Príkl. 1.	Príkl. 2.	Príkl. 3.	Príkl. 4.	**Spolu bodov**

Skúšková písomka z DFR zo dňa 25.1.2016 [1] **MENO:** ....

Príklad 1. [5 bodov]

Nájdite riešenie Cauchyho úlohy

$$y\left(1-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x}-\left(1+x-y^2x-y^2\right)\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad x\geq 0, y\in\mathbb{R}$$
$$z(x,0)=x, \quad x\geq 0.$$

Príklad 2. [6 bodov]

Použitím LMVK pre systémy (teda v maticovom tvare) nájdite riešenie Cauchyho úlohy

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}y \\ y' = \dfrac{5}{2}x+\dfrac{3}{2}y+16\cos(2t) \\ x(0)=-5,\ y(0)=3. \end{cases}$$

Príklad 3. [4 body]

Stanovte tretiu iteráciu Picardovej aproximácie riešenia Cauchyho úlohy systému

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2y_3, \\ y_2' &= -y_1y_3, \\ y_3' &= t^2+y_2, \quad \mathbf{y}(0)=(1,0,-1) \end{aligned}$$

a určte jej chybu na množine $[-1,1]\times[0,2]\times[-1,1]\times[-2,0]$.

Príklad 4. [5 bodov]

Pomocou Banachovej vety ukážte, že existuje jediná ohraničená postupnosť $(a_n : n\in\mathbb{N})$, pre ktorú platí

$$a_n=\frac{n+1}{n}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3a_{m+n}^2+1}}{4m^2}, \ \forall n\in\mathbb{N},$$

ak viete, že priestor ohraničených postupností (ℓ_∞, d), $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|x_n-y_n|$. je úplný.

---

[1] Svoje tvrdenia je nutné zdôvodniť!