadujú len málo výpočtov, v skutočnosti sú hlboko matematické. Rozvíjajú dôležité stochastické kompetencie ([4], s. 248 – 249, 252; [2], s. 510):

- schopnosť prekladať mimomatematický problém do jazyka matematiky,
- navrhovať simulácie,
- zbierať a organizovať štatistické údaje,
- formulovať úsudky typické pre stochastiku.

Podnetom k napísaniu tohto článku bol náš študijný pobyt na Ústave matematiky Pedagogickej univerzity v Krakove pod vedením prof. Adama Płockého.

Literatúra

[1] Eckhardt, R.: Stan Ulam, John von Neumann, and the Monte Carlo Method, *Los Alamos Science*, Numer 15 (Special Issue), 1987, s. 131-143.

[2] Płocki, A: *Dydaktyka stochastyky rachunek prawdopodobiestwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako nowy element ksztalcenia matematycznego*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, 2005, ISBN: 83-89416-79-4.

[3] Płocki, A: *Pravdepodobnosť okolo nás stochastika v úlohách a problémoch okolo nás*, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2007, ISBN: 97880–8084–260-4.

[4] Płocki, A: *Pravdepodobnosť okolo nás stochastika v úlohách a problémoch okolo nás*, Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2004, ISBN: 80–89039–51–0.

[5] Płocki, A.: *Stochastické usudzovanie v matematike pre každého*, Matematika v škole dnes a zajtra, Ružomberok 2006 (s. 210–225), ISSN: 80–8084–066–0.

[6] Płocki, A., Tlustý P.: *Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírne pokročilé*, Prometheus, 2007, ISBN: 978–80–7196–330–1.

[7] Płocki, A: *Stochastika dla nauczyciela, Rachunek prawdopodobiestwa, kombinatoryka i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi*, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, 2007, ISBN: 83-89416-69-7.

Adresa autorov:
Mária Kolková, Jana Pócsová
Ústav matematických vied
Prírodovedecká fakulta Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5
040 01 Košice
e-mail: maria.kolkova@upjs.sk, jana.pocsova@upjs.sk

Recent IM Preprints, series A

2005

1/2005 Cechlárová K. and Vaľová V.: *The stable multiple activities problem*
2/2005 Lihová J.: *On convexities of lattices*
3/2005 Horňák M. and Woźniak M.: *General neighbour-distinguishing index of a graph*
4/2005 Mojsej I. and Ohriska J.: *On solutions of third order nonlinear differential equations*
5/2005 Cechlárová K., Fleiner T. and Manlove D.: *The kidney exchange game*
6/2005 Fabrici I., Jendroľ S. and Madaras T., ed.: *Workshop Graph Embeddings and Maps on Surfaces 2005*
7/2005 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2005*

2006

1/2006 Semanišinová I. and Trenkler M.: *Discovering the magic of magic squares*
2/2006 Jendroľ S.: *NOTE – Rainbowness of cubic polyhedral graphs*
3/2006 Horňák M. and Woźniak M.: *On arbitrarily vertex decomposable trees*
4/2006 Cechlárová K. and Lacko V.: *The kidney exchange problem: How hard is it to find a donor ?*
5/2006 Horňák M. and Kocková Z.: *On planar graphs arbitrarily decomposable into closed trails*
6/2006 Biró P. and Cechlárová K.: *Inapproximability of the kidney exchange problem*
7/2006 Rudašová J. and Soták R.: *Vertex-distinguishing proper edge colourings of some regular graphs*
8/2006 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2006*
9/2006 Borbeľová V. and Cechlárová K.: *Pareto optimality in the kidney exchange game*
10/2006 Harminc V. and Molnár P.: *Some experiences with the diversity in word problems*
11/2006 Horňák M. and Zlámalová J.: *Another step towards proving a conjecture by Plummer and Toft*
12/2006 Hančová M.: *Natural estimation of variances in a general finite discrete spectrum linear regression model*

2007

1/2007 Haluška J. and Hutník O.: *On product measures in complete bornological locally convex spaces*
2/2007 Cichacz S. and Horňák M.: *Decomposition of bipartite graphs into closed trails*
3/2007 Hajduková J.: *Condorcet winner configurations in the facility location problem*
4/2007 Kovárová I. and Mihalčová J.: *Vplyv riešenia jednej difúznej úlohy a následný rozbor na riešenie druhej difúznej úlohy o 12-tich kockách*
5/2007 Kovárová I. and Mihalčová J.: *Prieskum tvorivosti v žiackych riešeniach vágne formulovanej úlohy*
6/2007 Haluška J. and Hutník O.: *On Dobrakov net submeasures*
7/2007 Jendroľ S., Miškuf J., Soták R. and Škrabuláková E.: *Rainbow faces in edge colored plane graphs*

8/2007 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2007*
9/2007 Cechlárová K.: *On coalitional resource games with shared resources*

2008

1/2008 Miškuf J., Škrekovski R. and Tancer M.: *Backbone colorings of graphs with bounded degree*
2/2008 Miškuf J., Škrekovski R. and Tancer M.: *Backbone colorings and generalized Mycielski's graphs*
3/2008 Mojsej I.: *On the existence of nonoscillatory solutions of third order nonlinear differential equations*
4/2008 Cechlárová K. and Fleiner T.: *On the house allocation markets with duplicate houses*
5/2008 Hutník O.: *On Toeplitz-type operators related to wavelets*
6/2008 Cechlárová K.: *On the complexity of the Shapley-Scarf economy with several types of goods*
7/2008 Zlámalová J.: *A note on cyclic chromatic number*
8/2008 Fabrici I., Horňák M. and Jendroľ S., ed.: *Workshop Cycles and Colourings 2008*
9/2008 Czap J. and Jendroľ S.: *Colouring vertices of plane graphs under restrictions given by faces*

2009

1/2009 Zlámalová J.: *On cyclic chromatic number of plane graphs*
2/2009 Havet F., Jendroľ S., Soták R. and Škrabuľáková E.: *Facial non-repetitive edge-colouring of plane graphs*
3/2009 Czap J., Jendroľ S., Kardoš F. and Miškuf J.: *Looseness of plane graphs*
4/2009 Hutník O.: *On vector-valued Dobrakov submeasures*
5/2009 Haluška J., Hutník O.: *On domination and bornological product measures*

Preprints can be found in: http://umv.science.upjs.sk/preprints