Diferenciálne rovnice n-tého rádu

1. Nájdite lineárnu homogénnu diferenciálnu rovnicu, ak je daný jej fundamentálny systém riešení (udajte aj nejaký interval I, na ktorom daná rovnica existuje !).

a) $y_1 = 1,\ y_2 = x,\ y_3 = x^2 \quad \dots \quad y''' = 0$

b) $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3 \quad \dots \quad y''' - \frac{3}{x}y'' + \frac{6}{x^2}y' - \frac{6}{x^3}y = 0$

c) $y_1 = \cos^2 x,\ y_2 = \sin^2 x \quad \dots \quad y'' - 2\operatorname{cotg} 2x\, y' = 0$

d) $y_1 = x,\ y_2 = x^{-2},\ y_3 = -x\ln x \quad \dots \quad y''' + \frac{3}{x}y'' - \frac{2}{x^2}y' + \frac{2}{x^3}y = 0$

e) $y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = \mathrm{e}^x \quad \dots \quad y''' - \frac{x^2}{x^2-2x+2}y'' + \frac{2x}{x^2-2x+2}y' - \frac{2}{x^2-2x+2}y = 0$

2. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych homogénnych diferenciálnych rovníc.

a) $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0 \quad \dots \quad y = c_1\mathrm{e}^{2x} + c_2x\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{-3x}$

b) $y'' + 2y' + 4y = 0 \quad \dots \quad y = \mathrm{e}^{-x}\left(c_1\cos\sqrt{3}x + c_2\sin\sqrt{3}x\right)$

c) $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \dots \quad y = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2\mathrm{e}^{2x} + c_3\mathrm{e}^{3x}$

d) $y'' + 4y' = 0 \quad \dots \quad y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{-4x}$

e) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0 \quad \dots \quad y = \mathrm{e}^{x}\left(c_1 + c_2x + c_3x^2\right)$

f) $y^{(4)} + 6y'' + 9y = 0 \quad \dots \quad y = c_1\cos\sqrt{3}x + c_2x\cos\sqrt{3}x + c_3\sin\sqrt{3}x + c_4x\sin\sqrt{3}x$

g) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0 \quad \dots \quad y = c_1\mathrm{e}^{x} + c_2x\mathrm{e}^{x} + c_3\mathrm{e}^{-x} + c_4x\mathrm{e}^{-x}$

h) $y''' - 4y'' + 5y' = 0 \quad \dots \quad y = c_1 + c_2\mathrm{e}^{2x}\sin x + c_3\mathrm{e}^{2x}\cos x$

3. Nájdite všeobecné riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych rovníc.

a) $y'' - y' - 6y = 10\left(\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{3x}\right) \quad \dots \quad y = c_1\mathrm{e}^{3x} + c_2\mathrm{e}^{-2x} - 2x\mathrm{e}^{-2x} + \frac{\mathrm{e}^{3x}(5x^2-2x)}{5}$

b) $y'' + y = 5 - 3\cos 2x + \mathrm{e}^x \quad \dots \quad y = c_1\cos x + c_2\sin x + 5 + \cos 2x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^x$

c) $y'' + y = \frac{1}{\sin x} + \sin x$ na intervale $I = (0, \pi)$

$\dots \quad y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin x\ln\sin x - \frac{3}{2}x\cos x$

d) $y'' - 4y' + 5y = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\cos x}$ na intervale $I = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$\dots \quad y = c_1\mathrm{e}^{2x}\cos x + c_2\mathrm{e}^{2x}\sin x + x\mathrm{e}^{2x}\sin x + \mathrm{e}^{2x}\cos x\ln\cos x$

e) $y'' + 9y' = 9x^3 \quad \dots \quad y = c_1 + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{3}$

f) $y'' - y' = \mathrm{e}^{2x}\cos\mathrm{e}^x \quad \dots \quad y = c_1 + c_2\mathrm{e}^x - \cos\mathrm{e}^x$

g) $y'' - y = \cos^2 x \quad \dots \quad y = c_1\mathrm{e}^x + c_2\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{10}\cos 2x$

h) $y'' + y = \frac{2}{\sin^3 x}$ na intervale $I = (\pi, 2\pi) \quad \dots \quad y = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{\cos 2x}{\sin x}$

i) $y'' - 2y' + 5y = e^x(\sin 2x + \cos 2x) \quad \ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^x \cos 2x + c_2 \mathrm{e}^x \sin 2x + x\mathrm{e}^x \dfrac{\sin 2x - \cos 2x}{4}$

j) $y'' - 2y' + y = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{x^2+1} \quad \ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \ln(x^2+1) + 2x\mathrm{e}^x \operatorname{arctg} x$

k) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x \quad \ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 x\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x$

l) $y'' + 6y' + 5y = 17\mathrm{e}^{-x}\cos x \quad \ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^{-x} + c_2 \mathrm{e}^{-5x} + \mathrm{e}^{-x}(4\sin x - \cos x)$

m) $y'' + 4y' + 4y = \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{1-x^2}$ na intervale $I = (-1, 1)$

$\ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^{-2x} + c_2 x\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{2} \ln(1-x^2) + \dfrac{x\mathrm{e}^{-2x}}{2} \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

n) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^x \ln x$ na intervale $I = (0, \infty)$

$\ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 x\mathrm{e}^x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{4}\left(x^2 - 2x^2 \ln x\right) + x\mathrm{e}^x(x\ln x - x)$

o) $y'' - y' - 12y = 7x\mathrm{e}^{-3x} \quad \ldots \quad y = c_1 \mathrm{e}^{4x} + c_2 \mathrm{e}^{-3x} - \left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{7}\right)\mathrm{e}^{-3x}$

4. Nájdite partikulárne riešenie lineárnych nehomogénnych diferenciálnych rovníc, ktoré vyhovuje daným počiatočným podmienkam.

a) $y'' - y' = -5\mathrm{e}^{-x}(\sin x + \cos x),\ y(0) = -4,\ y'(0) = 5 \quad \ldots \quad y = 2\mathrm{e}^x + (\sin x - 2\cos x)\mathrm{e}^{-x} - 4$

b) $y'' + y = \cos 2x,\ y(0) = \frac{2}{3},\ y'(0) = 0 \quad \ldots \quad y = \cos x - \dfrac{1}{3}\cos 2x$

c) $y'' - 4y' + 4y = 2\mathrm{e}^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \quad \ldots \quad y = x^2\mathrm{e}^{2x}$

d) $y''' + 2y'' + y' = -2x\mathrm{e}^{-2x},\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = 0$

$\ldots \quad y = \mathrm{e}^{-x}(x-4) + \dfrac{7}{2} + \left(x + \dfrac{5}{2}\right)e^{-2x}$

5. Nájdite všeobecné riešenie lineárnej homogénnej diferenciálnej rovnice na príslušnom intervale I, ak poznáte jedno alebo dve jej riešenia.

a) $y'' - 2\left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right)y = 0$ na intervale $I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\varphi_1(x) = \operatorname{tg} x$

$\ldots \quad y = c_1 \operatorname{tg} x + c_2(1 + x\operatorname{tg} x)$

b) $xy'' - (1+x)y' + y = 0$ na intervale $I = (-1, \infty)$, $\varphi_1(x) = 1 + x \quad \ldots \quad y = c_1(1+x) + c_2\mathrm{e}^x$

c) $xy'' + 2y' - xy = 0$ na intervale $I = (0, \infty)$, $\varphi_1(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \quad \ldots \quad y = c_1\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} + c_2\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$

d) $y'' + \dfrac{1}{x(1-\ln x)}y' - \dfrac{1}{x^2(1-\ln x)}y = 0$ na intervale $I = (\mathrm{e}, \infty)$, $\varphi_1(x) = \ln x$

$\ldots \quad y = c_1 \ln x + c_2 x$

e) $y''' + \dfrac{3}{x}y'' - \dfrac{2}{x^2}y' - \dfrac{2}{x^3}y = 0$ na intervale $I = (0, \infty)$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi_2(x) = x^2$

$\ldots \quad y = c_1\dfrac{1}{x} + c_2 x^2 + c_3\dfrac{\ln x}{x}$

f) $xy''' - y'' - xy' + y = 0$ na intervale $I = (1, \infty)$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = \mathrm{e}^x$

$\ldots \quad y = c_1 x + c_2\mathrm{e}^x + c_3\mathrm{e}^{-x}$

6. Nájdite všeobecné riešenie lineárnej nehomogénnej diferenciálnej rovnice na príslušnom intervale I, ak poznáte jedno riešenie k nej prislúchajúcej lineárnej homogénnej diferenciálnej

rovnice.

a) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 3x$ na intervale $I = (0, \infty)$, $\varphi_1(x) = x$ ... $y = c_1x + c_2x\ln x + \frac{3}{4}x^3$

b) $y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1$ na intervale $I = (1, \infty)$, $\varphi_1(x) = x$

... $y = c_1x + c_2\mathrm{e}^x - 1 - x - x^2$

c) $y'' + \frac{4x}{x^2-1}y' + \frac{2}{x^2-1}y = \frac{6}{x^2-1}$ na intervale $I = (-1, 1)$, $\varphi_1(x) = \frac{1}{x-1}$

... $y = \frac{c_1}{x-1} + \frac{c_2}{x+1} + \frac{3x^2}{x^2-1}$

7. Nájdite všeobecné riešenie Eulerových diferenciálnych rovníc na príslušnom intervale I.

a) $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + y = \frac{6\ln(x+1)}{x+1}$ na intervale $I = (-1, \infty)$

... $y = \frac{1}{x+1}\left[c_1 + c_2\ln(x+1) + \ln^3(x+1)\right]$

b) $y'' + \frac{1}{2x+1}y' = 0$ na intervale $I = \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ ... $y = c_1 + c_2\sqrt{2x+1}$

c) $x^3y''' + xy' - y = 0$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y = c_1x + c_2x\ln x + c_3x\ln^2 x$

d) $xy'' + y' + \frac{1}{x}y = -\frac{\sin\ln x}{x}$ na intervale $I = (0, \infty)$

... $y = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x + \frac{1}{2}\ln x\cos\ln x$

e) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = \frac{2}{x}$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y = c_1x + c_2x\ln x + x\ln^2 x$

f) $(1+x)^2y'' + (1+x)y' + y = 4\cos\ln(1+x)$ na intervale $I = (-1, \infty)$

... $y = c_1\cos\ln(1+x) + c_2\sin\ln(1+x) + 2\ln(1+x)\sin\ln(1+x)$

g) $(x+2)^2y'' + 3(x+2)y' - 3y = 0$ na intervale $I = (-2, \infty)$ ... $y = c_1(x+2) + \frac{c_2}{(x+2)^3}$

h) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ na intervale $I = (0, \infty)$ ... $y = c_1x^2 + c_2x^3$

i) $x^3y'' - x^2y' - 3xy = -16\ln x$ na intervale $I = (0, \infty)$

... $y = c_1x^3 + c_2\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\left(2\ln^2 x + \ln x\right)$