Obyčajné diferenciálne rovnice

Jozef Kiseľák
jozef.kiselak@upjs.sk

2. decembra 2019

Obsah

Sylabus

(I) História, motivácia

(II) Základné pojmy a metódy riešenia DR prvého rádu

   (i) Niektoré špecifické DR, Separovné a separovateľné DR
   (ii) Homogénne a zovšeobecnené homogénne DR
   (iii) Lineárna DR 1. rádu
   (iv) Bernoulliho DR
   (v) D'Alembertova (Lagrangeova) a Clairautova DR
   (vi) Exaktné DR

(III) Systémy diferenciálnych rovníc (DR vyšších rádov)

   (i) Existencia, jednoznačnosť a predĺžiteľnosť riešenia
   (ii) Lineárne DR, LDR s konštantnými koeficientami
   (iii) Eulerova DR
   (iv) Prvé integrály diferenciálnych rovníc

1 Úvod a história

"Science is a differential equation. Religion is a boundary condition."

— Alan Turing
(1912-1954)

Čo je diferenciálna rovnica?

"Rovnica obsahujúca závislú premennú (funkciu) a jej derivácie podľa nezávislých premenných."

Je $y(y(x)) + y'(x) = \sin x$ DR? - potreba korektnej definície;

- Teória DR - vznik kalkulu, koniec 17. storočia;
- 1676,  vyriešil DR pomocou nekonečných radov;
- 1693,  vyriešil ”svoju” prvú DR.

Newton circa 1671 napísal článok[a] *The Method of Fluxions and Infinite Series*, kde klasifikoval 3 triedy DR:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), \quad x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

[a]Publikovaný až v roku 1736.

V dnešnej dobe rozlišujeme niekoľko základných typov rovníc súvisiacich s infinitezimálnym počtom:

- Obyčajné diferenciálne rovnice;
- Parciálne diferenciálne rovnice;
- Diferenčné rovnice;
- Stochastické diferenciálne rovnice;
- Integrálne rovnice.

Podľa Edwarda Inceho (1891–1941), už v roku 1675 Gottfried Leibniz napísal prvú DR v tvare $\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}$.

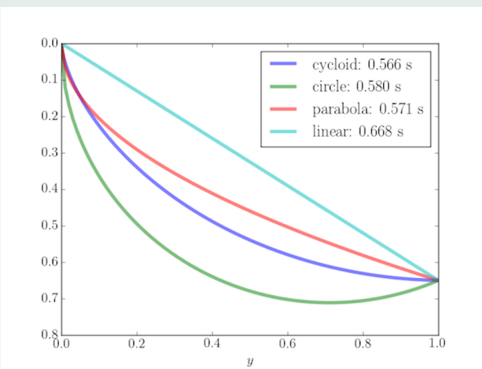
- Nasledovníci Leibniza - bratia Jacob Bernoulli (1654-1705) a Johann Bernoulli (1667-1748);
- 18. storočie - Leonhard Euler (1707-1783), Daniel Bernoulli (1700-1782), Joseph Lagrange (1736-1813), Pierre Laplace (1749-1827);
- 1739 - Leonhard Euler použil metódu integračného faktora;
- 1828 - George Green (1793-1841) ”má niečo dočinenia” s integrabilitou vektorového poľa (totálny diferenciál nejakej funkcie);
- Ďalší ”rovničiari” - William Hamilton (1805-1865), Carl Jacobi (1804-1851), Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Johann Pfaff (1765-1825).

Motivačné úlohy

2

Brachistochrona (z gréckeho *brachistos* najkratší, *chronos* čas)

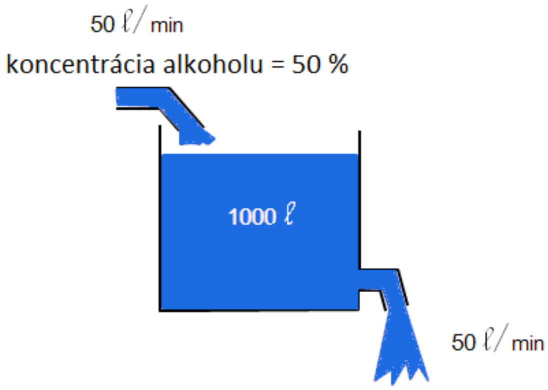
> *"Given two points A and B in a vertical plane, determine the path AMB along which a moving particle M, starting at A and descending solely under the influence of its weight, reaches B in the shortest time."*
>
> — JOH. BERNOULLI (1696)



- $\sqrt{1+(y')^2}\,\sqrt{2gy} = K,\ K \neq 0$
- $x = a \arccos\left(1 - \frac{y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2},\quad a = \frac{1}{4gK^2}$

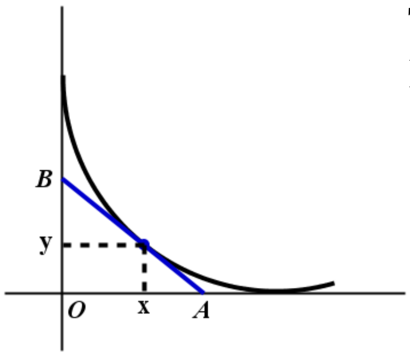
Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 11 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Problém 2.0.1 (Zmiešavací problém).



- začiatočná koncentrácia je 10%;
- dokonalé miešanie;
- Aká bude koncentrácia po 10 min?

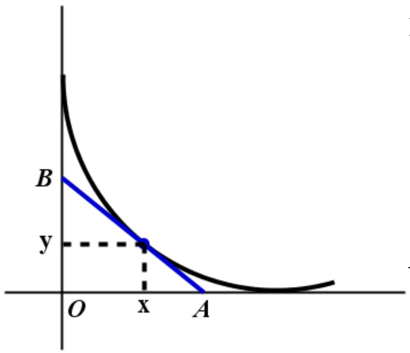
Príklad (Asteroida).



Treba nájsť krivku, ktorá:

- má v každom bode dotyčnicu,
- úsek dotyčnice medzi osami je $a > 0$

Príklad (Asteroida).

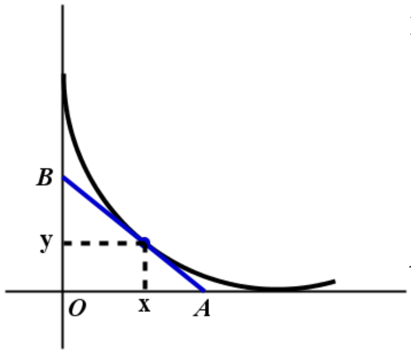


rovnica dotyčnice:

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x), \; y = f(x), \; f'(x) \neq 0$$

$$A = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right], \; B = [0, f(x) - x f'(x)]$$

Príklad (Asteroida).



rovnica dotyčnice:

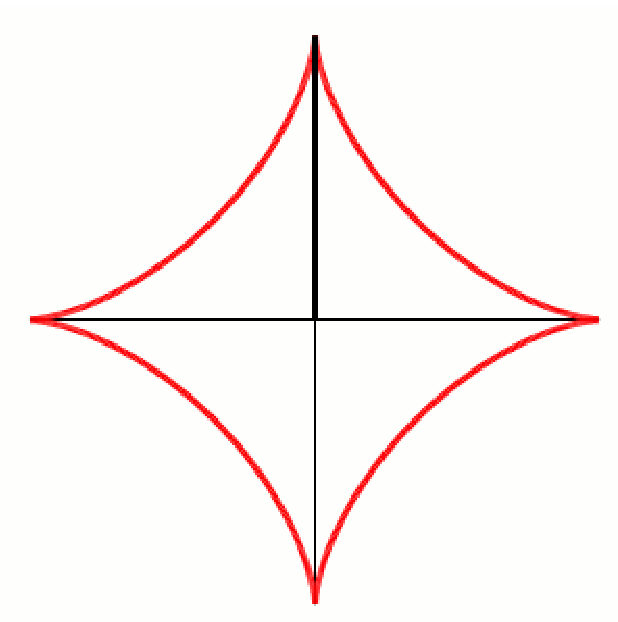
$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),\ y = f(x),\ f'(x) \neq 0$$

$$A = \left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}, 0\right],\ \ B = [0, f(x) - xf'(x)]$$

Dostávame tak nelineárnu DR v tvare

$$\left[x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right]^2 + [f(x) - xf'(x)]^2 = a^2$$

Príklad (Asteroida).



- Reálna algebrická krivka 6 stupňa;
- $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$;
- Patrí medzi superelipsy;
- Vzniká aj "rotáciou kružnice po kružnici".

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Príklad (Rovnovážna cena produktu)**.**

- Cena tovaru $p(x)$ - obvykle určovaná rovnováhou medzi dopytom $q_d(t)$ a ponukou $q_s(t)$;
- Obe závisia od ceny, ale aj od jej zmeny (dynamiky);
- Predpokladajme teda:

$$q_s = a_0 + a_1\, p + a_2\, p', \;\; q_d = b_0 + b_1\, p + b_2\, p', \;\; a_i \neq b_i, \; i = 1, 2.$$

- Určme rovnovažnú cenu :

$$q_d = q_s \;\Rightarrow (a_2 - b_2)p' + (a_1 - b_1)p = a_0 - b_0.$$

3 Základné pojmy a metódy riešení DR 1. rádu

Definícia 3.0.1.

Nech $F(x, z_0, z_1, \dots, z_n)$ je reálna funkcia $(n+2)$, $n \geq 1$ premenných, ktorá vzhľadom k premennej z_n nie je konštantná, definovaná na oblasti (otvorená súvislá) $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Potom výraz

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{3.1}$$

nazývame **obyčajnou diferenciálnou rovnicou** n**-tého rádu**.

Prirodzene budeme požadovať, aby riešením bola funkcia (množina funkcií ?!), ktorá spĺňa tieto požiadavky:

- musí sa dať dosadiť do rovnice - existencia príslušných derivácií;
- môže nadobúdať (aj jej derivácie) len také hodnoty, ktoré patria do definičného oboru F;
- po jej dosadení (aj jej derivácií) musí byť F identicky rovná nule.

Definícia 3.0.2.

(Klasickým) riešením DR (3.1) v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ nazývame funkciu $\phi \in C^n(I)$, pre ktorú platí rovnosť (3.1) a pre každé $x \in I$ je $(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) \in \Omega$. Graf riešenia nazývame **integrálna krivka**.

Poznámka 3.0.3.

Značíme $f \in C^k(U)$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otvorená, ak f má všetky parciálne derivácie k-tého rádu spojité na U.

Poznámka 3.0.4.

Všimnime si, že rovnica (3.1) je vo všeobecnosti v implicitnom tvare.
Ak intervalu I patrí krajný koncový bod, uvažujeme príslušnú jednostrannú deriváciu.
Všimnime si, že vzťah $y'(x) = (y \circ y)(x)$ nespĺňa našu definíciu diferenciálnej rovnice, ide o nelokálny typ operátora - kompozíciu, ale derivácia je lokálny typ operácie a tak je to pre nás neprípustné.

Poznámka 3.0.5.

Rád diferenciálnej rovnice je najvyšší rád derivácie, ktorá v rovnici vystupuje. Niekedy je však možné rád rovnice znížiť.
Rovnicu (3.1) nazveme **lineárnou**, ak je F lineárna funkcia v premennej y a jej deriváciách.

Príklad.

- $y' - x^3 y = \sin x$ je (lineárna) ODR prvého rádu
- $\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi$ je (nelineárna) ODR druhého rádu

Definícia 3.0.6.

Ak y je riešením (3.1) v Ω na intervale I a $\tilde{y}$ je riešením (3.1) v Ω na intervale $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, pričom $y = \tilde{y}$ na I, potom hovoríme, že $\tilde{y}$ (y) je **predĺžením (zúžením)** y ($\tilde{y}$) na interval $\tilde{I}$ (I). Riešenie, ktoré v Ω nie je možné predĺžiť nazývame **maximálne**. Riešenie definované pre každé $x \in \mathbb{R}$ nazývame **globálne**. [a]

[a] Zrejme globálne riešenie je maximálne.

Poznámka 3.0.7.

Častokrát sa nám nepodarí nájsť riešenie DR (3.1) v explicitnom tvare. Niekedy však vieme nájsť také, ktoré spĺňa rovnicu $\Psi(x, y) = 0$ a je teda dané implicitne. V niektorých prípadoch ho dokonca nájdeme "iba" v parametrickom tvare.

Príklad (Neurčitý integrál, primitívna funkcia)**.**

Formulácia problému:
pre danú $f \in C(a, b)$ nájdite všetky funkcie y definované na (a, b), ktoré tam vyhovujú rovnici $y' = f(x)$.

Zrejme riešením je množina primitívnych funkcií. Vieme to zapísať aj pomocou funkcie hornej hranice: $y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s,\ x_0 \in (a, b)$.

Videli sme, že riešení DR môže byť aj nekonečne veľa. Ak by sme však zvolili jeden bod v $(a, b) \times \mathbb{R}$, riešenie by už bolo iba jedno. Vo všeobecnosti pri riešení DR n-tého rádu obvykle dostaneme riešenie obsahujúce n "voľných" parametrov. Táto definícia je viac-menej ovplyvnená teóriou pre lineárne DR, kde priestor riešení je vektorovým priestorom.

Poznámka 3.0.8.

Všeobecné riešenie DR (3.1) nazveme jej n-parametrickú triedu riešení.

Definícia 3.0.9.

Partikulárne riešenie DR (3.1) nazveme riešenie, ktoré neobsahuje žiadne "voľné" parametre.

Príklad.

Nelineárna DR $(y')^2 + x y' = y$ má 1-parametrickú triedu riešení $y(x) = cx + c^2,\ c \in \mathbb{R}$, ale funkcia $\tilde{y}(x) = -\frac{x^2}{4}$ je tiež jej riešením.

Vidíme teda, že pre nelineárne DR existujú aj riešenia, ktoré sa nedajú zahrnúť do jednej parametrickej triedy.

Poznámka 3.0.10.

Singulárne riešenie nazveme také riešenie, ktoré nie je možné zahrnúť do parametrickej triedy riešení.

Navyše, existujú rovnice, ktoré obsahujú iba jedno partikulárne riešenie a samozrejme aj rovnice, ktoré nemajú žiadne riešenie - $|y'| + 1 = 0$.

Problém 3.0.11.

Ukážte, že nasledujúce DR prvého, resp. druhého rádu majú iba jedno partikulárne riešenie a to rovnaké.

$$(y')^2 + y^2 = 0, \ (y'')^2 + y^2 = 0.$$

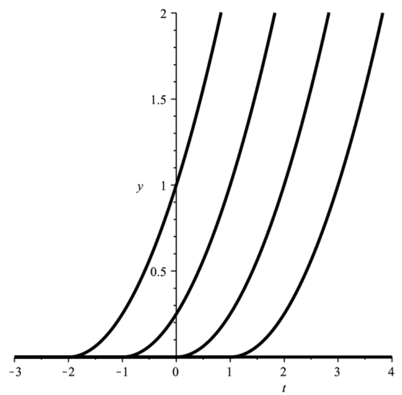
K partikulárnemu riešeniu vedie napríklad úloha nájdenia takého riešenia DR (3.1), ktoré vyhovuje daným začiatočným podmienkam

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

- tzv. **Cauchyho úloha**. Týmito podmienkami vlastne vyberieme konkrétne riešenie prechádzajúce bodom $(x_0, y_0, \dots, y_{n-1})$.

Problémom je, že cez daný bod môže prechádzať jedno (prípadne žiadne), ale aj viac riešení. Napr., riešením nasledujúcej Cauchyho úlohy je $y(x) \equiv 0$, ale aj 1-parametrická trieda funkcií :

Príklad (Nejednoznačnosť riešenia).



- $y' = |y|^{\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 0$
- $\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x \le c, \\ \frac{(x-c)^2}{4}, & \text{inak.} \end{cases}$

3.1. Niektoré špecifické typy DR

I) a) Rovnice v tvare

$$y^{(n)} = f(x),$$

majú riešenia v tvare

$$y(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i}{i!} c_i + \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-\tau)^{n-1} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad t \in I,$$

ktoré možno nájsť postupným integrovaním.

b) $F(x, y^{(n)})$ sa dá vyjadriť "iba" parametricky, tj. $x = \phi(t)$, $y^{(n)} = \psi(t)$, potom $y^{(n-1)} = \int y^{(n)}\,\mathrm{d}x = \int \psi(t)\phi'(t)\,\mathrm{d}t + C_1 = \psi_1(t, C_1)$ a postupným integrovaním dostaneme $y = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n)$.

II) V prípade $F(x, y^{(k)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$, $1 \leq k \leq n-1$, použijeme substitúciu $y^{(k)} = z$, čo redukuje rád rovnice - $F(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0$.

III) V prípade $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, použijeme substitúciu $y'(x) = z$, kde y bude nová nezávislá premenná, a znížime tak rád rovnice. Napr. v prípade $n = 2$ máme $y'' = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} z$, teda $F(y, z, z'z) = 0$.

Problém 3.1.1.

Ukážte, že platí vzťah v (Ia).
Znížte rád rovnice $y^{(n)} = f(y^{(n-2)})$ tak, aby to bola DR prvého rádu.
Znížte rád rovnice $y'' = f(y)$ tak, aby to bola DR prvého rádu.

Príklad.

V rovnici $x = \mathrm{e}^{y''} - (y'')^2$ položme $y'' = \psi(t) = t,\ \ x = \phi(t) = \mathrm{e}^t - t^2$. Potom $\mathrm{d}y' = y''\,\mathrm{d}x = t(\mathrm{e}^t - 2t)\,\mathrm{d}t$ implikuje $y' = \mathrm{e}^t(t-1) - \frac{2t^3}{3} + c_1$ a nakoniec

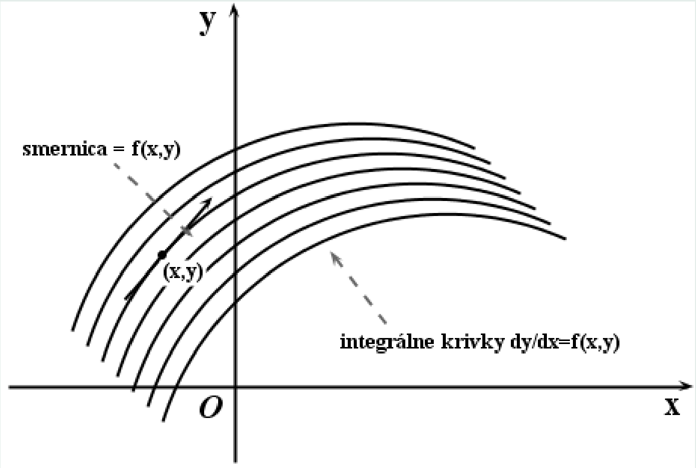
$$y(t) = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)\mathrm{e}^{2t} - \left(\frac{2t^3}{3} - 2t + 2 - c_1\right)\mathrm{e}^t + \frac{4t^5}{15} - c_1\,t^2 + c_2,$$

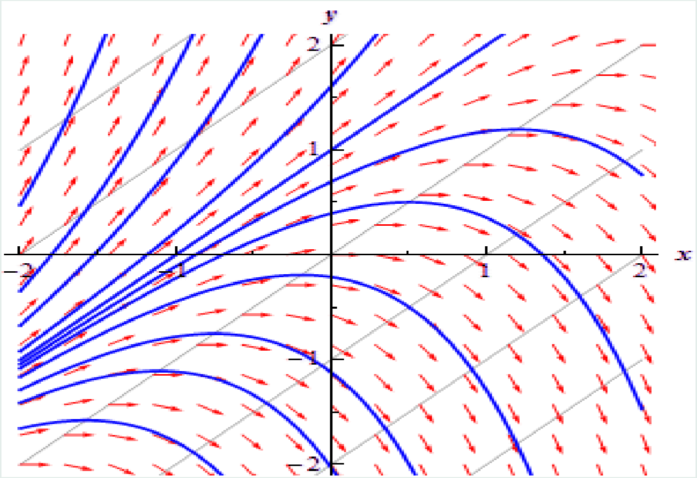
čo spolu s $\phi(t)$ dáva 2-parametrickú triedu riešení v parametrickom tvare.

Uvažujme DR 1. rádu (s explicitne vyjadrenou deriváciou - v tzv. normálnom tvare)

$$y' = f(x, y) \tag{1R}$$

na oblasti Ω_1, kde je f definovaná.





- Bodu $(x, y) \in \Omega_1$ je priradená smernica dotyčnice k integrálnej krivke.
- Množina Ω_1 sa nazýva **smerové pole** DR (1R).

- Smerové pole DR $y' = y - x$ vyznačené červenou farbou a izoklíny v tvare $y - x = c$.
- Integrálne krivky znázornené modrou farbou.

- **Izoklína** je krivka, ktorej každému bodu je priradený ten istý smer (má v každom bode rovnaký spád) bez ohľadu na začiatočné podmienky.
- Pomocou izoklín zobrazujeme tzv. **gradientné pole**.
- Ide teda o grafickú metódu riešenia DR.

Problém 3.1.2.

Znázornite smerové pole a integrálne krivky diferenciálnej rovnice $y' = x$.

3.2. Separovaná a separovateľná DR

- Separáciu premenných zaviedol v rokoch 1690-1694 Jacob I. Bernoulli.
- V roku 1690 v práci v časopise *Acta Eruditorum* uázal, že problému tautochróny je ekvivalentný s DR istého typu.
- Všeobecne túto metódu nájdenia riešenia sformuloval v roku 1694.

DR tvaru

$$P(x) + Q(y)\,y' = 0 \tag{S}$$

sa nazýva **DR so separovanými premennými**. Metóda riešenia takýchto DR je veľmi jednoduchá.

Veta 3.2.1.

Nech $P \in C(a,b), Q \in C(c,d)$. Potom ϕ je riešením rovnice (S) na intervale $J \subset (a,b)$ vtedy a len vtedy, keď je na J implicitne určená rovnicou

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{FR}$$

Navyše, ak $\forall y \in (c,d) \;\; Q(y) \neq 0$, potom každým bodom intevalu $(a,b) \times (c,d)$ prechádza jediná integrálna krivka DR (S).

Poznámka 3.2.2.

Funkcionálna rovnica (FR) predstavuje všeobecné riešenie DR (S), avšak vo všeobecnosti ”iba” v implicitnom tvare.
DR (S) nemá singulárne riešenia.

DR tvaru

$$P_1(x)P_2(y) + Q_1(x)Q_2(y)\,y' = 0 \tag{SP}$$

sa nazýva **separovateľná DR**. Predpokladajme, že $P_1, Q_1 \in C(a,b)$, $P_2, Q_2 \in C(c,d)$. Ak $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ na $(a,b) \times (c,d)$, tak sa rovnica (SP) dá previesť jednoduchou úpravou na rovnicu so separovanými premennými:

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{Q_2(y)}{P_2(y)}\,y' = 0. \tag{SPb}$$

Rovnice (SP) a (SPb) sú za daného predpokladu ekvivalentné, tj. majú tú istú množinu riešení.

Vo všeobecnosti samozrejme predpoklad $Q_1(x)P_2(y) \neq 0$ na $(a, b) \times (c, d)$ neplatí. V tomto prípade riešenia rovnice $Q_1(x)P_2(y) = 0$ rozdelia interval $(a, b) \times (c, d)$ na podmnožiny, kde už budú rovnice (SP) a (SPb) ekvivalentné.

Poznámka 3.2.3.

Rovnica (SP) môže mať singulárne riešenia, ale len tie, ktoré spĺňajú rovnosť $P_2(y) = 0$ (nemusia sa však byť singulárne). Iné riešenia už rovnica (SP) nemôže mať.

Príklad.

Nájdime všetky riešenia rovnice

$$x\,\mathrm{d}x + (y + 1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Máme $\int x\,\mathrm{d}x + \int (y + 1)\,\mathrm{d}y = 0$, alebo $x^2 + y^2 + 2y = C$.

3.3. Homogénna a zovšeobecnená homogénna DR

- Jacob I. Bernoulli redukoval homogénnu DR prvého rádu na separovateľnú.
- Dnes už vieme, že metóda, ktorú použil je založená na transformácii premenných.
- So svojím bratom Johannom I. transformovali aj ďalšie DR na explicitne riešiteľné DR.

Definícia 3.3.1.

Funkciu $F(x_1, \ldots, x_n)$ nazveme **homogénnou funkciou stupňa** k, $k \in \mathbb{N}_0$, ak platí $F(t\,x_1, \ldots, t\,x_n) = t^k\, F(x_1, \ldots, x_n)$ pre každé $t \neq 0$ a $(x_1, \ldots, x_n) \in D_F$. Prípadne hovoríme o podmnožine $U \subset D_F$, kde uvedená vlastnosť platí.

Príklad.

Funkcia $G(x, y) = x^2 + y^2 - xy$ je zrejme homogénna funkcia stupňa 2 na $\mathbb{R}^2$.
Funkcia $H(x, y) = \ln\left(\frac{x^2 - xy}{4x^2 + y^2}\right)$ je homogénna funkcia stupňa 0 na D_H.
Funkcia $J(x, y) = y^2 - x$ nie je homogénna funkcia žiadneho stupňa.

Problém 3.3.2.

Určte D_H.
Zistite stupeň homogenity funkcie $f(x, y, z) = x^5 y^2 z^3$.

DR tvaru

$$P(x, y) + Q(x, y)\, y' = 0, \qquad \text{(H)}$$

kde P, Q sú homogénne funkcie rovnakého stupňa na oblasti M, nazývame **homogénna DR**. Nasledujúca veta dáva návod ako transformovať rovnicu (H) na DR ktorú už vieme riešiť.

Veta 3.3.3.

Substitúcia $y = x\, u$ prevedie DR (H) na separovateľnú DR tvaru

$$P(1, u) + Q(1, u)\, u + x\, Q(1, u)\, u' = 0. \qquad \text{(Sh)}$$

Navyše, ak u rieši rovnicu (Sh), potom $x\, u(x),\ x \neq 0$ rieši rovnicu (H). Ak y rieši rovnicu (H), tak existuje riešenie u rovnice (Sh): $y = x\, u$.

Poznámka 3.3.4.

Zrejme rovnicu (H) je možné previesť na DR $y' = \xi\left(\frac{y}{x}\right)$ pre $x \neq 0$ a polpriamky $y = k\, x,\ x \neq 0$ sú izoklíny.

Príklad.

Uvažujme DR

$$y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right)-x\,y'=0.$$

Zrejme P, Q sú homogénne funkcie stupňa 1 na množine, kde $xy>0$. Transformáciou $y=xu$ dostaneme rovnicu

$$u\ln u = x\,u'.$$

Tá má 1-parametrickú triedu riešení $u(x)=\mathrm{e}^{cx}$, $c\in\mathbb{R}$, ktorá obsahuje aj riešenie $u(x)\equiv 1$. Všetky riešenia pôvodnej rovnice obsahuje 1-parametrická trieda: $y(x)=x\,\mathrm{e}^{cx}$, $c\in\mathbb{R}$.

DR ktoré je možné previesť na tvar

$$y'=\frac{y}{x}\,f(x^n\,y^m), \tag{Hz}$$

kde $n, m\in\mathbb{Z}$ nazývame **zovšeobecnená homogénna DR**. Analogicky použitím substitúcie $z=x^n\,y^m$ (na príslušnej množine) transformujeme (Hz) na separovateľnú DR

$$x\,z'=n\,z+m\,z\,f(z).$$

Poznámka 3.3.5.

Zrejme pre $n = -m$ ide o homogénne DR.

Príklad.

Uvažujme DR
$$y' + \frac{2}{x^2} - y^2 = 0,$$
ktorú upravíme (na príslušnej množine) na tvar $y' = \frac{y}{x}\left(x\,y - \frac{2}{x\,y}\right)$. Ide o zovš. homogénnu DR s $n = m = 1$. Použitím $z = x\,y$ obdržíme separovateľnú DR
$$z' = \frac{z}{x}\left(1 + z - \frac{2}{z}\right).$$
Odtiaľ $z(x) = \frac{c+2x^3}{c-x^3}$, $c \in \mathbb{R}$, kde riešenie $z(x) \equiv -2$ je už obsiahnuté. Avšak singulárne riešenie $z(x) \equiv 1$ nie (všimnime si, že pre $|c| \to \infty$ by to tak bolo).

DR tvaru

$$y' = f\left(\frac{a\,x + b\,y + c}{\alpha\,x + \beta\,y + \gamma}\right), \tag{R}$$

kde f je spojitá funkcia a $a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 > 0$, vieme transformovať na DR, ktoré už vieme riešiť:

i) prípad $b = \beta = 0$ - DR so separovanými premennými,

ii) prípad $c = \gamma = 0$ - homogénna DR stupňa 1,

iii) prípad $b^2 + \beta^2 > 0$ a $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$ - BÚNV $b \neq 0$, položme $\alpha = \frac{a\beta}{b}$, $z = a\,x + b\,y$, čo prevedie rovnicu (R) na separovateľnú DR

$$z' = a + b\,f\left(\frac{z + c}{\frac{\beta}{b}\,z + \gamma}\right).$$

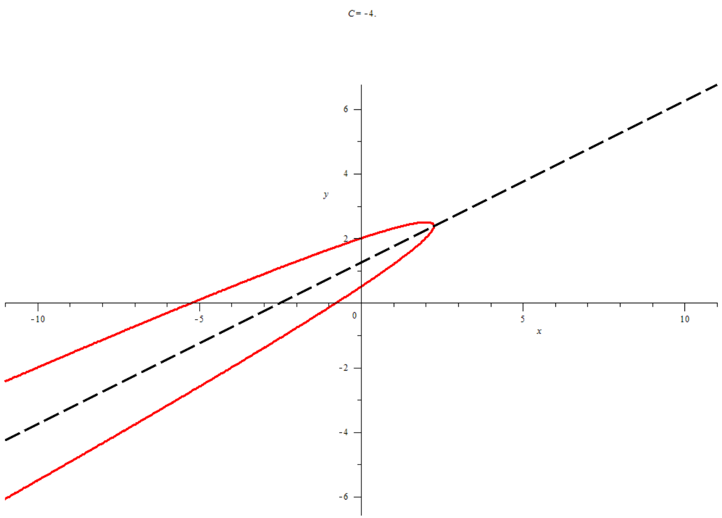
iv) prípad $\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$ - Substitúcia $x = x_0 + u, y = y_0 + v,\ v = v(u)$, pričom $x_0, y_0 :\ \ a\,x_0 + b\,y_0 + c = \alpha\,x_0 + \beta\,y_0 + \gamma = 0$ vedie na prípad ii).

Príklad.

Rovnica

$$y' = \frac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5}$$

je prípad iii). Zrejme $y \neq p_x = \frac{2x+5}{4}$. Položme $z = x - 2y$, potom po úprave dostaneme DR pre $z : z' = -\frac{1}{2z+5}$. Jej integráciou obdržíme rovnicu $z^2 + 5z = -x + C$, $C \in \mathbb{R}, z \neq -\frac{5}{2}$. Takže graf riešenia leží na kužeľosečke $x^2 - 4xy + 4y^2 - 6x - 10y - C = 0$. Koeficienty kvad. časti spĺňajú $B^2 - 4AC = 16 - 16 = 0$, teda ide o parabolu (s naklonenou osou p_x).



Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 40 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Príklad.

Rovnica

$$y' = \frac{2(x+2)^2}{(x+y-1)^2}$$

je prípad iv). Takže z rovníc

$$y_0 + 2 = 0, \quad x_0 + y_0 - 1 = 0$$

máme $x_0 = 3, \; y_0 = -2$. Po transformácii $u = x - 3, \; v = y + 2$ dostaneme homogénnu DR

$$v' = \frac{2v^2}{(u+v)^2}.$$

3.4. Lineárna DR prvého rádu

Lineárnou DR prvého rádu nazývame rovnicu, ktorá má tvar

$$y' + p(x)y = g(x), \tag{1L}$$

kde $p, g \in C(a, b)$. Ak $g \equiv 0$ na (a, b), tak rovnicu

$$y' + p(x)y = 0, \tag{1Lh}$$

nazývame **homogénna**[a] **DR prvého rádu**, alebo aj DR prvého rádu bez pravej strany. Zrejme triviálne riešenie $y \equiv 0$ rieši (1Lh) pre každé $p \in C(a, b)$. Navyše je táto DR separovateľná a pre $y \not\equiv 0$ dostaneme $|y| = c\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},\ c > 0$.

[a] Pozor, nemýľte si tento pojem s pojmom zavedeným v kapitole 3.3.

Z toho vieme, že ľubovoľné riešenie (1Lh) je tvaru

$$y = k\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \;\; k \in \mathbb{R}$$

a je definované na celom intervale (a, b). Navyše pre $k > 0$ (< 0) je $y(t) > 0$ (< 0) pre každé $x \in (a, b)$. Zvoľme teraz $(x_0, y_0) \in (a, b) \times \mathbb{R}$ a určme k. Platí

$$y_0 = k\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x\big|_{x=x_0}}$$

a teda

$$y(x) = y_0\,\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(s)\,\mathrm{d}s}, \;\; x \in (a, b).$$

Ukázali sme teda, že každým bodom pásu $(a, b) \times \mathbb{R}$ prechádza jediná integrálna krivka a aj to kde celá leží. Navyše jediná integrálna krivka prechádzajúca bodom na osi o_x je $y \equiv 0$.

Teraz pristúpime ku riešeniu DR (1L) a to pomocou dvoch metód:

- **Lagrangeova metóda variácie konštánt** (parametrov) - koniec 18. storočia (Euler, Johann Bernoulli);
  - Všeobecná metóda pri riešení nehomogénnych DR;
  - Rozpracovanáaj pre lineárne PDR;
- **Metóda integračného faktora** - 1763, Leonhard Euler (Johannov žiak);
  - Dôležitá hlavne pre tzv. (ne)exaktné DR;
  - Vo všeobecnosti nemusí byť jednoduché ju použiť.

LMVK je nasledujúca. Vieme, že homogénna DR (1Lh) prislúchajúca DR (1L) má všeobecné riešenie

$$y(x) = k\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},\ \ k \in \mathbb{R}.$$

Predpokladajme teraz, že

$$y(x) = k(x)\,\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

(tj. namiesto konštanty k uvažujeme funkciu $k(x)$) rieši (1L). Ak takáto funkcia $k(x)$ existuje, tak zrejme $k \in C^1(a,b)$ (prečo ?). Po dosadení do rovice (1L) a úprave dostaneme, že $k(x)$ musí byť riešením rovice

$$k'(x) = g(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Veta 3.4.1.

Nehc $p, g \in C(a, b)$, potom

(a) funkcia

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left[\int g(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right]$$

je všeobecné riešenie DR (1L) na (a, b);

(b) všeobecné riešenie DR (1L) sa rovná súčtu všeobecného riešenia DR (1Lh) a partikulárneho riešenia (1L);

(c) každým bodom pásu $(a, b)\times\mathbb{R}$ prechádza práve jedna integrálna krivka, ktorú vytvára riešenie

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} p(u)\,\mathrm{d}u}\left[\int_{x_0}^{x} g(u)\,\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{u} p(s)\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u + y_0\right].$$

Existuje viacero spôsobov nájdenia riešenia rovnice (1L). Uvedieme si ešte metódu integračného faktora. Vynásobme rovnicu (1L) funkciou $\phi \in C^1(a,b), \phi \not\equiv 0$, tj. dostaneme ekvivalentnú DR

$$\phi(x)\, y' + \phi(x)\, p(x) y = \phi(x)\, g(x). \tag{1LF}$$

Pokúsme sa napísať ľavú strana tejto rovnice ako derivácia súčinu $\phi\, y$, keďže rovnica (1LF) by už bolo potom priamo integrovateľná. Otázkou je, či takáto funkcia existuje a ako ju nájsť.

- na (a,b) má platiť $(\phi(x)\, y)' = \phi(x)\, y' + \phi(x)\, p(x) y$;
- teda $\phi'(x) = \phi(x)\, p(x)$;
- nakoniec $\phi(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\, \mathrm{d}x}$;
- takýchto funkcií je nekonečne veľa - nám stačí jedna z nich, ktorú nazveme **integračný faktor**.

Zrejme z rovnice $(\phi(x)\,y)' = \phi(x)g(x)$ potom hneď máme

$$y(x) = \frac{1}{\phi(x)} \int \phi(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \left[\int g(x)\,\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \right], \;\; x \in (a,b).$$

- samozrejme, dostali sme rovnaký výsledok ako pri LMVK;
- je dobré si uvedomiť, prečo ϕ existuje a je dostatočne hladká;
- ak $g \equiv 0$, tak riešenie homogénnej rovnice ostáva v platnosti;

3.5. Bernoulliho DR

Bernoulliho DR nazývame rovnicu

$$y' + p(x)\,y = g(x)\,y^{\alpha}, \qquad \text{(B)}$$

pričom $p, g \in C(a, b), g \not\equiv 0$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Poznámka 3.5.1.

- Pre $\alpha = 0$ je to rovnica (1L).
- Pre $\alpha = 1$ je to rovnica (1Lh) a aj (S).
- Pre $\alpha > 0$ má rovnica (B) vždy triviálne riešenie, pričom
  - pre $\alpha \geq 1$ je partikulárnym riešením;
  - pre $\alpha < 1$ je singulárnym riešením.

Motivácia: pre $y \in C^1(a,b)$ platí $\left(y^2\right)' = 2yy'$ a navyše aj $(y^m)' = p(y)^{m-1}y'$ pre "rozumné" hodnoty m. Prenásobením rovnice (B) výrazom $(1-\alpha)y^{-\alpha}$ dostaneme rovnicu

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}y' + (1-\alpha)\,p(x)\,y^{1-\alpha} = (1-\alpha)g(x).$$

Z motivácie : uvažujeme substitúciu $z = y^{1-\alpha}$, odkiaľ $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$. Touto transformáciou obdržíme nehomogénnu lineárnu DR prvého rádu

$$z' + (1-\alpha)p(x)\,z = (1-\alpha)g(x), \tag{BL}$$

ktorú už vieme riešiť.

Veta 3.5.2.

Nech $p, g \in C(a,b)$, $g \not\equiv 0$ a $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ a z rieši DR (BL). Potom každá funkcia, ktorá je na $J \subset (a,b)$ riešením $y^{1-\alpha} = z$, má na J deriváciu a $y \not\equiv 0$ je na J riešením DR (B). Nech $y \not\equiv 0$ rieši na J DR (B). Potom existuje také riešenie z DR (BL), že $z = y^{1-\alpha}$ na J.

Príklad.

Majme rovnicu $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$. Zrejme $y \equiv 0$ je jej riešením. Je to rovnica typu (B) s $\alpha = \frac{1}{2}$. Substitúciou $z = \sqrt{y}$ dostaneme DR

$$2xz' - 4z = x^2,$$

pričom $z(x) = \frac{x^2}{2}\ln|c\,x|,\ c \neq 0$ je jej všeobecné riešenie. Z toho

$$y(x) = \frac{x^4}{4}\ln^2|c\,x|,\ c \neq 0.$$

Poznámka 3.5.3.

Zaujímavým faktom je, že rovnica (B) sa dá riešiť aj pomocou LMVK. Zrejme preto, že táto rovnica je ekvivalentná s lineárnou DR prvého rádu (čo my už to ale vieme). Naozaj, nech $c\,y_0$ je riešením lineárnej časti DR (B). Hľadajme riešenie rovnice (B) v tvare $c(x)\,y_0$. Po zderivovaní máme

$$c'(x)\,y_0 + c(x)\,y_0' + p(x)c(x)\,y_0 = g(x)c(x)^\alpha\,y_0^\alpha,$$

tj.

$$c' = g(x)c^\alpha\,y_0^{\alpha-1},$$

keďže y_0 rieši lineárnu časť rovnice (B). čo je separovateľná DR pre neznámu funkciu c.

3.6. Exaktné DR

Ukážeme si ešte metódu integrovania istej triedy diferenciálnych rovníc prvého rádu - teda spôsob ako nájsť riešenie. Pre spojité funkcie $M(x,y)$, $N(x,y)$ uvažujme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{N(x,y)}{M(x,y)}, \quad M \not\equiv 0. \tag{3.2}$$

Dotykový vektor $\left(1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ ku grafu funkcie $y(x)$, tj. ku grafu riešenia prvej rovnice, je ortogonálny k poľu (M,N). Podobne je to u druhej rovnici. Po úprave rovnice (3.2) vyjadrujú to isté a síce

$$M(x,y)\,\mathrm{d}x + N(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Definícia 3.6.1.

Nech $\Omega \in \mathbb{R}^n$ je otvorená, potom pole $\mathbf{T} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nazývame **potenciálové (konzervatívne)**, ak existuje (dostatočne hladká) funkcia $U : \Omega \to \mathbb{R}$ tak, že $\nabla U = \mathbf{T}$ na Ω. Funkcia U sa nazýva **potenciál** poľa $\mathbf{T}$.

Príklad.

Zrejme $U = \frac{x^4+y^4}{2}$ je potenciál poľa $\mathbf{T} = (2x^3, 2y^3)$ na $\mathbb{R}^2$.
Nie je však zrejmé, že pole $\mathbf{S} = (y, -x)$ nemá potenciál.

Potrebujeme si zaviesť nový pojem súvisiaci so súvislosťou množiny, ktorý bude silnejší. Voľne povedané: nechceme aby množina obsahovala ”diery”. Najprv však jeden pekný pojem z oblasti topológie.

Definícia 3.6.2.

Nech X, Y sú metrické priestory. Dve zobrazenia $f_0 : X \to Y$ and $f_1 : X \to Y$ nazveme **homotopické** ak existuje spojité zobrazenie $H : [0,1]\times X \to Y$ tak, že $H(0,x) = f_0(x)$ a $H(1,x) = f_1(x)$ $\forall x \in X$. Zobrazenie H nazývame **homotópia**.

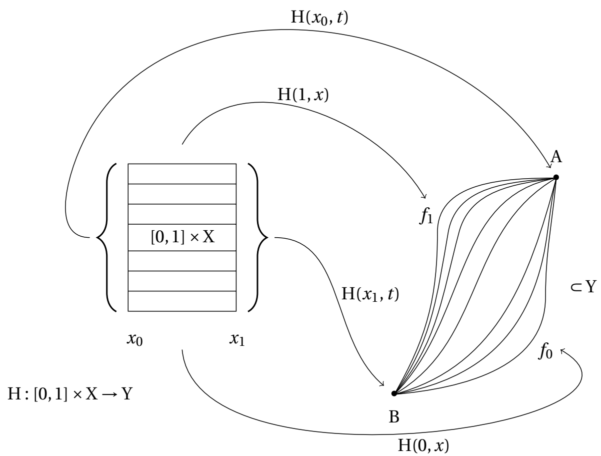
Príklad.

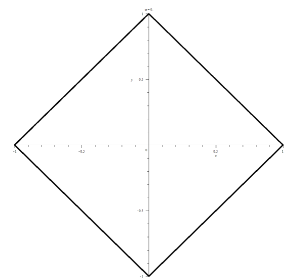
- Ľubovoľné zobrazenie $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ je homotopické so zobrazením $g(x) = (0,0), \forall x \in \mathbb{S}^1$ pre $H(t,x) = t f(x), H : [0,1] \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$.
- Ľahko overíme že každé dve uzavreté krivky $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sú homotopické. Homotópia je napr. $H_a : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ daná formulou $H_a(t,s) := (1-t)\gamma_1(s) + t\gamma_2(s),\ t,s \in [0,1]$.
- Ťažšie je overiť, že kružnice $\gamma_1(s) := (\cos(s), \sin(s))$ a $\gamma_2(s) := (\cos(s) + \frac{3}{2}, \sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]$ v priestore $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nie sú homotopické. Neformálne povedané: kružnicu γ_1 nie je možné zdeformovať na γ_2 bez toho, aby sme s γ_1 prešli začiatkom, ktorý do daného priestoru nepatrí.
- Dá sa ukázať, že pre ľubovoľné $f_i : X \to Y,\ Y \subseteq \mathbb{R}^n,\ i = 1, 2$, kde Y je konvexná, je H_a homotópiou.

Definícia 3.6.3.

(Oblúkovo) Súvislú množinu $D \in \mathbb{R}^n$ nazveme **jednoducho súvislá**, ak platí, že každá uzavretá krivka Γ obsiahnutá v D je homotopická s nejakým bodom $\mathbf{p} \in D$.

Príklad.

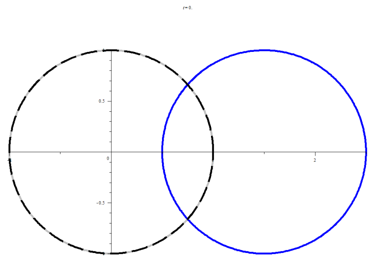


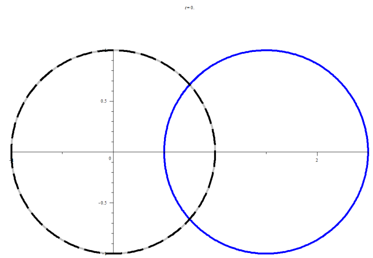


Homotópia kriviek s totožnými koncami (vľavo) a homotópia medzi štvorcom a kružnicou : $|x|^{1+\alpha} + |y|^{1+\alpha} = 1,\ \alpha \in [0, 1].$

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 56 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Príklad.

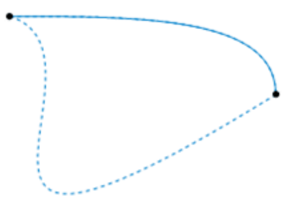




Krivky γ_1, γ_2 s homotópiami $H_1(t,s) = (1-t)\gamma_1(s) + t\gamma_2(s)$ a $H_2(t,s) =$

$$\begin{cases} (1-2t)\gamma_1(s) + 2t(\frac{3}{4}, 0), & (t,s) \in [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]; \\ (2-2t)(\frac{3}{4}, 0) + (2t-1)\gamma_2(s), & (t,s) \in [\frac{1}{2}, 1] \times [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Príklad.



Jedna z možných homotópií v $\mathbb{R}^2$ (prerušovaných kriviek) a v $\mathbb{R}^3$ (hrnček, tórus - šiška).

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 57 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Poznámka 3.6.4.

Definícia 3.6.3 vlastne hovorí, že každú uzavretú krivku vieme spojito stiahnuť (transformovať) do bodu bez toho aby sme opustili D.
Pre $n = 2$ to znamená že aj množina $\operatorname{int}\Gamma$[a] je obsiahnutá v D.
Pre $n = 3$ zasa to, že existuje v D plocha, ktorej Γ je hranica.
Pozor, množina $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{p}\}$ je jednoducho súvislá, i keď množina $\mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{p}\}$ nie !

[a] Symbol $\operatorname{int}\Gamma$ označuje vnútro množiny ohraničenej krivkou Γ.

Problém 3.6.5.

Určte, či nasledujúce množiny sú otvorené, súvislé a jednoducho súvislé.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x > 0, y > 0\}$

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x \neq 0\}$

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 < x^2 + y^2 < 4\}$

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \ \vee \ x^2 + y^2 \leq 1\}$

Pojem jednoducho súvislej oblasti sme potrebovali kvôli prípadu polí v $\mathbb{R}^2$, čo korešponduje s hľadaním riešení exaktných DR prvého rádu.

Príklad.

Nech $T_1(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $T_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $x, y \in M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Na M platí

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Dá sa ale ukázať, že pole $\mathbf{T}$ nemá potenciál na ľubovoľnej (otvorenej) množine obsahujúcej začiatok.

Veta 3.6.6 (Nutná a postačujúca podmienka potenciálnosti poľa)**.**

I) Ak $\mathbf{T} \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ má potenciál na Ω, potom platí

$$\frac{\partial T_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial T_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, 2, \dots, n \tag{3.3}$$

v Ω.

II) Ak $\mathbf{T} \in C^1(J, \mathbb{R}^n)$, kde J je otvorený interval v $\mathbb{R}^n$ a platí (3.3) na J, potom tam má pole $\mathbf{T}$ potenciál U a navyše

$$U(\mathbf{x}) = \int_{a_1}^{x_1} T_1(\xi_1, a_2, \dots, a_n)\,\mathrm{d}\xi_1 + \int_{a_2}^{x_2} T_2(x_1, \xi_2, a_3, \dots, a_n)\,\mathrm{d}\xi_2$$
$$\dots + \int_{a_n}^{x_n} T_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, \xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n + \text{konšt}, \tag{3.4}$$

kde $\mathbf{a} \in J$ je ľubovoľné.

III) Ak $\mathbf{T} \in C^1(D, \mathbb{R}^2)$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ je jednoducho súvislá otvorená množina a platí (3.3) na D ($n = 2$), potom tam má pole $\mathbf{T}$ potenciál U a platí (3.4) pre $n = 2$.

Poznámka 3.6.7 (Ako hľadať potenciál ?).

Nech je splnená nutná (aj postačujúca) podmienka potenciálnosti poľa (na nejakom intervale v $\mathbb{R}^3$). Nech $n = 3$, potom $V(x,y,z) = \int T_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + C(y,z)$, kde prvý člen je pre každé (y,z) nejaká pevne zvolená primitívna funkcia k T_1, ktorá má deriváciu podľa y aj z. Ľubovoľná iná primitívna funkcia k T_1 sa líši o konštantu, tá však môže závisieť od y, z. Pre $C(y,z)$ dostaneme z podmienky $\dfrac{\partial V}{\partial y} = T_2$

$$T_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\int T_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}C(y,z).$$

Takže pre $H(y,z) = T_2(x,y,z) - \dfrac{\partial}{\partial y}\int T_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x$ máme

$$C(y,z) = \int H(y,z)\,\mathrm{d}y + D(z).$$

Následne z podmienky $\dfrac{\partial V}{\partial z} = T_3$ dostaneme tvar funkcie D:

$$T_3(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\int T_1(x,y,z)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial z}\int H(y,z)\,\mathrm{d}y + D'(z).$$

Ak je pole (M, N) potenciálové, potom ľavá strana je totálnym diferenciálom potenciálu U poľa (M, N) - preto sa takéto rovnice nazývajú **rovnice v tvare totálneho diferenciálu**, alebo **exaktné diferenciálne rovnice**.

Veta 3.6.8.

Ak je pole (M, N) spojité a potenciálové na okolí bodu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(x_0, y_0)^2 + N(x_0, y_0)^2 \neq 0$$

a U je jeho potenciál na danom okolí. Potom pre $N(x_0, y_0) \neq 0$ $(M(x_0, y_0) \neq 0$ $)$ prvá (druhá) z rovníc (3.2) má ne nejakom okolí bodu x_0 (y_0) práve jedno riešenie splňujúce $y(x_0) = y_0$ $(x(y_0) = x_0)$ dané rovnicou $U(x, y) = U(x_0, y_0)$.

Poznámka 3.6.9.

Ak platí $M(x_0, y_0)^2 + N(x_0, y_0)^2 \neq 0$ v okolí bodu (x_0, y_0), potom rovnica $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ určuje jak funkciu $y(x)$, tak funkciu $x = g(y)$. Tieto funkcie sú k sebe navzájom inverzné a ich grafy sú rovnaké v dostatočne malom okolí bodu (x_0, y_0).

Príklad.

Nájdime riešenie rovnice $x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$ prechádzajúce bodom $(x_0, y_0) \neq (0,0)$. Potenciál poľa (x, y) je $U = \frac{x^2+y^2}{2}$. Riešenie je dané vzťahom $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$ a vyjadruje ho krivka - grafom je časť kružnice.

Otázkou je, čo v prípade, že pole (M, N) nie je potenciálové ? Pozrime sa na nasledujúci príklad.

Príklad.

Ľahko sa presvedčíme[a], že pole $\mathbf{T}(x, y) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^2}\right)$ nemá potenciál. Ale pole $\tilde{\mathbf{T}}(x, y) = x^2\mathbf{T}(x, y) = (x, y)$ ho má.

[a] Stačí overiť nutnú podmienku

Takže prirodzene zavedieme nasledujúcu definíciu.

Definícia 3.6.10.

Funkciu $\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nazývame **integračným faktorom** poľa $\mathbf{T}$ na množine $M \subset \mathbb{R}^m$, ak pole $\tilde{\mathbf{T}} = \mu\,\mathbf{T}$ má na M potenciál.

Z vety 3.6.6 ihneď máme nasledujúcu podmienku pre to, aby nejaká funkcia bola integračným faktorom.

Veta 3.6.11.

Ak sú parciálne derivácie poľa $\mathbf{T}$ spojité na $M \subset \mathbb{R}^n$. Aby funkcia $\mu : M \to \mathbb{R}$ so spojitými parciálnymi deriváciami na M bola integračným faktorom, musí platiť

$$\frac{\partial(\mu T_j)}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = \frac{\partial(\mu T_i)}{\partial x_j}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Pre $\mu(x, y) \neq 0$ máme ekvivalentnú rovnicu

$$\mu M \,\mathrm{d}x + \mu N \,\mathrm{d}y = 0.$$

Ak je teda $\mu(x, y)$ integračný faktor poľa (M, N), potom z rovníc (3.2) máme riešenie dané implicitne rovnicou $U(x, y) = U(x_0, y_0)$, kde U je potenciál poľa $(\mu M, \mu N)$. Teda podľa vety 3.6.11 existuje integračný faktor a je riešením rovnice

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = 0. \tag{3.5}$$

To je síce parciálna diferenciálna rovnica 1. rádu a jej určenie je vo všeobecnosti ťažké, ale je v špeciálnom tvare a to nám pomôže.

Otázka: ako nájsť integračný faktor ? Vo všeobecnosti je to veľmi ťažká úloha.

• **Metóda I.**

Hľadajme $\mu(x, y)$, ktoré závisí iba na x resp. y. Dosadením takého μ do (3.5) dostaneme ODR, ktorej riešenie vieme nájsť. Teda máme $\mu(x) = \mathrm{e}^{\int H(x)\,\mathrm{d}x}$, $H(x) = \frac{M_y - N_x}{N}$. Analogicky sa odvodí podmienka pre tvar integračného faktora závisiaceho iba na y.

Problém 3.6.12.

Nájdite touto metódou integračný faktor pre rovnicu (vyriešte ju)

$$\left(x^2y + 2xy + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Aby sme mohli odvôvodniť dalšiu metódu hľadania IF, budeme potrebovať nasledujúcu vetu.

Veta 3.6.13.

1) Nech je μ integračný faktor poľa (M, N) a U je potenciál poľa $(\mu M, \mu N)$. Potom pre ľubovoľnú C^1 funkciu ϕ je funkcia

$$\mu_1(x, y) = \mu(x, y)\,\phi(U(x, y))$$

integračným faktorom poľa (M, N) a potenciál $\mu_1(M, N)$ je

$$U_1(x, y) = \Phi(U(x, y)),$$

kde Φ je primitívna funkcia k ϕ.

2) Nech μ, ν sú integračné faktory poľa (M, N) v okolí bodu (x_0, y_0), pre ktorý platí

$$M(x_0, y_0)^2 + N(x_0, y_0)^2 \neq 0$$

a $\mu(x_0, y_0) \neq 0$. Ak sú U resp. V potenciály odpovedajúce μ resp. ν, potom existuje C^1 funkcia ϕ a okolie bodu (x_0, y_0), na ktorom platí

$$\nu(x, y) = \mu(x, y)\phi(U(x, y)).$$

Predchádzajúcu vetu použijeme na hľadanie integračného faktoru polí tvaru $\mathbf{T} = (M_1 + M_2, N_1 + N_2)$, ktorý budeme hľadať ako spoločný integračný faktor polí (M_i, N_i), $i = 1,2$. To preto, lebo ak je μ ich integračný faktor s potenciálmi U_i, $i = 1,2$, potom je tiež integračným faktorom poľa $\mathbf{T}$ s potenciálom $U = U_1 + U_2$.

• Metóda II.

Ak poznáme integračné faktory μ_i polí (M_i, N_i), $i = 1,2$ a im odpovedajúce potenciály U_i, $i = 1,2$, potom podľa vety 3.6.13 stačí nájsť také funkcie ϕ_i, $i = 1,2$, že platí

$$\mu_1\, \phi_1(U_1) = \mu_2\, \phi_2(U_2),$$

lebo potom funkcia $\mu = \mu_i\, \phi_i(U_i)$ bude integračným faktorom poľa $\mathbf{T}$ s potenciálom $\Phi_1(U_1) + \Phi_2(U_2)$, kde Φ_i je primitívna funkcia k ϕ_i, $i = 1,2$.

• Metóda III.

Ak poznáme integračný faktor μ_1 poľa (M_1, N_1) s potenciálom U_1, potom hľadáme funkciu ϕ_1, tak aby $\mu_1\, \phi_1(U_1)$ bolo tiež integračným faktorom poľa (M_2, N_2). Špeciálne, ak má pole (M_1, N_1) potenciál U_1 $(\mu_1 \equiv 1)$, potom pre každé ϕ_1 je $\phi_1(U_1)$ je IF tohto poľa. Môžeme sa teda pokúsiť hľadať IF poľa (M_2, N_2) závisiaceho iba od funkcie U_1. Viď nasledujúci problém.

Problém 3.6.14.

Ukážte, že pole (M, N) má IF závisiaci iba na danej funkcii $\phi(x, y)$ (tj. tvaru $\mu = H(\phi(x, y))$, kde H je funkcia jednej premennej) vtedy a len vtedy, keď funkcia $\frac{N_x - M_y}{M\phi_y - N\phi_x}$ závisí iba na $\phi(x, y)$.

Príklad (IF v špeciálnom tvare $\mu = h(x^p\, y^q)$)**.**

Overte, že rovnica $(5x^2y - 6y^4)\,\mathrm{d}x + (4x^3 - 14xy^3)\,\mathrm{d}y = 0$ nie je exaktná. Ukážeme, že má integračný faktor v tvare $\mu = h(x^p\, y^q)$. Z nutnej podmienky máme

$$h' y^{q-1} x^{p-1} \left[qx(5x^2y - 6y^4) - py(4x^3 - 14xy^3)\right] = h\left[7x^2 + 10y^3\right],$$

tj. musí platiť $5(q + 1) = 4(p + 3)$, $\;-6(q + 4) = -14(p + 1)$ a teda $p = 2$, $q = 3$. Nájdením IF nájdeme aj riešenie pôvodnej DR v tvare $U = x^5y^4 - 2x^3y^7 =$ konšt.

Príklad.

Majme pole $(M,N) = (x^2 + y^2 + x, y)$. Pole možno zapísať v tvare $(M_1 + M_2, N_1 + N_2)$, kde $(M_1, N_1) = (x^2 + y^2, 0)$ a $(M_2, N_2) = (x, y)$. Keďže druhé z polí je potenciálové s $U_2 = \frac{x^2+y^2}{2}$, hľadáme integračný faktor v tvare $\mu(x,y) = h(x^2 + y^2)$, $y \neq 0$. Dostaneme tak ODR

$$(x^2 + y^2)\, h'(x^2 + y^2) + h(x^2 + y^2) = 0.$$

Tá má riešenie $h(x^2 + y^2) = \frac{\text{konšt.}}{x^2+y^2}$. Tomuto integračnému faktoru odpovedá potenciál $W(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{2} + x$ poľa $\left(\frac{x}{x^2+y^2} + 1, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Riešenie rovnice

$$(x^2 + y^2 + x)\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y = 0$$

je preto dané rovnicou

$$\frac{\ln(x^2 + y^2)}{2} + x = \text{konšt.}$$

• Metóda IV.

Metóda použitím "inšpekcie". Ukážeme si ju na príkladoch. Rovnica

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} + \mathbf{2y}\,\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{xy}\,\mathrm{d}\mathbf{y},\ \ \mathbf{a} \neq \mathbf{0}$$

nie je exaktná avšak rovnica

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}\right) = \mathrm{d}y$$

už zjavne áno (i keď na zúženej množine).

Podobne, rovnicu

$$\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{x} + \mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{y} = \mathbf{m}(\mathbf{x}\,\mathrm{d}\mathbf{y} - \mathbf{y}\,\mathrm{d}\mathbf{x})$$

prepíšeme na tvar

$$\mathrm{d}(x^2 + y^2) = 2mx^2\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Predelením oboch strán výrazom (IF) $x^2 + y^2$ dostaneme exaktnú rovnicu

$$\frac{\mathrm{d}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{2m\,\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \leftrightarrow \ \mathrm{d}\left\{\ln\left(x^2 + y^2\right) - 2m\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right\} = 0.$$

3.7. Hľadanie riešenia DR v parametrickom tvare

Nie vždy vieme rozriešiť rovnicu $F(x, y, y') = 0$ vzhľadom na y'. Prípadne to vieme, ale je to DR veľmi zložitá a ťažko riešiteľná. Ak tak vieme urobiť vzhľadom na x alebo vzhľadom na y môže to byť cesta k nájdeniu riešenia.

Poznámka 3.7.1.

Rovnice $F(y') = 0$ zrejme majú (pre dostatočne hladké F) 1-parametrickú triedu riešení $F\left(\frac{y-C}{x}\right) = 0$.

★ Rovnice neobsahujúce hľadanú funkciu.

Nech $F(x, y') = 0$, potom sú dve možnosti:

- ak je rovnica rozriešená vzhľadom na y', tj. $y'_k = f_k(x)$, $k = 1, \ldots, m$, tak $y = \int f_k(x)\,\mathrm{d}x + C$;
- ak nie, predpokladajme, že $x = \phi(s)$, $y' = \psi(s)$, $x_0 = \phi(s_0)$, $y_0 = y(x_0)$, potom zrejme

$$y = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \psi(s(u))\,\mathrm{d}u = y_0 + \int_{\phi(\sigma_0)}^{\phi(\sigma)} \psi(\phi^{-1}(u))\,\mathrm{d}u = y_0 + \int_{s_0}^{s} \psi(\sigma)\phi'(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

pre dostatočne hladké ϕ, ψ, pričom často je $\phi(s) = s$

Príklad.

Majme DR $\mathrm{e}^{y'} + y' = x$. Zvoľme $y' = s$, zrejme $\mathrm{d}y = y'\,\mathrm{d}x = s(\mathrm{e}^s + 1)\,\mathrm{d}s$. Teda riešenie v parametrickom tvare[a] je

$$x(s) = \mathrm{e}^s + s, \quad y(s) = \int_{s_0}^{s} \sigma(\mathrm{e}^\sigma + 1)\,\mathrm{d}\sigma.$$

[a]Expl. tvar je $y(x) = \frac{x^2}{2} - LW(\mathrm{e}^x) - \frac{LW(\mathrm{e}^x)^2}{2} + C$, kde LW (Lambertova W-funkcia) je inverzia k $f(W) = W\mathrm{e}^W$.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶

Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

★ Rovnice neobsahujúce nezávislú premennú.

Nech $F(y, y') = 0$. Opäť máme dve možnosti:

- ak je rovnica rozriešená vzhľadom na y', tj. $y'_k = g_k(y)$, $k = 1, \dots, n$, tak $y : \int \frac{\mathrm{d}y}{g_k(y)} = x + C$ je riešenie v implicitnom tvare;
- ak nie, predpokladajme, že $y = \phi(s)$, $y' = \psi(s)$, $x_0 = \phi(s_0)$, $y_0 = y(x_0)$, potom obdobne obdržíme $\psi(s) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\phi'(s)}{\psi(s)}\,\mathrm{d}s$ a celkovo

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{\phi'(u)}{\psi(u)}\,\mathrm{d}u, \quad y(s) = \phi(s),$$

  ak je to dobre definované.

Príklad.

Chceme vyriešiť DR $y = \mathrm{e}^{y'}(y')^2$. Prvá parametrická rovnica je $y(s) = \mathrm{e}^s s^2$. Druhá je daná integrálom

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \frac{u\,\mathrm{e}^u(u+2)}{u}\,\mathrm{d}u = x_0 - \mathrm{e}^{s_0}(1+s_0) + \mathrm{e}^s(1+s), \;\; s_0, s \in \mathbb{R}.$$

★ D'Alembertova DR (Lagrangeova DR)

DR v tvare

$$y = xf(y') + g(y') \tag{D}$$

nazývame **D'Alembertova DR**, a špeciálne pre $f(z) = z$ **Clairautova DR**. Uvedieme si najprv **metódu hľadania riešení derivovaním**:

- **Clairautova DR** - $f(z) = z$

Zaveďme substitúciu $y' = p$ pre $p = p(x)$. Potom zo vzťahu $y = px + g(p)$ máme

$$y' = p + x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} \;\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right] = 0.$$

Takže

- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = y'' = 0$ a teda $y(x) = c_1\, x + c_2$, pričom nutne $c_2 = g(c_1)$;
- $x + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} = 0$ implikuje riešenie v parametrickom tvare

$$x(p) = -\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}, \quad y(p) = -p\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p} + g(p).$$

Veta 3.7.2.

Nech g má na (rýdzo) monotónnu spojitú deriváciu. Potom nasledujúce funkcie sú riešeniami rovnice (D) (s $f(z) = z$).

a) $y = c\,x + g(c),\ c \in (\alpha, \beta),\ x \in \mathbb{R}$

b) $$\begin{aligned} x &= -g'(s), \\ y &= -s\,g'(s) + g(s),\ s \in (\alpha,\beta),\ x \in (A, B), \end{aligned}$$

kde $A = \inf\limits_{s\in(\alpha,\beta)} \{-g'(s)\}$, $B = \sup\limits_{s\in(\alpha,\beta)} \{-g'(s)\}$. Navyše každá priamka z a) je dotyčnicou grafu funkcie $z(x) = x\,h(x) + g(h(x)),\ x \in (A, B),\ h = (-g')^{-1}$ a naopak.

Poznámka 3.7.3.

Na základe vlastnosti grafu funkcie z, nazývame ten graf **obálkou** systému priamok (vo všeobecnosti kriviek), väčšinou ide o singulárny typ riešenia. Táto vlastnosť dovoľuje konštruovať aj iné riešenia DR: nech $a < \gamma < \delta < b$, vezmime priamky dotýkajúce sa grafu funkcie z v bodoch $[\gamma, z(\gamma)]$ resp. $[\delta, z(\delta)]$. Integrálnou krivkou je tiež krivka, ktorá je po častiach tvorená 1. priamkou, grafom z a 2. priamkou.

Príklad (Asteroida).

V príklade o krivke, ktorej úsek dotyčnice medzi osami je $a > 0$ sme dospeli k DR

$$\left[x - \frac{y}{y'}\right]^2 + [y - xy']^2 = a^2,\ y' \neq 0.$$

Po úprave dostaneme

$$y = xy' \pm a\frac{|y'|}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Takže hľadanou funkciou je buď $y = cx \pm a\frac{|c|}{\sqrt{1+c^2}}, c \neq 0$, alebo funkcia určená rovnicami

$$x = \mp a\frac{\operatorname{sgn}(s)}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}}},\quad y = \pm a\frac{\operatorname{sgn}(s)s^3}{(1 + s^2)^{\frac{3}{2}}},\quad s \neq 0.$$

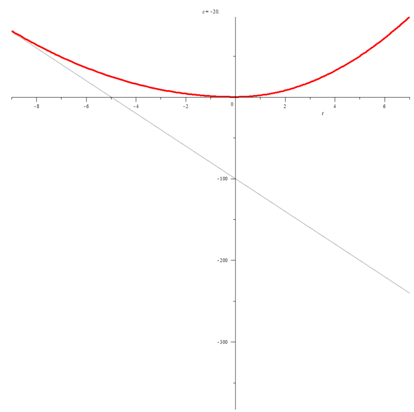
Príklad.

Riešme $y = xy' + g(y')$, kde $g(u) = \begin{cases} -\frac{u^2}{4}, & u < 0 \\ -\frac{u^2}{8}, & u \geq 0. \end{cases}$ Funkcia g je spojitá a $g'(u) = \begin{cases} -\frac{u}{2}, & u < 0 \\ -\frac{u}{4}, & u \geq 0. \end{cases}$ je spojitá a klesajúca. Podľa vety 3.7.2 máme riešenia

a) $y = \begin{cases} cx - \frac{c^2}{4}, & c < 0 \\ cx - \frac{c^2}{8}, & c \geq 0; \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ 2x^2, & x \geq 0, \end{cases}$

c) funkcie po častiach tvorené predchádzajúcimi funkciami.



Poznámka 3.7.4.

Ku Clairautovej DR vedú mnohé úlohy o dotyčniciach a systémoch priamok, ale aj v prípade, že hľadáme krivku z vlastností jej dotyčnice, nezávislej od jej dotykového bodu. Paradoxne z hľadiska geometrie sú najzaujímavejšie singulárne riešenia.

Domovská stránka

Titulná strana

Obsah

Strana 77 z 165

Späť

Full Screen

Zatvoriť

Koniec

• **D'Alembertova DR -** $f(z) \not\equiv z$
Všimnime si, že teraz vieme rovnicu prepísať ako

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y'} - \frac{f'(y')}{y' - f(y')}x = \frac{g'(y')}{y' - f'(y')},$$

pričom je to lineárna DR premenných $x(p)$, $p = y'$.

Teda opäť substituujme $y' = p$ pre $p = p(x)$. Z $y = f(p)x + g(p)$ máme

$$p = f(p) + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\left[x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}\right].$$

Nech ďalej $x(p)$ je inverzia k $p(x)$, ktorá je riešením predchádzajúcej rovnice, potom DR pre $x(p)$ má tvar

$$[p - f(p)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}p}. \tag{3.6}$$

Rovnica (3.6) je lineárna DR 1. rádu a teda riešenie v parametrickom tvare je

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{e}^{\int \frac{f'(p)}{p-f(p)}\,\mathrm{d}p}\left[\int \frac{g'(p)}{p-f(p)}\,\mathrm{e}^{-\int \frac{f'(p)}{p-f(p)}\,\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p + C\right],\\ y &= x(p)f(p) + g(p). \end{aligned}$$

Veta 3.7.5.

Nech $f, g \in C^1(\alpha, \beta)$, a $p_0 \in (\alpha, \beta)$ a na nejakom $\mathcal{O}(p_0) \subseteq (\alpha, \beta)$ nech je $p \neq f(p)$. Potom, ak funkcia

$$x(p) = \mathrm{e}^{\int_{p_0}^{p} \frac{f'(s)}{s - f(s)} \,\mathrm{d}s} \left[\int_{p_0}^{p} \frac{g'(s)}{s - f(s)} \mathrm{e}^{-\int_{p_0}^{s} \frac{f'(u)}{u - f(u)} \,\mathrm{d}u} \,\mathrm{d}s + x_0 \right], \tag{3.7}$$

$x(p_0) = x_0$, má na $\mathcal{O}(p_0)$ deriváciu rôznu od nuly, tak DR (D) má riešenie parametricky určené rovnicami (3.7) a $y = x(p)f(p) + g(p)$ na $\mathcal{O}(p_0)$.

Príklad.

Treba nájsť riešenia DR $y = x(y')^2 + (y')^3$. Položením $y' = p$ dostaneme rovnicu

$$p\left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p}(p-1) + 2x + 3p\right] = 0.$$

Ak $p = 0$, tj. $y' = 0$, tak $y = k$. Po dosadení do DR nutne $y \equiv 0$.
Ďalej nech $p > 1$. Nájdeme parametrické vyjadrenie riešenia. Zrejme

$$x = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{p-1}\,\mathrm{d}p}\left[\int \frac{3p}{p-1}\mathrm{e}^{\int \frac{2}{p-1}\,\mathrm{d}p}\,\mathrm{d}p + C\right] = \frac{C - p^2(p - \frac{3}{2})}{(p-1)^2}$$

a

$$y = x\,p^2 + p^3.$$

Obdobne postupujeme pre $p < 1$ a nakoniec aj $p = 1$.

Poznámka 3.7.6.

Metóda použitá v prípade D'Alembertovej a Clairautovej DR je niekedy použiteľná aj u iných DR.

- Rovnice tvaru $y = \phi(x, y')$: ich parametrické vyjadrenie je

$$y = \phi(x, p), \quad y' = p.$$

Ak sa dá integrovať rovnica $\frac{\partial \phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \phi}{\partial p}\,\mathrm{d}p = p\,\mathrm{d}x$ pre funkciu p alebo x, potom vieme nájsť riešenia v implicitnom tvare.

- Rovnice tvaru $x = \phi(y, y')$: ich parametrické vyjadrenie je

$$x = \phi(y, p), \quad y' = p.$$

Ak sa dá integrovať rovnica $p\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \phi}{\partial p}\,\mathrm{d}p\right) = \mathrm{d}y$, potom vieme integrovať aj pôvodnú rovnicu.

Príklad (Prípad $y = \phi(x, y')$).

Rovnica $y = (y')^2 - x y' + \frac{x^2}{2}$ vedie na DR

$$(x - p)\,\mathrm{d}x + (2p - x)\,\mathrm{d}p = p\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; (2p - x)(\,\mathrm{d}p - \,\mathrm{d}x) = 0.$$

Máme $p = \frac{x}{2}$ a $p = x + C$, teda $y = \frac{x^2}{4}$ je singulárne riešenie a $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$ je 1-parametrická trieda riešení.

Príklad (Prípad $x = \phi(y, y')$).

Uvažujme o rovnici $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$. Vyjadrime x pre $x \neq k$ (zrejme pripúšťame iba triviálne riešenie): $x = \frac{(y')^2}{4y} + \frac{2y}{y'}$. Použitím substitúcie $y' = p$ dostaneme

$$\left(\frac{p^2}{2y} - \frac{2y}{p}\right)\mathrm{d}p + \left(1 - \frac{p^3}{4y^2}\right)\mathrm{d}y = 0 \Leftrightarrow \frac{p^3 - 4y^2}{2y}\left(\frac{\mathrm{d}p}{p} - \frac{\mathrm{d}y}{2y}\right) = 0,$$

čo nám dáva $p = C_1\sqrt{|y|}$ alebo $p = (2y)^{\frac{2}{3}}$. Dosadením týchto hodnôt do rovnice "bez derivácií" dostaneme 1-parametrickú triedu riešení $|y| = C(x - C)^2$, $C = \frac{C_1^2}{4}$, riešenie $y \equiv 0$ (už zahrnuté), a singulárne riešenie $y = \frac{4x^3}{27}$.

Poznámka 3.7.7.

Niekedy je výhodné derivovať podľa premennej p namiesto x. Uvažujme rovnicu $F(x, y, y') = 0$ a hľadajme riešenia, ktoré majú $y'' \neq 0$ na nejakom J. Funkcia $p = y'(x)$ má zrejme inverziu $x(p)$, ktorá má deriváciu. Pre hladkú F derivovaním rovnice $F(x(p), y(x(p)), p) = 0$ dostaneme DR

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + p\,\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} + \frac{\partial F}{\partial p} = 0.$$

Ak naviac $\dfrac{\partial F}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, z predošlej rovnice máme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = -\frac{F_p}{F_x + p\,F_y}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = -\frac{pF_p}{F_x + p\,F_y},$$

či je systém, ktorý sa niekedy dá riešiť napr. ako dve nezávislé DR, alebo postupným integrovaním.

Príklad.

Vyriešme rovnicu $(y')^2 - 2yy' - 2x = 0$. Derivovaním podľa p dostaneme

$$(1+p^2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} = p - y, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}p} = \frac{p(p-y)}{1+p^2}.$$

Druhá rovnica je lineárna a jej všeobecné riešenie má tvar

$$y(p) = \frac{c}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{1}{2}\left[p - \frac{\ln\left(p + \sqrt{1+p^2}\right)}{\sqrt{1+p^2}}\right].$$

Funkciu x vyjadríme priamo zo zadanej DR po dosadení predchádzajúcej funkcie.

4 Sústavy DR a DR vyšších rádov

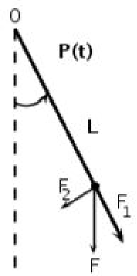
Príklad (Dvojité matematické kyvadlo)**.**

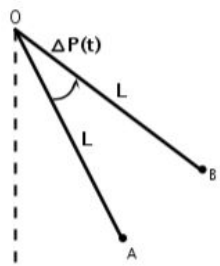
Ramená s dĺžkami $\ell_1,\ \ell_2$, HB s hmotnosťami $m_1,\ m_2$, $x_1 = \frac{\ell_1}{2}\sin\theta_1, y_1 = -\frac{\ell_2}{2}\cos\theta_1$ a $x_2 = \ell_1\sin\theta_1 + \frac{\ell_2}{2}\sin\theta_2, y_2 = -\ell_1\cos\theta_1 - \frac{\ell_2}{2}\cos\theta_2$, (obr. 4). Sústava DR má tvar (odvodená z tvaru Lagrangiánu kinetickej a potenciálnej energie)

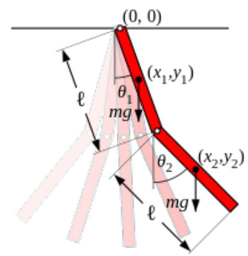
$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= \frac{\omega^2 l(-\sin\theta_1 + M\cos\Delta\theta\sin\theta_2) - Ml(\dot{\theta}_1^2\cos\Delta\theta + l\dot{\theta}_2^2)\sin\Delta\theta}{l - Ml\cos^2\Delta\theta},\\
\ddot{\theta}_2 &= \frac{\omega^2\cos\Delta\theta\sin\theta_1 - \omega^2\sin\theta_2 + (\dot{\theta}_1^2 + Ml\dot{\theta}_2^2\cos\Delta\theta)\sin\Delta\theta}{l - Ml\cos^2\Delta\theta}.
\end{aligned}$$

kde $m_1 = m_2 = m,\ l_1 = l_2 = \ell,\ M = \frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{1}{2},\ l = \frac{l_2}{l_1} = 1,\ \omega^2 = \frac{g}{l_1} = \frac{g}{l},\ \Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$.

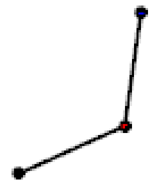
Príklad.







Jednoduché kyvadlo. Dvojité kyvadlo.



Trajektórie dvojitého kyvadla.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
Strana 87 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

4.1. Základné pojmy a vlastnosti

Uvažujme sústavu diferenciálnych rovníc pre neznáme funkcie $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ jednej reálnej premennej v tzv. normálnom tvare (derivácie príslušného rádu sa dajú explicitne vyjadriť)

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{4.1}$$

kde $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ sú reálne zadané funkcie definované a spojité na oblasti $\Omega = I \times U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a znak $'$ znamená deriváciu podľa premennej t. Zavedením stĺpcových vektorov možno (4.1) stručne zapísať aj v tvare

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}). \tag{4.2}$$

V literatúre sa používa niekoľko pojmov, ktoré sú v nejakom zmysle synonymom pojmu riešenia (4.2). Vyjasníme si to v nasledujúcej definícii.

Definícia 4.1.1.

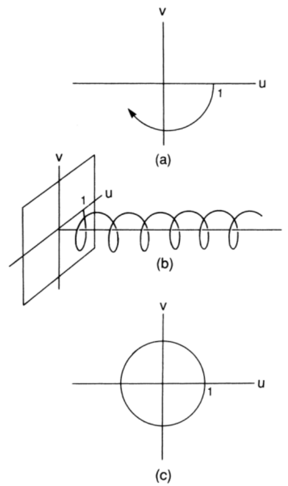
(Klasickým) riešením sústavy (4.2) v Ω na intervale $I \subset \mathbb{R}$ rozumieme zobrazenie $\mathbf{y} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, pre ktoré platí rovnosť (4.2) a pre $t \in I$ je $(t, y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \in \Omega$. Množinu U nazývame **fázový priestor** a množinu (obor hodnôt riešenia) $\mathbf{y}(I)$ **fázová krivka** (**trajektória**) - stav systému. Graf riešenia, tj. $\mathrm{gr}\,\mathbf{x} = \{(\mathrm{t}, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^\mathrm{n} \times \mathbb{R},\ \mathrm{t} \in \mathrm{I}\}$ nazývame **integrálna krivka**. Množinu $\mathcal{O}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\ \mathbf{x} = \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0),\ t \in I\}$ nazývame **orbita** predchádzajúca $\mathbf{x}_0$, pričom $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$.

Fázová krivka je projekciou integrálnej krivky do fázového priestoru pozdĺž "časovej" osi.

Príklad.

Uvažujme systém

$$\dot{u} = v,$$
$$\dot{v} = -u.$$



Riešenie prechádzajúce bodom $(u_0, v_0) = (1, 0)$ v čase $t_0 = 0$ má tvar Integrálna krivka predchádzajúca bodom $(1, 0)$ v $t = 0$ je množina $\left\{(t, u, v) \in \mathbb{R}^3 : u = \cos t, v = \sin t, \ t \in \mathbb{R}\right\}$ a orbitou je kružnica $x^2 + y^2 = 1$. Viď obrázok. Zrejme pre každé $T \in I$ je $\mathcal{O}(\mathbf{x}(T; t_0, \mathbf{x}_0)) = \mathcal{O}(\mathbf{x}_0)$

Riešeniu systému (4.2) zodpovedá krivka v priestore $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ak v každom bode $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$ je skonštruovaný vektor $\mathbf{T}$ so súradnicami $\mathbf{T}(t, \mathbf{y}) = (1, f_1(t, \mathbf{y}), \ldots, f_n(t, \mathbf{y}))$, potom hovoríme, že je dané smerové pole systému (4.2) na množine Ω. V ľubovoľnom bode každej integrálnej krivky systému (4.2) je smer dotyčnice totožný so smerom zodpovedajúceho vektora smerového poľa, skonštruovaného v tomto bode. Geometrická reprezentácia stavov systému vo fázovom priestore sa volá **fázový portrét** (súbor fázových kriviek). Fyzikálne : okamžitá rýchlosť HB $\mathbf{y}(t)$ vo fázovom priestore je rovná hodnote vektorového poľa $\mathbf{f}$ v tomto bode.

Definícia 4.1.2.

Ak $\mathbf{y}$ je riešením (4.2) v Ω na intervale I a $\tilde{\mathbf{y}}$ je riešením (4.2) v Ω na intervale $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, pričom $\mathbf{y} = \tilde{\mathbf{y}}$ na I, potom hovoríme, že $\tilde{\mathbf{y}}$ ($\mathbf{y}$) je **predĺžením (zúžením)** $\mathbf{y}$ ($\tilde{\mathbf{y}}$) na interval $\tilde{I}$ (I). Riešenie, ktoré v Ω nie je možné predĺžiť nazývame **maximálne**.

Teraz si vyjasníme vzťah medzi sústavou n DR prvého rádu a jednou DR rádu n. Nech y je riešením rovnice

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right), \tag{4.3}$$

potom, ak označíme $y_1 = y,\ y_2 = y', \dots, y_n = y^{(n-1)}$, bude funkcia $\mathbf{y}$ riešením sústavy

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \tag{4.4}$$

a naopak. Tento prevod má význam pri študovaní vlastností jednej či druhej rovnice. Zrejme však rovnica v tvare sústavy je zložitejší objekt a nie každý systém možno previesť na rovnicu vyššieho rádu.

Príklad.

Majme napríklad sústavu

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1^2, \\ y_2' &= \sqrt{y_2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Zrejme máme nezávislé rovnice, ktoré nemožno prepojiť.

Za istých predpokladov je to možné. Zderivujme prvú rovnicu z (4.2) podľa t a za y_j', $j = 1, 2, \ldots, n$, dosadíme ich vyjadrenie dané rovnicami (4.2), dostaneme tak

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} y_j' = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} f_j := F_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Toto opakujeme $(n-1)$–krát a tým dostaneme

$$y_1^{(n)} := F_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Ak z rovníc

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_1'' &= F_2(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} &= F_{n-1}(t, y_1, y_2, \dots, y_n), \end{aligned} \tag{4.6}$$

môžeme vyjadriť $y_2, y_3, \dots, y_n$ ako funkcie premenných $t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$, tj.

$$y_j = \phi_j\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \ j = 2, 3, \dots, n,$$

čo vieme (aspoň lokálne) v okolí bodu $\left(t, \mathbf{y}^0\right)$, v ktorom je $\det \tilde{\mathbf{F}}' \neq 0$ (podmienka regularity), kde $\tilde{\mathbf{F}} = (f_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ a derivácia je podľa vektora $(y_2, y_3, \dots, y_n)$, môžeme dosadením do rovnice

$$y_1^{(n)} = F_n(t, y_1, y_2, \dots, y_n),$$

dostať pre y_1 rovnicu

$$y_1^{(n)} = F_n\left(t, y_1, \phi_2\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right), \dots, \phi_n\left(t, y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}\right)\right),$$

čo je hľadaná rovnica vyššieho rádu. Dá sa ukázať, že tento vzťah je v tomto prípade obojstranný.

Problém 4.1.3.

V roku 1963 Edward Lorenz odvodil deterministický dynamický systém zo zjednodušených rovníc vynútenej konvekcie[a] v atmosfére:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sigma(y - x), \tag{4.7}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(\rho - z) - y, \tag{4.8}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = xy - \beta z, \tag{4.9}$$

kde $\sigma, \rho, \beta > 0$. Pre isté hodnoty parametrov systém vykazuje chaotické správanie sa. Ukázalo sa, že chaotické (nestabilné ?) správanie sa je dôvodom nepresnosti dlohodobej predpovede počasia. Ukážte, že sa systém dá zapísať v tvare DR tretieho rádu

$$x''' = \frac{(1+\sigma)(x')^2}{x} + x''\left(\frac{x'}{x} - \beta - \sigma - 1\right) - x'(x^2 + \beta\sigma + \beta) + \sigma x(\beta\rho - \beta - x^2).$$

[a]Prúdenie vzduchu.

4.2. Existencia, jednoznačnosť a predĺžiteľnosť riešenia

Definícia 4.2.1.

Cauchyho začiatočná úloha:

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases} \tag{CU}$$

Nasledujúca veta, ako aj veta 4.2.15 majú tzv. lokálny charakter. Teda existencia, resp. jednoznačnosť riešenia je garantovaná iba na nejakom okolí bodu $t = t_0$.

Veta 4.2.2 (Peanova o existencii (1890))**.**

Nech $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazenie. Potom pre každý bod $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega$ existuje otvorený interval $I \subset \mathbb{R}$ obsahujúci t_0, na ktorom je definované riešenie $\mathbf{y} : I \to \mathbb{R}^n$ začiatočnej úlohy (CU).

Carathéodoryho existenčná veta je zovšeobenením Peanovej vety a pokrýva širšiu množinu funkcií, pre ktoré je existencia zaručená. Táto veta však hovorí o riešení diferenciálneho systému v inom zmysle (diferencovateľnosť s.v.).

Definícia 4.2.3.

Nech (X, d_X) a (Y, d_Y) sú metrické priestory, zobrazenie $T : X \to Y$ sa nazýva **Lipschitzovsky spojité**[a] (na X), akk $\exists\, L \geq 0$ tak, že pre všetky $x_1,\ x_2 \in X$ platí

$$d_Y(Tx_1, Tx_2) \leq L\, d_X(x_1, x_2).$$

Najlepšiu konštantu L spĺňajúcu predchádzajúcu nerovnosť nazývame **Lipschitzova konštanta**. Ak $L < 1$ nazývame zobrazenie **kontrakcia (kontraktívne)**, ak $L = 1$ **neexpanzívne** a ak $L > 1$ **expanzívne**. Navyše, ak platí

$$d_Y(Tx_1, Tx_2) < d_X(x_1, x_2)$$

pre všetky $x_1,\ x_2 \in X$, tak zobrazenie nazývame **kontrahujúce**. Bod $p \in X$ nazveme **pevným bodom** zobrazenia $T : X \to X$, akk $T(p) = p$.

[a] Označujeme $\mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(X, Y)$, príp. $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X, Y)$ pre tzv. lokálne lipschitzovské funkcie.

Poznámka 4.2.4.

Zrejme platí

$$\text{kontrakcia} \Rightarrow \text{kontrahujúce zobr.} \Rightarrow \text{neexpanzívne zobr.} \Rightarrow \text{Lipschitzovské zobr.}$$

a navyše

- $C^1(X,Y) \subset \mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(X,Y) \subset \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(X,Y) \subset C(X,Y)$
- $\mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(X,Y) \subset UC(X,Y)$

Problém 4.2.5.

Ukážte, že

- $Tx = \sqrt{x}$ nie je na $\mathbb{R}^+$ kontrakcia;
- $Tx = x^2 - x + 1$ nie je na $[0,1]$ kontrakcia, ale má tam jediný pevný bod;
- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \to (0,y)$ má nekonečne veľa pevných bodov;
- $Tx = x + \frac{e^x}{1+e^x}$ je kontrahujúce na $\mathbb{R}$, ale nie je kontrakcia a nemá tam pevný bod.

Veta 4.2.6 (Banachova (1922), o pevnom bode - princíp kontrakcie)**.**

Nech (X, d) je (neprázdny) úplný metrický priestor a $F : X \to X$ je kontrakcia (s konštantou L). Potom má zobrazenie F práve jeden pevný bod $u \in X$. Navyše, pre každé $x \in X$ platí $F^{[n]}(x) \to u$ pre $n \to \infty$, pričom pre rýchlosť konvergenice platí $d\left(u, F^{[n]}x\right) \leq \frac{L^n}{1-L} d\left(Fx, x\right), \ x \in X$.

Dôsledok 4.2.7.

Nech S je uzavretá podmnožina (X, d) a $F : S \to S$ je kontrakcia. Potom pre ľubovoľné $x_0 \in S$ postupnosť $\{x_n\}_{n\geq 0}, \ x_{n+1} = Fx_n$ konverguje k pevnému bodu zobrazenia F.

Poznámka 4.2.8.

Podmienka uzavretosti je nutná. Napr. pre $X = \mathbb{R}$ a $S = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$ je $F : S \to S, \ Fx = \frac{x+1}{2}$ kontrakcia, ale nemá pevný bod v S.

Poznámka 4.2.9.

Ak F je kontrakcia s konštantou L, potom aj $F^{[n]}$, $n \in \mathbb{N}$ je kontrakcia s konštantou L^n. Naopak to platiť nemusí.
Zoberme $(Fg)(t) = \int_0^t g(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, $t \in [0,1]$, $F : C([0,1]) \to C([0,1])$ (so suprémovou metrikou). Ukázali sme, že

$$(F^{[n]}g)(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-\tau)^{n-1} g(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Pre $g_1 \equiv 1$, $g_2 \equiv 0$ máme $d_\infty(g_1, g_2) = 1 = d_\infty(Fg_1, Fg_2)$ a teda F nie je kontrakcia, ale

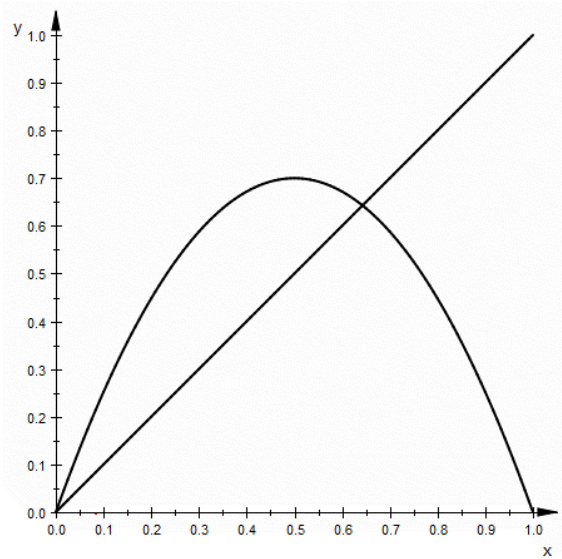
$$d_\infty(F^{[2]}f, F^{[2]}g) = \sup_{t\in[0,1]} \left| \int_0^t (t-\tau)(f(\tau) - g(\tau)) \right| \mathrm{d}\tau \le \frac{1}{2} d_\infty(f,g)$$

pre každé $f, g \in C([0,1])$. A teda $F^{[2]}$ kontrakciou je.

Dôsledok 4.2.10.

Nech (X,d) je (neprázdny) úplný metrický priestor a $F : X \to X$ je také, že $F^{[n]}$ je kontrakcia pre nejaké $n \in \mathbb{N}$, potom $Fx = x$ má jediné riešenie.

Príklad.



Iterácia $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ s $r \in (1, 1 + \sqrt{6})$ a počiatočnou hodnotou $0 < x_1 < 0.1$ konvergujúca k pevnému bodu $x^* : \quad f(x^*) = x^*$.

Lema 4.2.11 (Postačujúca podmienka Lipschitzovskosti)**.**

Nech $\mathbf{f} \in C(U, \mathbb{R}^n)$ má ohraničené parciálne derivácie na množine U, potom $\mathbf{f}$ vyhovuje na U Lipschitzovej podmienke. Navyše ak U je konvexná, tak pre $L_{\mathbf{f}} := \inf \mathcal{L}$, kde$\mathcal{L}$ je množina všetkých Lipschitzovských konštánt pre $\mathbf{f}$ (najlepšiu Lipschitzovu konštantu) platí $L_{\mathbf{f}} = \sup_U \|J_{\mathbf{f}}\|$.

Problém 4.2.12.

Ukážte, že diferencovateľná funkcia $f : [a, b] \to [c, d]$ je kontrakcia práve vtedy, keď $\exists\, \alpha < 1 : \ |f'(x)| \leq \alpha$ na $[a, b]$.

Definícia 4.2.13.

Hovoríme, že zobrazenie $\mathbf{f} \in C(I \times U = \Omega, \mathbb{R}^n)$ je **lokálne lipschitzovské** na Ω vzhľadom na $\mathbf{y}$, ak je splnená podmienka: $\forall\, (t_0, \mathbf{y}^0) \in \Omega$ existujú čísla $a > 0, b > 0, L \geq 0$ také, že

$$\|f(t, \mathbf{y}) - f(t, \mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

pre $\forall\, (t, \mathbf{y}), (t, \mathbf{x}) \in G, \ \ G = \{(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| < a, \|\mathbf{y} - \mathbf{y}^0\| < b\} \subset \Omega.$

Poznámka 4.2.14.

Zrejme $f(x) = x^2 \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \setminus \mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Veta 4.2.15 (Picardova-Lindelöfova o jednoznačnosti)**.**

Nech $I \times U = \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ je oblasť a $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ je spojité a lokálne lipschitzovské zobrazenie na Ω vzhľadom na $\mathbf{y}$. Potom pre každý bod $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega$ existuje číslo $\delta > 0$ také, že na intervale $I_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ je definované práve jedno riešenie začiatočnej úlohy (CU).

Niekedy sa predchádzajúca veta označuje aj Cauchyho-Lipschitzova-Picardova. Pozor, podmienka v predchádzajúcej vete nie je nutnou podmienkou ako ukazuje aj nasledujúci príklad.

Príklad.

Dá sa ukázať, že problém $y' = f(y),\ y(0) = \alpha,\ \alpha \in [0, 1)$, kde

$$f(y) = \begin{cases} y \ln \frac{1}{y}, & 0 < y < 1 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

má práve jedno riešenie $y(t) = \alpha^{\mathrm{e}^{-t}}$ napriek tomu, že pravá strana nie je lokálne lipschitzovská vzhľadom na y na okolí (0,0).

Poznámka 4.2.16.

Polomer intervalu I_δ z vety 4.2.15 je daný $\delta = \min\left\{a, \frac{\mathbf{b}}{K}\right\}$, kde $a, \mathbf{b} : O := [t_0 - a, t_0 + a] \times [\mathbf{y}^0 - \mathbf{b}, \mathbf{y}^0 + \mathbf{b}] \subseteq \Omega$ a $K = \max_O |f(t, \mathbf{y})|$. Navyše, dôkaz tejto vety dáva aj návod ako nájsť aproximáciu riešenia (pokiaľ je to výpočtovo možné). Ide o tzv. **Picardovu metódu postupných aproximácií**. Za nultú aproximáciu vezmime n-ticu funkcií $\mathbf{y}^0(t)$, ktoré spĺňajú začiatočnú podmienku (zväčša sa berú konštantné funkcie rovné tejto podmienke). Potom vytvoríme postupnosť nasledujúcim spôsobom:

$$\mathbf{y}^k(t) = \mathbf{y}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{f}\left(s, \mathbf{y}^{k-1}(s)\right) \mathrm{d}s, \quad k = 1, 2 \ldots, m. \tag{4.10}$$

Príklad (Stanovte prvé 3 členy Picardovej postupnosti a I_δ.)**.**

Cauchyho úloha : $y' = t - y^2,\ y(0) = 0$. Zrejme $f(t, y) = t - y^2$ aj $f_y(t, y) = -2y$ sú z $C(\mathbb{R}^2)$. Zvoľme inteval $O := [-a, a] \times [-b, b]$ a $y^0(t) = 0$. Máme $K = a + b^2$ a

$$y^1(t) = \int_0^t s\, \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2}, \quad y^2(t) = \int_0^t \left[s - \frac{s^4}{4}\right] \mathrm{d}s = \frac{t^2}{2} - \frac{t^5}{70},$$

pričom $\delta = \min\left\{a, \frac{b}{a+b^2}\right\}$.

Problém 4.2.17.

V predchádzajúcej úlohe nájdite maximálne δ.

Príklad (nejednoznačnosť)**.**

Problém $y' = y^{2/3},\ y(0) = 0$ má nekonečne veľa riešení. Nájdite ich !

Problém 4.2.18.

Dokážte, že Cauchyho úloha $y' = 1 + y^{2/3},\ y(0) = 0$ má jediné riešenie, a to aj napriek tomu, že nespĺňa podmienku (lokálna Lipschitzovskosť) vo vete 4.2.15.

Definícia 4.2.19.

Riešenie systému (4.2) sa nazýva **globálne**, ak je definované pre všetky $t \in \mathbb{R}$. (Zrejme každé globálne riešenie je maximálne, nie však naopak.)

Nasledujúca vety hovoria o predĺžiteľnosti[a] riešenia (postačujúce podmienky) na inteval príp. celú os $\mathbb{R}$. Všimnite si, že globálna Lipschitzovskosť pravej strany (vzhľadom na premennú $\mathbf{y}$) na rovnice 4.2 automaticky implikuje predĺžiteľnosť riešenia na príslušnej množine (tj. na množine, kde je pravá strana spojitá vzhľadom na premennú t).

Veta 4.2.20 (O predĺžiteľnosti riešenia)**.**
Nech D je oblasť a $f \in C(D, \mathbb{R}^n)$ je ohraničená. Nech $\mathbf{y} : (a, b) \to \mathbb{R}^n$ je riešenie začiatočnej úlohy (CU), $(t_0, \mathbf{y}^0) \in D,\ t_0 \in (a, b)$. Potom

I) limity
$$\mathbf{y}(a^+) := \lim_{t\to a^+} \mathbf{y}(t), \quad \mathbf{y}(b^-) := \lim_{t\to b^-} \mathbf{y}(t)$$
existujú;

II) naviac, ak $(a, \mathbf{y}(a^+)),\ (b, \mathbf{y}(b^-)) \in D$, tak existujú predĺženia riešenia na intervaly $(a, b + \beta),\ (a - \alpha, b)$ pre nejaké $\alpha, \beta > 0$.

[a] Tj. nenastáva tzv. ”blow-up” riešenia.

Veta 4.2.21 (O globálnom riešení)**.**

Nech $\mathbf{f} \in C(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ a pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq F(t)\, \omega(\|\mathbf{y}\|),$$

kde $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ je spojitá funkcia a $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ je spojitá a $\lim\limits_{\|\mathbf{y}\| \to 0+} \omega(\|\mathbf{y}\|) = 0$, pre ktorú naviac platí

$$\int_r^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{\omega(s)} = \infty, \;\; r > 0.$$

Potom pre všetky $(t_0, \mathbf{y}^0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ existuje globálne riešenie začiatočnej úlohy (CU).

Poznámka 4.2.22.

Ak $\omega(s) = s, F(s) \equiv 1,\; \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ a $\mathbf{f} \in \mathrm{Lip}^{\mathrm{L}}(\mathbb{R})$, potom $\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq L\|\mathbf{y}\|$. Druhá podmienka vo vete je splnená automaticky.

Dôsledok 4.2.23 (O globálnej existencii)**.**

Nech $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ a pre každé $T > 0$ existujú $M(T),\ L(T)$ tak, že

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M(T) + L(T)\,\|\mathbf{y}\|, \quad (t, \mathbf{y}) \in [-T, T] \times \mathbb{R}^n,$$

potom všetky riešenia problému (CU) sú globálne.

Problém 4.2.24.

Zamyslite sa nad tým, či môže odhad v predchádzajúcej vete vyzerať takto

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y})\| \leq M(T) + L(T)\,\|\mathbf{y}\|^{\alpha}$$

pre $\alpha \neq 1$?

Dôsledok 4.2.25.

Majme lineárny systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{LS}$$

kde $\mathbf{A}, \mathbf{b} \in C(a, b)$. Potom každým bodom pásu $P := \{(x, \mathbf{y}) : x \in (a, b)\}$ prechádza práve jedna integrálna krivka systému (LS).

4.3. Lineárna DR n-tého rádu

Majme **lineárnu DR vyššieho n-tého rádu**

$$y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} p_{n-i}(t)\, y^{(n-i)} = q(t), \tag{Ln}$$

kde $q, p_i \in C(a,b),\ i = 0, \dots, n-1.$

Dôsledok 4.3.1.

Pre každé $t_0 \in (a,b)$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ existuje jediné riešenie ϕ na (a,b) DR (Ln), ktoré spĺňa $\phi^{(i)}(t_0) = b_i,\ i = 0, \dots, n-1.$

Označme ľavú stranu (Ln) znakom $L_n(y)$, tj. rovnicu môžeme chápať v operátorovom tvare.

Veta 4.3.2.

I) Operátor L_n je lineárny na $C^n(a, b)$.

II) Lineárna kombinácia riešení DR $L_n(y) = 0$ je tiež jej riešením.

III) DR $L_n(y) = 0$ má vždy **triviálne (nulové)** riešenie.

Definícia 4.3.3.

Reálne (komplexné) funkcie $f_i, i = 1, \ldots, k$ nazveme **lineárne závislé** na intervale J, akk existuje nenulová k-tica reálnych (komplexných) čísel $\mathbf{c}$, že pre každé $x \in J$ platí: $\sum_{i=1}^{k} c_i f_i(x) = 0$. V opačnom prípade ich nazveme **lineárne nezávislé**.

Príklad.

Funkcie $f_1(x) = x, \quad f_2(x) = |x|$ sú lineárne závislé na $\mathbb{R}^+$, avšak sú lineárne nezávislé na $\mathbb{R}$.

Vidíme teda, že funkcie lineárne nezávislé na J môžu byť lineárne závislé na jeho podintervale.

Problém 4.3.4.

Ukážte, že funkcie, ktoré sú lineárne závislé na J, sú lineárne závislé aj na každom podintervale $I \subset J$.
Ukážte, že funkcie $\{1,\ \sin x,\ \cos 2x\}$ sú lineárne závislé na $\mathbb{R}$.

Podmienky LZ a LN funkcií sa dajú pomerne jednoducho vyjadriť, ak tieto funkcie majú na J derivácie do istého rádu.

Definícia 4.3.5.

Maticu

$$\mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}, \qquad x \in I.$$

nazývame **Wronského matica** funkcií $f_1,\dots,f_k$ (na J) jej determinant $\det \mathcal{W}(f_1,\dots,f_n)(x) =: W(f_1,\dots,f_n)(x)$ nazývame **wronskián**.

Príklad.

Nech $\alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{R}$ také, že $r_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j,\ \overline{r}_j = \alpha_j - \mathrm{i}\beta_j$ sú navzájom rôzne a $P_j,\ R_j,\ j = 1\ldots,k$ sú polynómy (nad poľom reálnych čísel), nie všetky nulové, ale také, že ani jedna z funkcií

$$\mathrm{e}^{\alpha_1}(P_1(x)\cos(\beta_1 x) + R_1(x)\sin(\beta_1 x)),$$

$$\mathrm{e}^{\alpha_2}(P_2(x)\cos(\beta_2 x) + R_2(x)\sin(\beta_2 x)),$$

$$\ldots$$

$$\mathrm{e}^{\alpha_k}(P_k(x)\cos(\beta_k x) + R_k(x)\sin(\beta_k x)),$$

nie je nulová.

Veta 4.3.6.

Nech $f_i \in C^{n-1}(J),\ i = 1.\dots, n.$

I) Ak sú funkcie $f_1, \dots, f_n$ lineárne závislé na J, tak $W(f_1, \dots, f_n)(x) = 0$ pre každé $x \in J$.

II) Ak existuje $x^* \in J$ také, že $W(f_1, \dots, f_n)(x^*) \neq 0$, potom sú $f_1, \dots, f_n$ lineárne nezávislé na J.

Poznámka 4.3.7.

Opačné tvrdenie k I) neplatí[a]. Kontrapríklad: $f_1(x) = |x|^3,\ f_2(x) = x^3,\ J = (-a, a),\ a > 0$. Overte!

[a] Peano ukázal, že to paltí v prípade analytických funkcií.

Veta 4.3.8 (O LN systému riešení)**.**

Nech $y_1, \dots, y_k$ je systém riešení DR $L_n(y) = 0$ na J. Potom

I) ak $k > n$, sú tieto riešenia lineárne závislé;

II) ak $k = n$, tento systém je lineárne nezávislý na J vtedy a len vtedy, ak $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0\ \forall t \in J$;

III) vždy existuje n lineárne nezávislých riešení .

Dôsledok 4.3.9.

$W(y_1, \dots, y_n)(t)$ je na J buď identicky rovný nule, alebo tam nie je rovný nule v žiadnom bode.

Definícia 4.3.10.

Množinu n lineárne nezávislých riešení homogénnej rovnice $L_n(y) = 0$ na J nazývame jej **fundamentálny systém riešení (FSR)** na J.

Poznámka 4.3.11.

Zrejme FSR $y_1, \dots, y_n$ na J je FSR aj na ľubovoľnom intervale $I \subset J$.

Veta 4.3.12.

Nech $y_1, \dots, y_n$ je FSR rovnice $L_n(y) = 0$ na J. Potom každé jej riešenie y na J dá sa napísať ako (vhodná) lineárna kombinácia riešení z tohto FSR.

Definícia 4.3.13.

Nech $y_1, \dots, y_n$ je FSR rovnice $L_n(y) = 0$ na J. Potom

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$$

nazývame jej **všeobecným riešením**.

Povedzme, že poznáme $k < n$ LN riešení rovnice $L_n(y) = 0$. Otázka je, čo s tým vieme urobiť.

Veta 4.3.14 (Zníženie rádu LDR)**.**

Nech ϕ_1 je riešením DR $L_n(y) = 0$ a $\phi_1(t) \neq I \subset J$. Nech $z_1, \dots, z_{n-1}$ je FSR DR

$$z^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} Q_{j-1}(t) z^{(j-1)} = 0,$$

kde $Q_{j-1}(t) = \dfrac{\binom{n}{j}\phi_1^{(n-j)}(t) + \sum_{i=1}^{n-j}\binom{n-i}{j} p_{n-i}(t)\phi_1^{(n-i-j)}(t)}{\phi_1(t)}$. Potom funkcie $\phi_1(t)$, $\phi_2(t) = \phi_1(t)\int z_1(t)\,\mathrm{d}t, \dots, \phi_n(t) = \phi_1(t)\int z_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$ tvoria FSR rovnice $L_n(y) = 0$ na I.

4.3.15. LDR s pravou stranou

Veta 4.3.16.

Nech $y_h(t, \mathbf{c}) = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(t)$ je všeobecným riešením $L_n(y) = 0$ prislúchajúcej DR (Ln). Nech $y_p(x)$ je riešením rovnice (Ln). Potom každé riešenie rovnice (Ln) má tvar $y = y_h + y_p$.

Poznámka 4.3.17.

Funkciu $y = y_h + y_p$ nazveme **všeobecným riešením** DR (Ln). Veta nám hovorí, že najprv treba nájsť FSR pre homogénnu DR a potom nájsť jedno riešenie rovnice s pravou stranou.

Veta 4.3.18 (LMVK)**.**

Nech $y_1, \dots, y_n$ je FSR rovnice $L_n(y) = 0$ prislúchajúcej DR (Ln). Funkcia

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^{n} y_i \int \frac{W_i}{W}\, \mathrm{d}t,$$

kde $W = W(y_1, \dots, y_n)(t)$ a W_i je determinant matice, ktorá vznikne z Wronského matice nahradením i-tého stĺpca vektorom $(0, \dots, 0, q)^T$.

Príklad.

Riešme Cauchyho úlohu $y'' - 6t^{-2}y = t \ln t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 0$. Zrejme $y_1 = t^3$ rieši rovnicu bez pravej strany. To je nenulové pre $t > 0$. Znížime rád rovnice, tj. pre $y = t^3 \int z\, \mathrm{d}t$ dostaneme DR $t^3 z' + 6t^2 z = 0$. Riešením tejto rovnice je $z = t^{-6}$ a teda máme aj druhé riešenie $y_2 = t^{-2}$. Všeobecným riešením je teda $y_h = c_1 t^3 + c_2 t^{-2}$. Podľa predchádzajúcej vety máme

$$y_p = t^3 \int \frac{-t^{-1} \ln t}{-5}\, \mathrm{d}t + t^{-2} \int \frac{t^4 \ln t}{-5}\, \mathrm{d}t = \frac{t^3 \ln^2 t}{10} + \frac{t^3}{25}\left(\frac{1}{5} - \ln t\right).$$

4.3.19. LDR s konštantnými koeficientami

Pristúpime k úvahám o lineárnej DR s konštantnými koeficientami

$$L_n^k(y) := y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\, y^{(n-i)} = 0, \tag{Lk}$$

kde $a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n-1$.

Veta 4.3.20.

Funkcia $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}$ je riešením DR (Lk) vtedy a len vtedy, ak λ_1 je koreňom algebrickej rovnice

$$f(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\, \lambda^{n-i} = 0. \tag{CH}$$

Rovnicu (CH) nazývame **charakteristickou rovnicou** a jej korene **charakteristickými koreňami** DR (Lk).

Príklad.

Hľadajme riešenia DR $y''' - y'' + 4y' - 4y = 0$. Jej charakterstická rovnica (CH) je $\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 4 = (\lambda^2 + 4)(\lambda - 1) = 0$ a jej korene $\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm 2\mathrm{i}$. Funkcie $\{\mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t}\}$ tvoria jej FSR.

Veta 4.3.21 (Rôzne charakteristické korene)**.**

Nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_k,\ k \leq n$ sú navzájom rôzne charakteristické korene rovnice Lk. Potom $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_k t}$ sú LN riešenia rovnice Lk.

Dôsledok 4.3.22.

Ak $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sú navzájom rôzne charakteristické korene rovnice Lk. Potom funkcie $\mathrm{e}^{\lambda_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n t}$ tvoria FSR rovnice Lk.

Podľa vety 4.3.20 vieme nájsť k LN riešení, ak korene rovnice (CH) sú jednoduché. To však vo všeobecnosti neplatí.

Lema 4.3.23.

Ak λ_1 je k-násobným koreňom polynómu $P_n(x), k \leq n$, potom

$$P(\lambda_1) = 0,\ P'(\lambda_1) = 0, \ldots, P^{(k-1)}(\lambda_1) = 0,\quad P^{(k)}(\lambda_1) \neq 0.$$

Veta 4.3.24 (Viacnásobný charakteristický koreň)**.**

Nech λ_1 je k-násobným charakteristickým koreňom rovnice (Lk). Potom $e^{\lambda_1 t}, t\,e^{\lambda_1 t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda_1 t}$ sú LN riešenia rovnice (Lk).

Nasledujúca veta hovorí o nájdení FSR rovnice (Lk).

Veta 4.3.25.

Nech (CH) má m rôznych charakteristických koreňov, pričom λ_i, $i = 1, \ldots, m$ je k_i-násobný (teda $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$). Potom funkcie

$$\left\{e^{\lambda_i t}, t\,e^{\lambda_i t}, \ldots, t^{k_i-1}e^{\lambda_i t}\right\}_{i=1}^{m}$$

tvoria jej FSR.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 120 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Príklad.

Charakterstická rovnica pre DR $y'' + 2y' + y = 0$ má tvar $(\lambda + 1)^2 = 0$. Má jeden dvojnásobný koreň $\lambda_1 = -1$. Z toho máme FSR=$\{e^{-t}, t\,e^{-t}\}$.

Ako sme videli, prvok vo FSR nemusí byť reálna funkcia. Platí však:

Lema 4.3.26.

Nech $z(t) = u(t) + \mathrm{i}\, v(t)$, kde u, v sú reálne funkcie reálnej premennej, je riešením DR (Ln). Potom

1. $u = \mathrm{Re}(z), v = \mathrm{Im}(z)$ sú tiež jej riešenia;
2. $\bar{z}(t) = u(t) - \mathrm{i}\, v(t)$ je tiež jej riešením;
3. pre reálne začiatočné hodnoty je riešenie reálna funkcia (reálnej premennej).

Na základe tejto lemy vieme že FSR sa musí dať zapísať iba pomocou reálnych funkcií. Nech DR (Ln) má nasledujúci FSR=$\{\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r, y_1, \dots, y_s, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_s}\}$, pričom zrejme $r + 2s = n$ a funkcie $\tilde{y}_i$ nech sú reálne. Keďže $\mathrm{Re}(y_j) = \frac{y_j + \overline{y_j}}{2}$, $\mathrm{Im}(y_j) = \frac{y_j - \overline{y_j}}{2\mathrm{i}}$, tvoria $\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_r, \mathrm{Re}(y_1), \dots, \mathrm{Re}(y_s), \mathrm{Im}(y_1), \dots, \mathrm{Im}(y_s)$ tiež FSR pre DR (Ln) a je zložený iba z reálnych funkcií.

Veta 4.3.27.

Nech $\lambda_i,\ i = 1\dots,m,\ m \geq 0$ je k_i-násobným reálnym charakteristickým koreňom a $\alpha_j + \mathrm{i}\beta_j,\ j = 1\dots,p,\ p \geq 0$ je s_j-násobným komplexným charakteristickým koreňom rovnice (Lk), pričom všetky korene sú navzájom rôzne, $\sum\limits_{i=1}^{m} k_i + 2\sum\limits_{j=1}^{p} s_j = n,\ \beta_j \neq 0$ (a z konjugovaného páru beriem len jeden). Potom FSR rovnice (Lk) tvoria funkcie

$$\left\{\mathrm{e}^{\lambda_i t}, t\,\mathrm{e}^{\lambda_i t}, \dots, t^{k_i-1}\mathrm{e}^{\lambda_i t}\right\}_{i=1}^{m},$$

$$\left\{\mathrm{e}^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), t\,\mathrm{e}^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t), \dots, t^{s_j-1}\mathrm{e}^{\alpha_j t}\cos(\beta_j t)\right\}_{j=1}^{p},$$

$$\left\{\mathrm{e}^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), t\,\mathrm{e}^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t), \dots, t^{s_j-1}\mathrm{e}^{\alpha_j t}\sin(\beta_j t)\right\}_{j=1}^{p}.$$

V prípade, že riešime rovnicu $L_n^k(y) = q(t)$, môžeme samozrejme použiť LMVK. V prípade, že pravá strana ($q(t)$) je v špeciálnom tvare, je možné použiť aj inú metódu.

Veta 4.3.28 (Metóda neurčitých koeficientov)**.**

Pre DR $L_n^k(y) = P_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, kde P_m je polynóm stupňa m a $\alpha \in \mathbb{C}$ je p-násobným charakteristickým koreňom príslušnej rovnice $L_n^k(y) = 0,\ p \ge 0$. Potom partikulárne riešenie rovnice $L_n^k(y) = q(t)$ má tvar $y_p = Q_{m+p}(t)\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, kde Q_{m+p} je polynóm stupňa $m+p$.

Ak predpokladáme, že $Q_{m+p}(t) = \sum_{j=0}^{m+k} c_j\, t^j$, potom z dôkazu vety vyplýva, že prvých k koeficientov môžeme voliť ľubovoľne, teda $c_0 = c_1 = \cdots = c_{k-1} = 0$. Ostatné nájdeme porovnaním polynómov po dosadení y_p do rovnice. Napr. mocnina t^m sa vyskytuje na ľavej strane len v jednom člene a jeho koeficient je $\frac{(m+k)!}{m!k!} f^{(k)}(\alpha) c_{m+k}$, ten sa musí rovnať koeficientu pri t^m v polynóme P_m.

Príklad.

Riešme DR $y'' - 2y' + y = (t^2 + 2t^3)\mathrm{e}^t$. (CH) pre rovnicu bez pravej strany má dvojnásobný koreň $\lambda_1 = 1$, preto FSR je $\{\mathrm{e}^t, t\,\mathrm{e}^t\}$. Na nájdenie partikulárneho riešenia použijeme MNK. Zrejme $m = 3$ a $\alpha = 1$ je dvojnásobným koreňom, teda $k = 2$. Ansatz: $y_p = (c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + c_5t^5)\mathrm{e}^t$. Ukážte, že $c_2 = c_3 = 0,\ c_4 = \frac{1}{12},\ c_5 = \frac{1}{10}$!

Ak pravá strana LDR s konštantnými koeficientami je tvaru $P_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t)$, resp. $P_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t)$, môžeme postupovať takto: upravíme si ju na tvar $P_m(t)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,t}$ a použijeme predchádzajúcu aj nasledujúcu vetu.

Veta 4.3.29.

Ak je funkcia $z(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ riešením DR $L_n^k(y) = P_m(t)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\,t}$, potom $u = \mathrm{Re}(z)$ je riešením DR $L_n^k(y) = P_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\cos(\beta\,t)$ a $v = \mathrm{Im}(z)$ je riešením DR $L_n^k(y) = P_m(t)\,\mathrm{e}^{\alpha\,t}\sin(\beta\,t)$.

Príklad.

Riešme DR $y'' - y' - 2y = (1+t)\mathrm{e}^t\cos(3t)$. Namiesto nej budeme riešiť DR $y'' - y' - 2y = (1+t)\mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})\,t}$. V tomto prípade $\alpha = 1+3\mathrm{i}$, $m = 1$, $P_1(t) = 1+t$, $k = 0$. Ansatz: $y_p = (c_0 + c_1 t)\mathrm{e}^{(1+3\mathrm{i})\,t}$. Ukážte, že

$$c_0 = -\frac{1146}{130^2} - \frac{1128}{130^2}\mathrm{i}, \quad c_1 = -\frac{11}{130} - \frac{3}{130}\mathrm{i}.$$

Stačí zobrať $\mathrm{Re}(y_p)$.

Inou možnosťou je použitie priamo reálneho tvaru partikulárneho riešenia

$$y_p = \mathrm{e}^{\alpha t}(Q_r(t)\cos(\beta t) + R_s(t)\sin(\beta t)),\ \ \alpha,\beta \in \mathbb{R},\ \ r,s \in \mathbb{N}_0.$$

Takáto metóda je samozrejme použiteľná aj v prípade iných pravých strán, otázka ale je, či vieme určiť parametrickú triedu funkcií, ktorá obsahuje s istotou partikulárne riešenie.
Nasledujúca veta nám dáva návod, ako riešiť situáciu, keď pravá strana je súčtom niekoľkých funkcií a je pritom pre nás výhodné rozdliť si úlohu hľadania partikulárneho riešenia na niekoľko subúloh.

Veta 4.3.30 (Princíp superpozície riešení)**.**

Nech y_k je riešením DR $L_n(y) = q_k(t)$, $k = 1, \ldots, m$. Potom funkcia $y = \sum_{k=1}^{m} y_k$ je riešením DR $L_n(y) = \sum_{k=1}^{m} q_k(t)$.

4.3.31. Eulerova diferenciálna rovnica

DR tvaru

$$E_n(y) := (at+b)^n\, y^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}\,(at+b)^{n-i}\, y^{(n-i)} = q(t), \tag{E}$$

kde $a, b, a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, \ldots, n-1,\ a \neq 0$, nazývame **Eulerova DR**.
Nech $[c, d]$ je interval taký, že $at + b > 0$ (pre $at + b < 0$ sú úvahy obdobné). Dá sa ukázať, že platí:

- ak y je riešením rovnice $E_n(y) = 0$ na $[c, d]$, potom $z = y\left(\frac{\mathrm{e}^u - b}{a}\right)$ je riešením DR $L_n^k(z) = 0$ na $[C, D] = [\ln(ac + b), \ln(ad + b)]$ (po transformácii $at + b = \mathrm{e}^u$);
- ak z je riešením DR $L_n^k(z) = 0$ na $[C, D]$, potom $y = z(\ln(at + b))$ je riešením rovnice $E_n(y) = 0$ na $[c, d]$.

Máme teda 2 možnosti:

- transformujeme rovnicu (E) na DR s konštantnými koeficientami, tú vyriešime a transformujeme výsledok späť
- použijeme predpoklad, že riešenia rovnice $E_n(y) = 0$ majú tvar $y = (at+b)^\lambda$, pričom dostaneme charakteristickú rovnicu Eulerovej DR $\quad (at+b)^\lambda g(\lambda) = 0$, kde

$$g(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)a^n + a_{n-1}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+2)a^{n-1} + \dots + a_1 a\lambda + a_0$$

Príklad.

Riešme DR

$$t^4 y^{(iv)} + 4t^3 y''' + 2t^2 y'' - 12ty' + 20y = 0.$$

Riešenie hľadáme v tvare $y = t^\lambda$. Po úprave dostaneme charakteristickú rovnicu $\lambda^4 - 2\lambda^3 + \lambda^2 - 12\lambda + 20 = 0$, ktorej korene sú $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_{3,4} = -1 \pm 2i$. FSR tvoria funkcie

$$t^2, t^2 \ln t, \frac{\cos(2\ln(t))}{t}, \frac{\sin(2\ln(t))}{t},$$

overte to!

4.4. Lineárne sústavy DR

Budeme uvažovať sústavu (4.2), kde $\mathbf{f}$ bude v tvare lineárnej funkcie. Systém zapíšeme skrátene

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \tag{4.11}$$

kde funkcie $b_j(t)$ a koeficienty matice $\mathbf{A}(t) = (a_{jk}(t)) \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$, $j, k = 1, 2, \ldots, n$ sú spojité (vo všeobecnosti komplexné) funkcie na intervale $I \subset \mathbb{R}$. Ak $\mathbf{b} = 0$ hovoríme o homogénnej sústave prislúchajúcej systému (4.11). Nasledujúca veta nám hovorí o algebraickej štruktúre riešení tohoto diferenciálneho systému (4.11).

Veta 4.4.1.

Množina všetkých (vo všeobecnosti komplexných) riešení homogénneho systému prislúchajúcemu (4.11) tvorí n-rozmerný vektorový priestor.

Definícia 4.4.2.

Vektorové funkcie $\mathbf{h}^1, \ldots, \mathbf{h}^n$ definované na intervale I nazývame **lineárne závislé** v intervale I, akk existujú konštanty $c_1, \ldots c_n$, ktoré nie sú všetky rovné nule, také, že pre každé $t \in I$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathbf{h}^i(t) = 0.$$

Ak funkcie nie sú lineárne závislé nazývame ich **lineárne nezávislé**.

Problém 4.4.3.

Zrejme $\mathbf{h}^1(t) = (\mathrm{e}^{3t}, 2\mathrm{e}^t)$ a $\mathbf{h}^2(t) = (2\mathrm{e}^{3t}, 4\mathrm{e}^t)$ sú lineárne závislé v $\mathbb{R}$. Ukážte to.

Ukážte, že $\mathbf{h}^1(t) = (\mathrm{e}^t, 0, 2\mathrm{e}^t)$, $\mathbf{h}^2(t) = (\mathrm{e}^{-t}, 3\mathrm{e}^{-t}, 0)$, $h_1(t) = (\mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{2t}, \mathrm{e}^{2t})$ sú lineárne nezávislé v $\mathbb{R}$.

Definícia 4.4.4.

Každú n-ticu $\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^n$ lineárne nezávislých riešení sústavy (4.11) nazveme **fundamentálny systém** riešení (FSR). Maticu, ktorej stĺpce tieto riešenia tvoria nazývame **fundamentálna matica** a označíme ju $\Phi(t)$.

Príklad.

Majme systém

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_2, \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Potom

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{a} \ \Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

je fundamentálna matica tohto systému.

Definícia 4.4.5.

Adjungovaná matica je transponovaná matica algebraických doplnkov (kofaktorov). Teda adj$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{\mathsf{T}}$, kde $C_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}$, kde $\mathbf{A}_{ij}$ je štvorcová matica, ktorú získame z matice $\mathbf{A}$ odstranením i-tého riadku a j-tého stĺpca.

Uvedieme si vyjadrenie derivácie determinantu matice $\mathbf{A}$ pomocou k nej adjungovanej matici a derivácie samotnej matice $\mathbf{A}$. Keďže platí $\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ki}$ pre ľubovoľné i, máme

$$\mathrm{d}\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial a_{ij}}\,\mathrm{d}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} C_{ji}\,\mathrm{d}a_{ij}.$$

Dostaneme tak nasledujúcu lemu.

Lema 4.4.6 (Jacobiho formula)**.**

Nech $\mathbf{A}$ je diferencovateľné zobrazenie z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (matica), potom $\mathrm{d}\det \mathbf{A} = \mathrm{tr}(\mathrm{adj}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}\mathbf{A})$.

Je známe, že ak je matica $\mathbf{A}$ regulárna, potom pre jej inverziu platí $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,\mathbf{A}}{\det \mathbf{A}}$.

Dôsledok 4.4.7.

Nech $\mathbf{A}$ je diferencovateľná a invertovateľná na $I \subset \mathbb{R}$. Potom platí

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A}) \operatorname{tr}\left(\mathbf{A}^{-1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mathbf{A}\right).$$

Nasledujúca veta nám vyjadruje determinant FSR homogénneho systému prislúchajúcemu (4.11) v tvare sumy diagonálnych prvkov koeficentov matice $\mathbf{A}(t)$. Jej dôsledok nám poslúži pri vyšetrovaní lineárnej závislosti či nezávislosti systému vektorových funkcií, ktoré sú riešeniami homogénneho systému diferenciálnych rovníc.

Veta 4.4.8 (Abelova-Liouvilleova formula)**.**

Nech $\Phi(t)$ je fundamentálna matica homogénneho systému prislúchajúcemu (4.11) na otvorenom intervale I, potom pre všetky $t, t_0 \in I$ platí

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(t_0)\, \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} \mathbf{A}(\xi)\, \mathrm{d}\xi}.$$

Tento vzťah má aj peknú geometrickú interpretáciu, opisuje totiž vývoj objemu rovnobežnostena generovaného počiatočnými vektormi $\mathbf{y}^1(t_0), \ldots \mathbf{y}^n(t_0)$.

Príklad (Použitie Abelovej-Liouvilleovej formuly).

Riešme na $I = (0, \infty)$ systém

$$\mathbf{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{x} \\ 1+x & -1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}(x)} \mathbf{y},$$

Predpokladajme, že sme jedno riešenie

$$\mathbf{y}_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

už našli. Potom z toho, že $\operatorname{tr} \mathbf{A}(x) = 0$ pre $x \in I$ a každý vektor fundamentálnej matice

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} y_{21}(x) & 1 \\ y_{22}(x) & x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

rieši náš systém, máme $c_1 := \det \Phi(x) = x\, y_{21}(x) - y_{22}(x),\ x \in I$. Z toho a tvaru systému však máme $(y_{21})'(x) = \frac{c_1}{x}$, teda $y_{21}(x) = c_1 \ln x + c_2,\ x \in I$ a navyše $y_{22}(x) = c_1 x \ln x + c_2 x - c_1,\ x \in I$. Voľba $c_1 = 1$ a $c_2 = 0$ nám dáva lineárne nezávislé riešenie a tak

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \ln x & 1 \\ x \ln x - 1 & x \end{pmatrix}, \qquad x \in I,$$

je hľadané fundamentálne riešenie.

Dôsledok 4.4.9.

Ak $\det \Phi(t_0) \neq 0$, tak $\det \Phi(t) \neq 0 \ \forall\, t \in I$. Ak $\det \Phi(t_0) = 0$, tak $\det \Phi(t) \equiv 0$.

Poznámka 4.4.10.

Všimnime si, že $\det \Phi(t)$ je istou obdobou Wronského determinantu (wronskiánu) riešení pre rovnice vyšších rádov, niekedy sa tento pojem používa aj per systémy DR. Z dôsledku aj vyplýva podobný záver. Ak je wronskián riešení daného systému nenulový v jednom bode intervalu I, potom je nenulový na celom intervale, čo znamená, že tieto riešenia sú lineárne nezávislé v I.

Veta 4.4.11 (Princíp superpozície)**.**

1. Ak sú $\mathbf{y}^j$ riešením sústav
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}^j(t), \;\; j = 1, 2, \ldots, n,$$
potom pre l'ubovol'né čísla α^j je $\alpha^1\,\mathbf{y}^1 + \cdots + \alpha^n\,\mathbf{y}^n$ je riešením sústavy
$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \alpha^1\,\mathbf{b}^1 + \cdots + \alpha^n\,\mathbf{b}^n,$$
2. Ak je $\mathbf{y}_p$ partikulárne riešenie sústavy (4.11), potom všeobecné riešenie tejto sústavy je
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_p + \sum_{j=1}^{n} c_j\,\mathbf{y}^j,$$
kde $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \ldots, \mathbf{y}^n$ je FSR príslušnej homogénnej sústavy a $\mathbf{c}$ sú l'ubovol'né konštanty.

Teraz treba ešte vyriešit' otázku, ako získame partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p$, ak máme FSR. Odpoved' dáva znovu, (podobne ako u lineárnych diferenciálnych rovníc vyšších rádov) metóda variácie konštánt.

Partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p(t)$ nehomogénneho systému (4.11) na intervale I hľadáme v tvare $\mathbf{y}_p(t) = \Phi(t)\,\mathbf{C}(t)$. Našou úlohou je nájsť funkcie $\mathbf{C}(t)$. Pri dosadzovaní funkcie $\mathbf{y}_p$ do rovnice, ktorej má vyhovovať sa riadime tým, že pre operáciu derivovania súčinu matíc platí rovnaké pravidlo ako pre derivovanie súčinu funkcií. Takže po dosadení máme

$$\Phi'(t)\mathbf{C}(t) + \Phi(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)\mathbf{C}(t) + \mathbf{b}(t).$$

Keďže vieme, že pre FSR platí $\Phi'(t) = \mathbf{A}(t)\Phi(t)$ a existuje matica $\Phi^{-1}(t)$, dostaneme implikáciu

$$\Phi(t)\mathbf{C}'(t) = \mathbf{b}(t) \Leftarrow C(t) = \int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Takže máme hľadané partikulárne riešenie $\mathbf{y}_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\mathbf{b}(t)\,\mathrm{d}t$.

Veta 4.4.12 (Variácia konštánt)**.**

Nech $\mathbf{y}^1, \mathbf{y}^2, \dots, \mathbf{y}^n$ je FSR homogénnej sústavy príslušnej k (4.11), potom pre každé spojité $\mathbf{b}$ existujú také funkcie $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$, že funkcia

$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{n} c_j(t)\,\mathbf{y}^j$$

rieši (4.11)

Dôsledok 4.4.13 (Riešenie nehomogénnej nelineárnej rovnice)**.**

Riešenie začiatočnej úlohy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{g}(t, \mathbf{y}), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases}$$

je dané rovnicou

$$\mathbf{y} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\,\mathbf{g}(s, \mathbf{y})\,\mathrm{d}s \tag{4.13}$$

Dôsledok 4.4.14 (Riešenie nehomogénnej lineárnej rovnice)**.**

Riešenie začiatočnej úlohy

$$\begin{cases} \mathbf{y}' = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{y} + \mathbf{b}(t), \\ \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^0 \end{cases}$$

má tvar

$$\mathbf{y} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(t_0)\,\mathbf{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(s)^{-1}\,\mathbf{b}(s)\,\mathrm{d}s \tag{4.14}$$

4.4.15. Systémy lineárnych diferenciálnych rovníc s konštantnými koeficientami

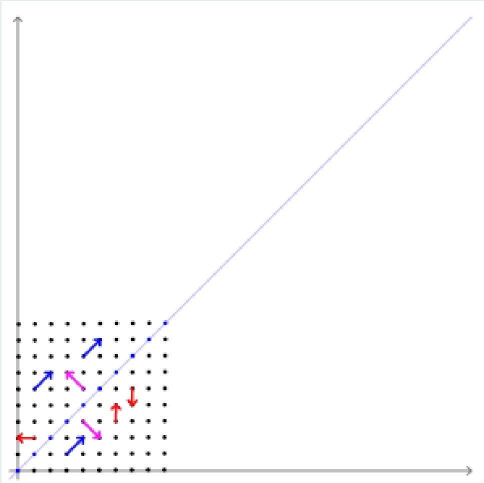
Majme systém 4.11, kde matica $\mathbf{A}(t)$ nezávisí na t a $\mathbf{b}(t) = 0$. Teda majme systém

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}\,\mathbf{y}. \tag{4.15}$$

Pozrieme sa na metódu vlastných vektorov - výpočtu riešenia pomocou tzv. charakteristickej rovnice. Predpokladajme, že riešenie (4.15) je v tvare $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\,\mathbf{h},\ t \in I$, kde $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ je reálny alebo komplexný vektor a λ je reálne alebo komplexné číslo. Po dosadení máme $\mathbf{y}' = \lambda e^{\lambda t}\mathbf{h} = e^{\lambda t}\,\mathbf{A}\mathbf{h},\ \forall\, t \in I$. Teda $(\lambda\mathbf{I} - A)\mathbf{h} = \mathbf{0},\ \forall\, t \in I$. Táto sústava má nenulové riešenie $\mathbf{h}$ iba vtedy, keď jej matica bude singulárna. Musí teda platiť

$$P(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0,$$

tj. tzv. **charakteristický polynóm** (stupňa n) pre diferenciálny systém (4.15) je rovný nule.



- matica $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} : \lambda_1 = 1, \lambda = 3$
- rovnobežné vektory s vl. vektormi $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ (fialové, modré) nemenia smer
- červené vektory menia smer

Veta 4.4.16 (Prípad navzájom rôznych vlastých hodnôt).

Nech $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($\in \mathbb{C}$) sú navzájom rôzne vlastné hodnoty matice A, a $\mathbf{v}^i$ je vlastný vektor zodpovedajúci vlastnej hodnote λ_i, pričom $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n$ sú lineárne nezávislé. Potom FSR (vo všeobecnosti komplexný) diferenciálnej rovnice (4.15) má tvar $\mathbf{y}^i(t) = \mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{v}^i$, $i = 1, \ldots, n$.

Poznámka 4.4.17.

Zrejme

$$\mathbf{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \,\mathrm{e}^{\lambda_i t}\mathbf{v}^i, \quad C_i \in \mathbb{R}$$

je tvar všeobecného riešenia systému (4.15).

Tvrdenie vety 4.4.16 zostáva v platnosti aj v prípade komplexných koreňov. Problém je v tom, že riešenie je potom v komplexnom tvare. Je však možné skonštruovať z nich riešenia v reálnom tvare. Predpokladajme, že $\lambda = p + \mathrm{i}q$ je koreňom charakteristickej rovnice s prislúchajúcim vlastným vektorom. Zrejme aj $\overline{\lambda} = p - \mathrm{i}q$ je jej koreňom. Vieme, že $\mathbf{y}(t) = \mathbf{v}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$ je riešením systému (4.15), ukážeme, že aj $\overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{v}}\,\mathrm{e}^{\overline{\lambda} t}$ ním je. Vyplýva to priamo z toho, že $(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \overline{(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow (\overline{\lambda}\,\mathbf{I} - \mathbf{A})\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Vzhľadom na linearitu priestoru riešení sú riešeniami aj všetky lineárne kombinácie funkcií $\mathbf{y}(t), \overline{\mathbf{y}}(t)$, teda aj funkcie

$$\operatorname{Re}\mathbf{y}(t) = \frac{\mathbf{y}(t) + \overline{\mathbf{y}}(t)}{2}, \operatorname{Im}\mathbf{y}(t) = \frac{\mathbf{y}(t) - \overline{\mathbf{y}}(t)}{2\mathrm{i}}.$$

Veta 4.4.18 (Prípad komplexných vlastných hodnôt).

Nech $\lambda = \sigma + \mathrm{i}\,\omega$ je k-násobný koreň charakteristickej rovnice pre diferenciálnu rovnicu (4.15), tj. polynóm $P(\lambda) = \det(\lambda\,\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, pričom k nemu existuje k lineárne nezávislých vlastných vektorov: $\mathbf{w}^j = \mathbf{g}^j + \mathrm{i}\,\mathbf{h}^j$, $j = 1, \ldots, k$. Potom množina riešení tvaru $(\mathbf{a}\cos\omega t + \mathbf{b}\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t}$ je vektorový podpriestor množiny všetkých riešení dimenzie $2k$, pričom jeho báza je

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^j(t) &= (\mathbf{g}^j\cos\omega t - \mathbf{h}^j\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t}, \\ \mathbf{r}^j(t) &= (\mathbf{h}^j\cos\omega t + \mathbf{g}^j\sin\omega t)\,\mathrm{e}^{\sigma t}, \quad j = 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{4.16}$$

O niečo komplikovanejší je postup v prípade násobných vlastných čísel. Vieme však, že každému násobnému vlastnému číslu musí zodpovedať presne toľko lineárne nezávislých riešení, aká je jeho násobnosť. Medzi nimi sa vždy vyskytuje aspoň jedno riešenie tvaru $\mathbf{h}\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Môžu však pribudnúť ďalšie riešenia, ktoré už tento tvar nemajú. Ak nastane situácia, že vlastný podpriestor prislúchajúci nejakej vlastnej hodnote nemá plnú dimenziu, musíme ju dpolniť pomocou tzv. zovšeobecnených vlastných vektorov.

Definícia 4.4.19.

Nenulový vektor $\mathbf{v}$ sa nazýva **zovšeobecnený vlastný vektor** rádu p matice $\mathbf{A}$ prislúchajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$, ak existuje $p \in \mathbb{N}$ tak, že $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^p\mathbf{v} = \mathbf{0}$ a $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{p-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Usporiadanú p–ticu $(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2, \dots \mathbf{v}^p)$, $\mathbf{v}^k = (\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})^{p-k}\mathbf{v},\ k = 1, 2, \dots, p$ nazývame **reťazec** zovšeobecnených vlastných vektorov rádu p matice $\mathbf{A}$ vytvorený vektorom $\mathbf{v}$.

Poznámka 4.4.20 (O nulite matice).

Počet lineárne nezávislých vlastných vlastných vektorov zopdpovedajúcich násobnému číslu λ je ronvý nulite (rozdiel $n - h(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})$) matice $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Poznámka 4.4.21.

Platí $(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^1 = 0$, $(\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1, \ldots, (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^{p-1} = \mathbf{v}^{p-2}, (\mathbf{A}-\lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v}^p = \mathbf{v}^{p-1}$.

Veta 4.4.22 (Prípad zovšeobecnených vlastných hodnôt)**.**

Nech $\left(\mathbf{v}^1, \ldots \mathbf{v}^m\right)$ je reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov matice $\mathbf{A}$ zodpovedajúci vlastnému číslu λ matice $\mathbf{A}$ vytvorený vlastným vektorom $\mathbf{v}$. Potom vektorové funkcie (vo všeobecnosti komplexné)

$$\mathbf{s}^k(t) = \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{v}^i\, t^{k-i}}{(k-i)!}\right) \mathrm{e}^{\lambda\, t},\ k = 1, \ldots, m$$

sú lineárne nezávislé riešenia rovnice (4.15).

Poznámka 4.4.23.

Vo všeobecnosti je FSR zjednotením všetkých množín lineárne nezávislých riešení zodpovedajúcich všetkým koreňom charakteristickej rovnice.

Pozrieme sa ešte na metódu neurčitých koeficientov pre nehomogénne rovnice s konštantými koeficientami.

Veta 4.4.24.

Nech $\mathbf{b}(t)$ je stĺpec, ktorého zložky sú polynómy stupňa najviac m. Nech nula je k-násobný koreň charakteristickej rovnice matice A. Potom existuje partikulárne riešenie systému $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{b}$, ktorého zložky sú polynómy stupňa najviac $m + k$.

Poznámka 4.4.25.

Platí, že $k = 0$, práve vtedy, keď $\det \mathbf{A} \neq 0$. Veta platí, aj keď prvky $\mathbf{A}$ a poprípade koeficienty polynómu v zložkách $\mathbf{b}(t)$ sú komplexné čísla.

Veta 4.4.26.

Nech $\mathbf{b}(t)$ je stĺpec tvaru $\mathrm{e}^{\alpha t}\mathbf{P}_m(t)$, kde $\alpha \in \mathbb{C}$ a zložky stĺpca $\mathbf{P}_m$ sú polynómy stupňa najviac m. Potom substitúcia $\mathbf{y} = \mathrm{e}^{\alpha t}\mathbf{u}$ prevedie systém $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathrm{e}^{\alpha t}\mathbf{P}_m(t)$ na nehomogénny systém, kde zložky stĺpca pravých strán sú polynómy stupňa najviac m.

Veta 4.4.27.

Nech $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Ak je $\mathbf{y} = \mathbf{y}^1 + \mathrm{i}\mathbf{y}^2$ riešením sústavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathrm{e}^{(\alpha+\beta\mathrm{i})t}\,\mathbf{P}_m(t)$, potom je $\mathbf{y}^1$ riešením sústavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\mathbf{P}_m(t)$ a $\mathbf{y}^2$ riešením sústavy $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\mathbf{P}_m(t)$.

Príklad.

Hľadajme partikulárne riešenie sústavy

$$y_1' = 2y_1 - y_2, \;\; y_2' = -y_1 + 2y_2 - 5\mathrm{e}^t \sin t.$$

Zrejme $\alpha = 1$, $\beta = 1$ a upravená pravá strana $(0, -5\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t})$. Zavedením substitúcie $\tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{u}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t}$ dostaneme (komplexný) systém

$$u_1' = (1-\mathrm{i})u_1 - u_2, \;\; u_2' = -u_1 + (1-\mathrm{i})u_2 - 5.$$

Tu použijeme vetu 4.4.24 a dostaneme tak partikulárne riešenie $\mathbf{u}_p = (2\mathrm{i}-1, 3\mathrm{i}+1)^T$. Spätnou transformáciou dostaneme partikulárne riešenie pôvodnej sústavy v (komplexnom) tvare

$$\tilde{y}_1 = (2\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^t(\cos t + \mathrm{i}\sin t), \;\; \tilde{y}_2 = (3\mathrm{i}+1)\mathrm{e}^t(\cos t + \mathrm{i}\sin t).$$

Takže nakoniec hľadané reálne riešenie:

$$y_1 = \mathrm{e}^t(2\cos t - \sin t), \;\; y_2 = \mathrm{e}^t(3\cos t + \sin t).$$

4.5. Prvé integrály nelineárnych sústav

Určiť riešenie diferenciálnych rovníc sa v podstate podarí len vo výnimočných prípadoch. Niekedy sa ale podarí urobiť malý krok: podarí sa nájsť takú funkciu $\Theta(t, \mathbf{y})$, ktorá je konštatná na každom riešení systému (4.2) (príslušná konštanta môže byť pre rôzne riešenia rôzna). Takýto postup nemusí byť však jednoduchý a je teda užitočný vtedy, ak iný nemáme. Také funkcie nazývame prvými integrálmi tejto sústavy, pričom často majú fyzikálny význam napríklad energie, hybnosti, momentu hybnosti (konštantnosť vyjadruje zákon zachovania týchto veličín).

Príklad.

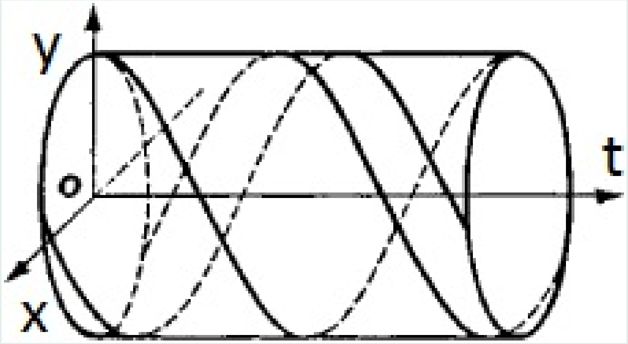
Exemplárnym príkladom je systém rovníc, podľa ktorých sa pohybujú častice v konzervatívnom poli. Rovnica

$$\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\nabla U(\mathbf{x}(t))$$

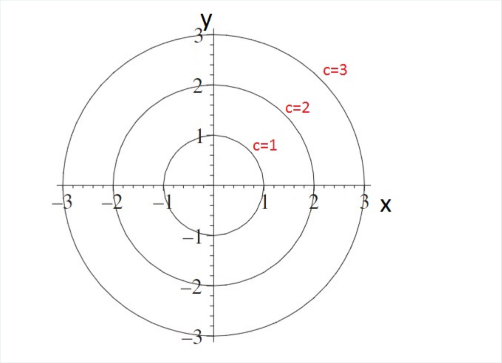
má prvý integrál (v skalárnom prípade) $\Theta(x, v) = \frac{v^2}{2} + U(x)$, kde $v(t) := \dot{x}(t)$, vyjadrujúci celkovú energiu systému.

Definícia 4.5.1.

Prvým integrálom sústavy (4.2) na otvorenej množine $\Omega_1 \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ nazývame takú funkciu $\Theta \in C^1(\Omega_1, \mathbb{R})$, pre ktorú platí: Ak je $\mathbf{y}(t), t \in I$ riešenie na Ω_1 sústavy (4.2), potom je funkcia $\tilde{\Theta}(t) := \Theta(t, \mathbf{y}(t))$ konštantná na intervale I.



Cylinder tvorí prvý integrál (pre konkrétne c).



Fázový portrét tvoria kružnice.

Správanie sa riešení z nasledujúceho príkladu.

Príklad.

Uvažujme sústavu

$$x' = y, y' = -x. \tag{4.17}$$

Zrejme $x^2+y^2 = c$ pre riešenie (x, y) a teda prvým integrálom danej sústavy je valec a integrálne krivky tvoria skrutkovice na ňom, viď. obrázky 4.5, 4.5.

Naprv si uvedieme tvrdenie, ktoré je často prakticky využívané pri riešení nelineárnych systémov a vo svojej podstate súvisí s prvým integrálom špeciálneho systému.

Veta 4.5.2.

Nech f, g sú spojité funkce, $x, y : (a, b) \to \mathbb{R}$, $t_0 \in (a, b)$, $f(x(t_0), y(t_0)) \neq 0$.

1. Potom existuje okolie U bodu t_0 také, že ak (x, y) je riešenie sústavy
$$x' = f(x, y), \quad y' = g(x, y)$$
na U, potom je $\tilde{y} = y \circ x^{-1}$ na $x(U)$ riešením rovnice
$$\frac{d\tilde{y}}{dz} = \frac{g(z, \tilde{y})}{f(z, \tilde{y})}, \quad \tilde{y}(x(t_0)) = y(t_0). \tag{4.18}$$

2. Pre každé okolie U bodu t_0 platí, že pokiaľ $\tilde{y}$ je riešením rovnice (4.18) na $x(U)$ a x je riešením rovnice $x' = f(x, \tilde{y}(x))$ na U, potom funkcia $\tilde{y} \circ x$ je riešením rovnice $y' = g(x, y)$ na U.

Všimnime si, že rovnicu (4.18) získame formálnym predelením rovníc daného planárneho systému. Veta v podstate hovorí, že ak chceme nájsť riešenia danej sústavy, môžeme najprv vyriešiť rovnicu (4.18), ktorá nám dá orbity riešení vo fázovej rovine, a potom dopočítať závislosť na t.

Použitím pravidla o derivovaní zloženej funkcie dostaneme nasledujúcu lemu, ktorá je užitočná a dôležitá v tom, že funkcii Θ môžeme rozhodnúť, či je (nie je) prvým integrálom bez toho, aby sme poznali riešenie.

Lema 4.5.3 (Nutná a postačujúca podmienka)**.**

Ak je pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (4.2) spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, potom funkcia $\Theta \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ je jej prvým integrálom na $\Omega \Leftrightarrow$ ak platí

$$\frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Theta(t, \mathbf{y})}{\partial y_j} f_j(t, \mathbf{y}) = 0, \quad \forall (t, \mathbf{y}) \in \Omega \tag{4.19}$$

Je to fakticky parciálna diferenciálna rovnica prvého rádu pre funkciu Θ. Takže je blízky vzťah medzi nimi a sústavami obyčajných diferenciálnych rovníc prvého rádu. Ak máme autonómny systém, potom táto podmienka hovorí, že gradient prvého integrálu je kolmý na vektorové pole $\mathbf{f}$ (na pravú stranu systému).

Poznámka 4.5.4.

Konštantné prvé integrály sú nezaujímavé. Nekonštantné prvé integrály definované na celej oblasti Ω existujú zriedka. Zvláštnu dôležitosť majú prvé integrály nezávisiace explicitne na t.

Príklad.

Uvažujme sústavu

$$
\begin{aligned}
y_1' &= y_2 - y_3,\\
y_2' &= y_3 - y_1,\\
y_3' &= y_1 - y_2.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Sčítaním týchto rovníc dostaneme $(y_1 + y_2 + y_3)' = 0$. To znamená, že funkcia $\Theta_1(\mathbf{y}) = y_1 + y_2 + y_3$ je prvými integrálom sústavy (4.20). Iný prvý integrál je $\Theta_2(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$. Ako ho možno nájsť ?

Poznámka 4.5.5.

Je zrejmé, že ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ prvé integrály sústavy (4.2), potom aj $\Psi\,(\Theta_1(t,\mathbf{y}), \Theta_2(t,\mathbf{y}), \dots, \Theta_k(t,\mathbf{y}))$ ním je, pričom Ψ je ľubovoľná spojite diferencovateľná funkcia k premenných. Tento integrál nám ale nedáva žiadnu ďalšiu informáciu o riešení v porovnaní s informáciou, ktorú nám dávajú prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$.

Ak chceme nájsť riešenie sústavy (4.2) pomocou prvých integrálov je podstatné, aby boli nezávislé na množine Ω.

Definícia 4.5.6.

Hovoríme, že prvé integrály $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_k$, $k \leq n$ sú **nezávislé** na množine Ω, ak Ostrogradského-Jacobiho matica $\Theta'_{\mathbf{y}}$ má plnú hodnosť k pre všetky $(t, \mathbf{y}) \in \Omega$.

Príklad (Rabinovichov systém)**.**

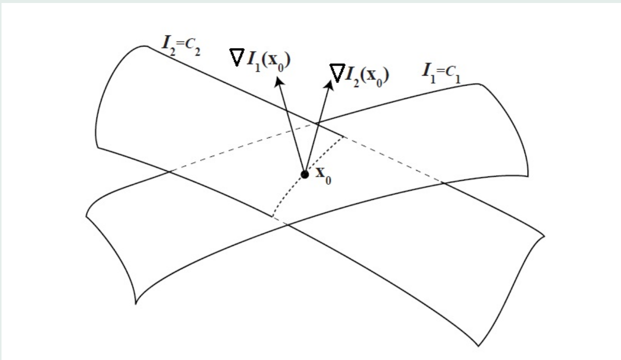
Nasledujúci diferenciálny systém tvorí parametrický model, ktorý popisuje interakcie troch kvázi-synchrónnch vĺn v plazme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2y^2 + \gamma x + z - \delta, \\ \dot{y} &= 2xy + \gamma y - \delta x, \\ \dot{z} &= -2z(x + 1), \end{aligned} \tag{4.21}$$

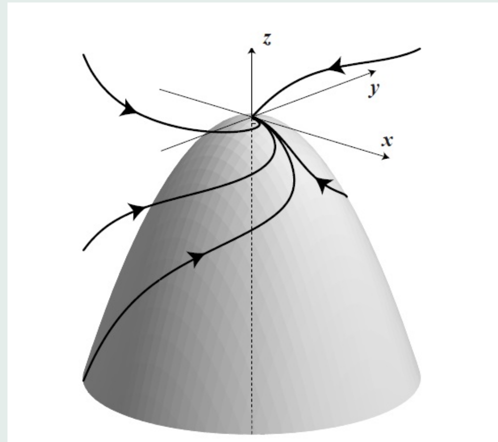
kde $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Nájsť prvé integrály pre takéto systémy nemusí byť vôbec jednoduché. Špeciálne pre $\gamma = 0, \delta = 1$ existujú dva explicitne závisiace na t prvé integrály

$$I_1 = (x^2 + y^2 + z)\mathrm{e}^{2t}, \quad I_2 = zy\mathrm{e}^{3t}.$$

Presvedčte sa o tom ! Pre $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ sú ich gradienty lineárne nezávislé. Taktiež sa môžete presvedčiť, že pre $\gamma = 0$ je $z(y - \delta/2)\mathrm{e}^{2t}$ ďalším prvým integrálom.



Nezávislosť prvých integrálov - 2 konkrétne hladiny a ich prienik v bode x_0.



Integrály z predchádzajúceho príkladu. Počiatok je globálny atraktor[a].

[a] Tj. pre $t \to \infty$ tam končia všetky trajektórie (dosahujúc hladinu $I_1 = 0$)

Problém 4.5.7.

Ukážte, že existencia lineárneho prvého integrálu pre lineárny homogénny systém s konštantnými koeficientami korešponduje s jeho degenerovanosťou, tj. systém (4.15) má lineárny prvý integrál $I(\mathbf{y}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \iff \det \mathbf{A} = 0$.

Domovská stránka
Titulná strana
Obsah
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strana 152 z 165
Späť
Full Screen
Zatvoriť
Koniec

Veta 4.5.8.

Nech pravá strana $\mathbf{f}(t, \mathbf{y})$ sústavy (4.2) spojite diferencovateľná na $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Potom

(I) ku $\forall \left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \in \Omega \ \exists$ v nejakom jeho okolí n nezávislých prvých integrálov, ak navyše uvažujeme autonómny systém, potom ku $\forall \mathbf{y}^0 : \mathbf{f}(\mathbf{y}^0) \neq 0, \ \exists$ v nejakom jeho okolí $(n-1)$ nezávislých prvých integrálov nezávisiacich na t.

(II) Ak sú $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$ nezávislé v $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$ prvé integrály sústavy (4.2), potom v nejakom jeho okolí sa dá každý prvý integrál tejto sústavy napísať v tvare $\Psi\left(\Theta_1(t, \mathbf{y}), \Theta_2(t, \mathbf{y}), \ldots, \Theta_n(t, \mathbf{y})\right)$, pričom Ψ je vhodná spojite diferencovateľná funkcia. Navyše, existuje najviac $(n-1)$ nezávislých v bode $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$ prvých integrálov sústavy (4.2) nezávisiacich explicitne na t, okrem prípadu, kedy $f(t, \mathbf{y})$ je identicky nula na nejakom okolí bodu $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$. Ak je $f\left(t_0, \mathbf{y}^0\right) \neq 0$ a $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{n-1}$ sú nezávisiace na t prvé integrály, ktoré sú nezávislé v bode $\left(t_0, \mathbf{y}^0\right)$, potom každý nezávisiaci na t prvý integrál sa v nejakom okolí bodu $\mathbf{y}^0$ dá zapísať v tvare $\Psi\left(\Theta_1(\mathbf{y}), \Theta_2(\mathbf{y}), \ldots, \Theta_{n-1}(\mathbf{y})\right)$, pričom Ψ je vhodná spojite diferencovateľná funkcia.

4.6. Gradientné a Hamiltonove systémy

Príklad.

Vo fyzike je konzervatívny systém s jedným stupňom voľnosti popísaný rovnicou typu $\ddot{x} = g(x)$. Celková mechanická energia $E = T + U = \frac{\dot{x}^2}{2} - \int_0^x g(s)\,\mathrm{d}s$ je prvým integrálom (súčet kinetickej a potenciálnej energie systému). Prislúchajúci systém diferenciálnych rovníc je príkladom všeobecného Hamiltonovho systému a prvý integrál sa v tomto prípade nazýva **Hamiltonova funkcia**.

Najsledujúci diferenciálny systém súvisí s Hamiltonovskou formuláciou mechaniky, ktorá je všeobecnejšia než lagrangeovská, z ktorej pôvodne vychádzala. Hamiltonova funkcia (súčet kinetickej a potenciálnej energie) mechanického systému s n stupňami voľnosti je definovaná vzťahom:

$$H(q_1, q_2, \ldots .q_n, p_1, p_2, \ldots .p_n, t) = \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i\, p_i - L(q_1, q_2, \ldots .q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n, t),$$

kde L je Lagrangeova funkcia systému. Tento dynamický systém opisuje vývoj fyzikálnych systémov ako napríklad planetárny systém alebo elektrón v elektromagnetickom poli.

Hamiltonove kanonické rovnice

Nech $\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ je diferencovateľná funkcia. Nasledujúce rovnice tvoria pre mechanický systém s n stupňami voľnosti sústavu $2n$ diferenciálnych rovníc prvého rádu pre $2n$ neznámych funkcií času $q_i(t), p_i(t), i = 1, 2, ..., n$, kde q_i sú zovšeobecnené súradnice a p_i sú zovšeobecnené hybnosti.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{p}(t) &= -\tfrac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t) = \mathbf{X} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{q}(t) &= +\tfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t), t) = \mathbf{Y} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Veta 4.6.1 (Zákon zachovania energie)**.**

Ak funkcia $\mathcal{H}$ nezávisí explicitne na t, potom je prvým integrálom systému (4.22), tj. $\mathcal{H}(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t)) = k,\ k \in \mathbb{R}$ na nejakom intervale $I \subseteq \mathbb{R}$.

Dôsledok tejto vety je ten, že pre každú trajektóriu γ tohto systému existuje konštanta $k \in \mathbb{R}$ taká, že γ je súvislou komponentou hladiny funkcie $\mathcal{H}$, tj. množiny $\mathcal{H}^{-1}(k)$. Fázový portrét možno teda zistiť analýzou takýchto hladín funkcie $\mathcal{H}$. Zrejme nutnou podmienkou pre systém (4.22) je $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{Y} = 0$. (a aj postačujúcou v prípade systému 2 rovníc).

Problém 4.6.2.

Ukážte, že v 2D prípade je nutná podmienka aj postačujúcou.
Ukážte, že nutná podmienka pre nasledujúci systém je splnená, avšak systém nie je Hamiltonov.

$$q_1'' = -q_1, \quad q_2'' = q_1.$$

Príklad.

Ukážeme, že systém

$$\begin{aligned} x' &= y(13 - x^2 - y^2), \\ y' &= 12 - x(13 - x^2 - y^2), \end{aligned} \tag{4.23}$$

je Hamiltonov. Máme $\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{X} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{Y} = -2xy + 2xy = 0$ a teda podmienka je splnená. Nájdite Hamiltonián $\mathcal{H}$ tohto systému a načrtnite fázový diagram !

Príklad.

1. Hamiltonova funkcia pre jednorozmerný pohyb voľnej častice (HB):
   $\mathcal{H} = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}m\dot{q}^2 = \frac{p^2}{2m}$
2. Hamiltonova funkcia častice s nábojom q v elektromagnetickom poli s elektrickým potenciálom φ (magnetický vektorový potenciál v nej nevystupuje):
   $\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi$
3. Hamiltonova funkcia relativistickej častice (pre nenabitú časticu odpadá člen s q):
   $\mathcal{H} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + q\varphi$

Hamiltonove systémy môžu mať relatívne zložité vlastnosti. Jednoduchšie vlastnosti trajektórií majú tzv. gradientné systémy.
Nech $U \in C^k(\Omega, \mathbb{R}),\ k \geq 1$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otvorená množina. **Gradientný systém** na Ω je systém tvaru

$$\mathbf{y}' = -\nabla U(\mathbf{y}).$$

Problém 4.6.3.

Nech $W \in C^2(U, \mathbb{R})$, určte nutnú podmienku na to, aby systém bol gradientný. Ako je to s postačujúcou podmienkou ?

Poznámka 4.6.4.

V prípade dvojrozmerných systémov je gradientný systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}$$

a Hamiltonov systém v tvare

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Pre iné dimenzie sa dajú použiť matice $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$

Apendix

Definícia 4.6.5.

Súčtom dvoch kriviek k_1, k_2, kde $k_i : I_i = [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^n, i = 1, 2,\ \ k_1(b_1) = k_2(a_2)$ nazývame krivku $\gamma : J = [a_1, c_1] \to \mathbb{R}^n,\ c_1 = b_1 + b_2 - a_2$, ktorá je daná predpisom

$$k(t) = \begin{cases} k_1(t), & t \in I_1, \\ k_2(a_2 + t - b_1), & t \in J \setminus I_1 = [b_1, c_1]. \end{cases}$$

Označujeme ju $k = k_1 \oplus k_2$. **Opačnú krivku** ku krivke $k : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ nazývame krivku $\ominus k$, kde interval I a parametrizácia sa zmení na na $k(-t), t \in [-b, -a]$.

Veta 4.6.6 (Green).

Nech Γ je Jordanova[a] krivka s parametrizáciou $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, ktorá je po častiach C^1 a pozitívne orientovaná. Potom, ak $\mathbf{T} : A \to \mathbb{R}^2$, kde $A = \operatorname{int}\gamma$, je spojité na $\overline{A}$ a $\dfrac{\partial T_1}{\partial y}$, $\dfrac{\partial T_2}{\partial x}$ sú spojito predĺžiteľné na $\overline{A}$, tak

$$\iint_A \left(\frac{\partial T_2}{\partial x} - \frac{\partial T_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x,y) = \oint_\Gamma T_1 \,\mathrm{d}x + T_2 \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_a^b \left[T_1(\gamma_1(s),\gamma_2(s))\,\gamma_1'(s) + T_2(\gamma_1(s),\gamma_2(s))\,\gamma_2'(s)\right] \mathrm{d}s.$$

[a] Teda jednoduchá (prostá) a uzavretá.

Lema 4.6.7.

Nech $f \in C(J)$, $J = (\alpha, \beta) \times [A, B]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $A, B \in \mathbb{R}$. Potom pre

$$F(u) = \int_A^B f(u, x)\,\mathrm{d}x$$

platí

I) $F \in C(\alpha, \beta)$;

II) ak naviac $\dfrac{\partial f}{\partial u} \in C(J)$, tak $F \in C^1(\alpha, \beta)$ a

$$F'(u) = \int_A^B \frac{\partial f}{\partial u}(u, x)\,\mathrm{d}x.$$

Lema 4.6.8.

Nech $\mathbf{T} \in C(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Potom má $\mathbf{T}$ potenciál na Ω práve vtedy, keď pre každú uzavretú krivku Γ v Ω je $\oint_\Gamma T_1\,\mathrm{d}x + T_2\,\mathrm{d}y = 0$.

Veta 4.6.9 (Zovšeobecnená Lagrangeova veta o strednej hodnote)**.**

Nech $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je diferencovateľná na otvorenej množine $G \subset \mathbb{R}^m$. Nech $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ sú také body, že $\overline{\mathbf{ab}}$[1] $\subset G$. Potom existuje bod ξ[2] $\in \overline{\mathbf{ab}}$, pre ktorý

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \langle \nabla f(\xi), \mathbf{b} - \mathbf{a} \rangle = \nabla_{\mathbf{b}-\mathbf{a}} f(\xi).$$

---

[a] $\overline{\mathbf{ab}}$ označuje úsečku spájajúcu body $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

[b] $\xi = (1-c)\mathbf{a} + c\mathbf{b},\ c \in (0,1)$

Definícia 4.6.10.

Metrický priestor je dvojica (M, d) kde M je (neprázdna) množina a d je **metrika** na M, tj. funkcia $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, pre ktorú platí $\forall\ x, y, z \in M$

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (axióma totožnosti),
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symetria)
3. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$ (trojuholníkova nerovnosť).

Metrický priestor nazývame **úplný**, ak v ňom každá postupnosť, ktorá je cauchyovská[a] (v príslušnej metrike), konverguje (v príslušnej metrike).

[a] $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall m, n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Poznámka 4.6.11.

Ak X je kompakt, potom priestor $C^k(X)$ s metrikou

$$d(f, g)_{C^k(X)} = \sum_{i=0}^{k} \sup_{x \in X} |f^{(i)}(x) - g^{(i)}(x)| = \sum_{i=0}^{k} d_\infty(f^{(i)}, g^{(i)})$$

je úplný metrický priestor. Pre $k = 0$ máme klasický priestor $(C(X), d_\infty)$.

Poznámka 4.6.12.

- Dá sa ľahko ukázať, že podpriestor úplného metrického priestoru je úplný práve vtedy, keď je uzavretý[a].
- Pre každý metrický priestor vieme skonštruovať jeho zúplnenie (pomocou tried ekvivalencií Cauchyovských postupností), a to tak, že pôvodný priestor v ňom bude hustý.
- Dve metriky d_1, d_2 na X nazveme **ekvivalentné**, akk $\exists\, c > 0,\ C > 0$ $c\, d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C\, d_1(x, y),\ \forall x, y \in X$. V $\mathbb{R}^n$ sú všetky metriky ekvivalentné.

[a] Priestor je uzavretý ak sa rovná uzáveru.