

Séria úloh 1: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = |x|$

(d) $y' = \frac{1}{\sin x}$

(b) $y' = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$

(e) $y' = \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2}$

(c) $y' = \frac{x}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}$

(f) $y' = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$



Séria úloh 2:

(a) Čiastočné náklady na výrobu x -tej škatule CD nosičov sú dané vzťahom $10 + x + \frac{1}{x^2}$. Celkové náklady na výrobu 100 škatúl sú 10000 eur. Nájdite funkciu celkových nákladov $C(x)$.

(b) Aká je trajektória objektu, ktorý štartuje napravo od iného objektu, pohybujúceho sa smerom hore a tiahnúceho prvý objekt na nenatiahnuteľnej strune za sebou ?



Séria úloh 3: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = 2^{-y}$

(b) $y' = by^n$, $b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

(c) $y' = 1 + \frac{1}{y^2}$

(d) $y' = 2\sqrt{|y|}$

(e) $y^3 - y' + 1 = 0$

(f) $y' = y \ln y$

(g) $y(x) = \int_1^x e^{-y(t)} dt + 1$

(h) $\sqrt{y(x)} = \int_0^x y(t) dt$

(i) $y'(2y + \cos y) = 6x^2$

(j) $(x - xy)y' + y + xy = 0$

(k) $x^2\sqrt{1+y^2} + y^2\sqrt{1+x^2}y' = 0$

(l) $x^2 + 1 + y' \cos y = 0$

(m) $1 - y^2 - 2xyy' = 0$

(n) $e^x + 2x + y' \sin y = 0$

(o) $e^{x+y}(1 - e^{-y}) + (1 + e^x)^2 y' = 0$

(p) $\sqrt{y(x)} - x = \int_0^x y(t) dt$



Séria úloh 4: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' = x + y + 1$

(b) $y' = (4x + y - 1)^2$

(c) $y' = \sqrt{y-x}$

(d) $y' = \frac{1}{x+y-1}$

(e) $y' = e^{x+y} - 1$

(f) $y' = \sqrt{x^2 - y} + 2x$



Séria úloh 5:

- (a) Je známe, že rýchlosť rozpadu rádia je úmerná jeho množstvu. Nájdite zákon rozpadu rádia, ak viete, že o 1600 rokov zostane polovica pôvodného množstva. Koľko percent sa rozpadne za 100 rokov?
- (b) Nájdite krivku, ktorá prechádza cez bod $[2, 0]$ a má tú vlastnosť, že dĺžka úseku jej dotyčnice medzi dotykovým bodom a osou o_y je 2!
- (c) Nájdite krivky, pre ktoré tangens uhla zovretého dotyčnicou a kladným smerom osi o_x je priamo úmerný y -ovej súradnici dotykového bodu.
- (d) Nájdite krivky, pre ktoré súčet normály a subnormály je veličinou stálou, rovnajúcou sa a .
- (e) Nájdite krivky, pre ktoré úsek vytatý súradnicovými osami na dotyčnici je dotykovým bodom rozpolený. Určte krivku prechádzajúcu bodom $[2, 3]$.
- (f) Miestnosť pojme $V = 10800 \text{ m}^3$ vzduchu. Po ukončení schôdze obsahoval tento vzduch 0,12% CO_2 . Koľko kubických metrov vzduchu obsahujúceho 0,04% CO_2 treba vhaňať za minútu do miestnosti, aby po uplynutí 10 minút obsahoval vzduch v miestnosti len 0,06% CO_2 ?
- (g) Nájdite krivku ležiacu v I. a II. kvadrante, pre ktoré obsah plochy ohraničenej ňou, priamkami $X = a, X = x$ a osou o_x je pomerný dĺžke krivky vymezenej danými priamkami.
- (h) Nech $y = f(x)$ definuje krivku prechádzajúcu počiatkom, ktorá má vlastnosť, že objem telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej touto krivkou, priamkami $X = 0, X = x$ okolo osi o_x je rovnaký ako objem telesa vytvoreného rotáciou plochy ohraničenej touto krivkou, priamkami $Y = 0, Y = y$ okolo osi o_y .



Séria úloh 6: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $x(x + 2y) + (x^2 - y^2) y' = 0$

(b) $x y' = 3y - 2x - 2(xy - x^2)^{\frac{1}{2}}$

(c) $(py - qx) - (px + qy) y' = 0$

(d) $y' = \frac{ax + by}{x}, \quad b \neq 0$

(e) $y' = \frac{y}{x + y}$

(f) $y' = \frac{y^2 - 4xy}{2x^2 - 2xy + 2y^2}$

(g) $x y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

(h) $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$

(i) $2x - y + 1 + (2y - x - 1) y' = 0$

(j) $x - y + (2y - x + 1) y' = 0$

(k) $x + y + 1 + (2x + 2y - 1) y' = 0$

(l) $(y^4 - 3x^2) y' + xy = 0$

(m) $2(x^2 - xy^2) y' + y^3 = 0$

(n) $(x^2 y^2 - 1) y' + 2xy^3 = 0$

(o) $\left(1 + \sqrt{\frac{y^2}{x} - 1}\right) - 2y y' = 0$

(p) $y' \frac{x}{y} + \ln y = \ln x$

(q) $y dx + x \ln \frac{y}{x} dy = 2x dy$



Séria úloh 7:

(a) Nájdite krivku, pre ktorú trojuholník vytvorený osou o_y , dotyčnicou a sprievodičom dotykového bodu je rovnoramenný!

(b) Nájdite krivku, pre ktorú pomer úseku vyťatého dotyčnicou na osi o_y a úseku vyťatého normálov na osi o_x má konštantnú hodnotu k ! Krivku vyjadrite v polárnych súradniciach!

(c) Pilot riadi lietadlo tak, aby nos lietadla stále ukazoval smerom k mestu T na západ od východiskového bodu vzdialeného a km od mesta T . Rýchlosť lietadla je v km h⁻¹ a vietor fúka z juhu rýchlosťou w km h⁻¹. Nájdite funkciu popisujúcu trajektóriu pohybu lietadla a nakreslite ju v závislosti od pomeru $\frac{w}{v}$.



Séria úloh 8: Nájdiť všetky riešenia rovníc

(a) $y' = \frac{2x}{1+x^2} y$

(b) $y' - y \sin x = \sin x \cos x$

(c) $x y' + ay = e^{mx}$

(d) $x y' = ax + by$

(e) $(1+x^2) y' - 2xy = (1+x^2)^2$

(f) $(x - 2xy - y^2) y' + y^2 = 0$

(g) $y' + \tan y = \frac{x}{\cos y}$

(h) $\int_a^x ty(t) dt = x^2 + y(x)$



Séria úloh 9: Určte všetky riešenia rovníc odhadnúc najprv jedno partikulárne riešenie

(a) $y' + y = x + 1$

(b) $y' + y = 2e^x$

(c) $y' + y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

(d) $y' - \frac{1+2x}{x+x^2} y = \frac{1+2x}{x+x^2}$

Séria úloh 10:

- (a) Koľko eur musíte (pri spojitom zloženom úročení) vložiť do banky, ak uvažujeme 5% úrok a každoročný výber 3600 eur po dobu 20 rokov a chceme aby celá istina bola vyčerpaná, pričom
- výbery pri počítaní prebiehajú spojite;
 - výbery započítavame v pomere 300 eur mesačne, prvý mesiac po vklade.
- (b) Nájdite krivku, ak jej dotyčnica vytína na osi O_y úsek rovnajúci sa $\frac{1}{m}$ -tine súčtu súradníc dotykového bodu !
- (c) Nájdite krivku AM , aby sa x -ová súradnica ťažiska plochy $OAMP$ rovnala $\frac{3}{4}$ x -ovej súradnice bodu M !
- (d) Ocelová guľička, zahriata na $100\text{ }^\circ\text{C}$, je v čase $t = 0$ umiestnená do prostredia s teplotou $20\text{ }^\circ\text{C}$. Predpokladajme, že guľička je taká, že v každom okamihu je teplota v celej guľičke rovnaká. Ako závisí teplota T na čase t ?^a
- (e) Je treba navrhnuť betonový stĺp, ktorý ma podprieť bremeno vážiace m kg vo výške h metrov, pričom kubický meter betónu má hmotnosť k kg. Predpokladajme, že bremeno bude na vrchole stĺpa rozložené rovnomerne. Bezpečnostné predpisy nedovoľujú, aby tlak prevyšoval $P\text{ N m}^{-2}$. V dolnej časti stĺpa bude k hmotnosti bremena postupne pribúdať aj hmotnosť hornej časti stĺpa. Ak chceme navrhnuť čo najviac úsporný stĺp, musí plocha $A(z)$ prierezu stĺpa vo výške z metrov nad zemou závisieť od z . Nájdite a vyriešte DR rovnicu, ktorú plocha $A(z)$ prierezu stĺpa splňuje.^b
- (f) Nájdite funkciu $y(x)$ z rovnice $x \int_0^x y dx = (x + 1) \int_0^x xy dx$.



^aHint: časová zmena teploty guľičky je priamo úmerná rozdielu teplotu guľičky a teploty okolného prostredia.

^bUkážte, že $P A(z) = mg + kg \int_z^h A(u) du$.

Séria úloh 11: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y' - 2xy = 2x^3y^2$

(b) $y' + xy = \frac{x}{y^3}$

(c) $xy' + y = y^2 \ln x$

(d) $y' - 9x^2y = (x^5 + x^2)y^{\frac{2}{3}}$

(e) $y' + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$

(f) $3y^2y' + y^3 + x = 0$

(g) $xy' + y = xy^2$

(h) $(1-x^3)y' - 2(1+x)y = y^{\frac{5}{2}}$

(i) $(xy + x^2y^3)y' = 1$

(j) $y' = \frac{2x}{x^2 \cos(y) + a \sin(2y)}$



Séria úloh 12:

- (a) Nájdite krivky, pre ktoré v každom bode subnormála je aritmetickým priemerom štvorcov súradníc tohto bodu !
- (b) Nájdite krivky, pre ktoré úsek na osi O_x , vyfatý normálou, rovná sa pomeru štvorca y -ovej súradnice dotykového bodu a x -ovej súradnice dotykového bodu!
- (c) Nájdite krivky, pre ktoré úsek na osi O_y , vyfatý dotyčnicou, rovná sa štvorcu y -ovej súradnice dotykového bodu !



Séria úloh 13: Nájdite všetky riešenia rovníc

(a) $y = xy' + (y')^2$

(b) $2yy' = x[(y')^2 + 4]$

(c) $y = x(1 + y') + (y')^2$

(d) $2y(y' + 2) = x(y')^2$

(e) $y = xy' - a\sqrt{1 + (y')^2}$

(f) $y = xy' + \sqrt{1 - (y')^2}$

(g) $y = xy' + y' + e^{y'}$

(h) $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{(y')^2}$



Séria úloh 14:

- (a) Nájdite krivku, ktorej úsek dotyčnice medzi súradnicovými osami má konštantnú dĺžku $a > 0$!
- (b) Nájdite krivky, pre ktoré súčin vzdialeností dotyčnice od dvoch daných bodov je konštantný!
- (c) Nájdite krivku, ktorej dotyčnica spolu so súradnicovými osami vytvára trojuholník s plošným obsahom $2a^2$.



Séria úloh 15: Nájdite všetky riešenia rovníc

- $(2x - y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0$
- $2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0$
- $2x \left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0$
- $\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0$
- $\frac{x dx + y dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0$
- $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$
- $(2 - 9xy^2)x dx + (4y^2 - 6x^3)y dy = 0$
- $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$
- $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} - 1\right) dx - \frac{y dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} = 0$
- $(1 + e^z) dx + e^z(1 - z) dy = 0, z = \frac{x}{y}$



Séria úloh 16: Nájdite všetky riešenia rovníc

- $(x^2 + y) dx - x dy = 0$
- $(xy^2 + y) dx - x dy = 0$
- $\left(\frac{x}{y} + 1\right) dx + \left(\frac{x}{y} - 1\right) dy = 0$
- $(x^2 + y^2)(x dy - y dx) = (a + x)x^9 dx$
- $(y \sin y - x \cos y) dy = (x \sin y + y \cos y) dx$
- $(2xy^2 - y) dx + (x + y + y^2) dy = 0$



Séria úloh 17: Nájdite všetky riešenia rovníc

1. $(x^2 + x^2y + 2xy - y^2 - y^3) dx + (-x^2 - x^3 + xy^2 + 2xy + y^2) dy = 0$

2. $(xy - y) dx + (xy - x) dy = 0$ 5. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0$

3. $xy^2 dx + (x^2y - x) dy = 0$ 6. $(2x^3y^2 - y) dx + (2x^2y^3 - x) dy = 0$

4. $(x^2 + y^2 + 1) dx - 2xy dy = 0$ 7. $2y dx + \frac{dx + dy}{(x + y)^2} + (3y + x) dy = 0$



Séria úloh 18: Ukážte, že homogénna diferenciálna rovnica

$$M dx + N dy = 0,$$

kde $Mx + Ny \neq 0$ a $N_x \neq M_y$ má IF v tvare $\mu = \frac{1}{Mx + Ny}$.

Séria úloh 19: Ukážte, že diferenciálna rovnica

$$m(xy)y dx + n(xy)x dy = 0,$$

kde $m(xy)x - n(xy)y \neq 0$ a $(n(xy)x)_x \neq (m(xy)y)_y$ má IF v tvare

$$\mu = \frac{1}{m(xy)x - n(xy)y}.$$

Na základe toho vyriešte rovnicu

$$(y - xy^2) dx - (x + x^2y) dy = 0.$$

Séria úloh 20:

- (a) Pri rovinnom prúdení je tvar prúdnic určený DR

$$\frac{dx}{v_x(x, y)} - \frac{dy}{v_y(x, y)} = 0.$$

Určte ich tvar, ak sú zložky rýchlostí $v_x = 2ax$, $v_y = -2ay$, $a \in \mathbb{R}$.

- (b) Na osi O_x sú v n bodoch x_i bodové náboje e_i . Elektrické siločiar v rovine R_{xy} určené DR

$$E_y(x, y) dx - E_x(x, y) dy = 0,$$

pričom sú zložky intenzity elektrického poľa dané Coulombovým zákonom^a. Integrujte danú rovnicu.



$$^a E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n e_i \frac{x - x_i}{((x - x_i)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i=1}^n e_i \frac{y}{((x - x_i)^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$