Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza

Prednáška 1

16. februára 2024

Podmienky

- nepovinná účasť (!prelínanie prednášok a cvičení!)
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

Obsah

I. Komplexné čísla – topológia komplexnej roviny, konvergencia postupnosti a radu komplexných čísel

II. Úvod do komplexných funkcií – limita, spojitosť, diferencovateľnosť komplexnej funkcie, elementárne funkcie

III. Integrál funkcie komplexnej premennej – určitý (Riemannov) integrál, Cauchyho integrálna veta, Cauchyho integrálna formula

IV. Postupnosti a rady funkcií komplexnej premennej – mocninové rady, Taylorove rady, Laurentove rady

V. Reziduum funkcie komplexnej premennej – singulárne body funkcie, výpočet rezidua, použitie reziduí

VI. Operátorový počet – Laplaceova a Fourierova transformácia, vlastnosti a použitie

Podmienky

- nepovinná účasť (!prelínanie prednášok a cvičení!)
- podmienky ku skúške (zverejnené koncom semestra)

Obsah

I. Komplexné čísla – topológia komplexnej roviny, konvergencia postupnosti a radu komplexných čísel
II. Úvod do komplexných funkcií – limita, spojitosť, diferencovateľnosť komplexnej funkcie, elementárne funkcie
III. Integrál funkcie komplexnej premennej – určitý (Riemannov) integrál, Cauchyho integrálna veta, Cauchyho integrálna formula
IV. Postupnosti a rady funkcií komplexnej premennej – mocninové rady, Taylorove rady, Laurentove rady
V. Reziduum funkcie komplexnej premennej – singulárne body funkcie, výpočet rezidua, použitie reziduí
VI. Operátorový počet – Laplaceova a Fourierova transformácia, vlastnosti a použitie

Literatúra k prednáškam a cvičeniam

1. Galajda, P. – Schrötter, Š: *Funkcia komplexnej premennej a operátorový počet*, Alfa, Bratislava, 1991.
2. Kluvánek, I. – Mišík, L. – Švec, M.: *Matematika II.*, Alfa, Bratislava, 1971.
3. Eliaš, J. – Horváth, J. – Kajan, J.: *Zbierka úloh z vyššej matematiky 2, 4*. Alfa, Bratislava, 1970.
4. Pap, E.: *Complex Analysis through Examples and Exercises*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1999. **http://umv.science.upjs.sk/hutnik/PapCA.djvu**

Historické okienko

✠ GIERONIMO CARDANO (1501–1576)

– *Ars Magna de Regulis Algebraicis* (1545): rozložte číslo 10 na súčet dvoch sčítancov, ktorých súčin je rovný 40

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

– Cardano: "Výsledok je elegantný, ale neužitočný."

– Cardanove vzorce: rovnica $x^3 = ax + b$ má riešenie

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

napr. $x = 4$ je riešením rovnice $x^3 = 15x + 4$, ale
$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4 - 5^3 < 0$

Historické okienko

✠ GIERONIMO CARDANO (1501–1576)

– *Ars Magna de Regulis Algebraicis* (1545): rozložte číslo 10 na súčet dvoch sčítancov, ktorých súčin je rovný 40

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

– Cardano: "Výsledok je elegantný, ale neužitočný."

– Cardanove vzorce: rovnica $x^3 = ax + b$ má riešenie

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

napr. $x = 4$ je riešením rovnice $x^3 = 15x + 4$, ale $\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4 - 5^3 < 0$

Historické okienko

✠ GIERONIMO CARDANO (1501–1576)

– *Ars Magna de Regulis Algebraicis* (1545): rozložte číslo 10 na súčet dvoch sčítancov, ktorých súčin je rovný 40

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

– Cardano: "Výsledok je elegantný, ale neužitočný."

– Cardanove vzorce: rovnica $x^3 = ax + b$ má riešenie

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

napr. $x = 4$ je riešením rovnice $x^3 = 15x + 4$, ale $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4 - 5^3 < 0$

Historické okienko

✠ GIERONIMO CARDANO (1501–1576)

– *Ars Magna de Regulis Algebraicis* (1545): rozložte číslo 10 na súčet dvoch sčítancov, ktorých súčin je rovný 40

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

– Cardano: "Výsledok je elegantný, ale neužitočný."
– Cardanove vzorce: rovnica $x^3 = ax + b$ má riešenie

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

napr. $x = 4$ je riešením rovnice $x^3 = 15x + 4$, ale
$\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4-5^3 < 0$

Historické okienko

✠ GIERONIMO CARDANO (1501–1576)

– *Ars Magna de Regulis Algebraicis* (1545): rozložte číslo 10 na súčet dvoch sčítancov, ktorých súčin je rovný 40

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25-(-15) = 40$$

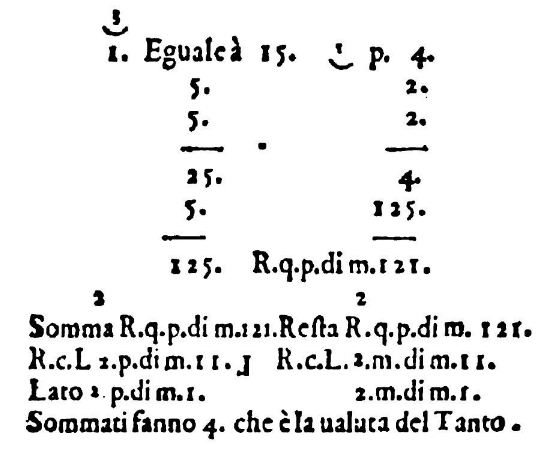
– Cardano: "Výsledok je elegantný, ale neužitočný."
– Cardanove vzorce: rovnica $x^3 = ax + b$ má riešenie

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

napr. $x = 4$ je riešením rovnice $x^3 = 15x + 4$, ale
$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 4 - 5^3 < 0$

Historické okienko

✠ RAFAEL BOMBELI (1501–1576)


3
1. Egualeà 15. 1 p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
3 2
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L 2.p.di m.11.⌋ R.c.L. 2.m.di m.11.
Lato 2. p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Ukážka z Bombelliho knihy *L'Algebra*
(riešenie rovnice $x^3 = 15x + 4$)

Historické okienko

Ďalší vývoj plynul veľmi pomaly a počas neho sa mnohí dopúšťali chýb z nevedomosti:

✠ JOHANN BERNOULLI (1667–1748)

– logaritmy záporných čísel neexistujú, pretože "logaritmy čísel z intervalu $\langle 1, +\infty)$ vyčerpávajú nezáporné reálne čísla a logaritmy čísel z intervalu $(0, 1)$ vyčerpajú všetky záporné reálne čísla, na logaritmy záporných čísel tak už žiadne hodnoty nezostávajú"

✠ GOTTFRIED LEIBNIZ (1646–1716)

– logaritmy záporných čísel existujú, pretože $(-x)^2 = x^2$, čiže $2\log(-x) = 2\log x$, a teda $\log(-x) = \log x$

✠ LEONHARD EULER (1707–1783)

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(-4)} = \sqrt{4} = 2$$

Historické okienko

Ďalší vývoj plynul veľmi pomaly a počas neho sa mnohí dopúšťali chýb z nevedomosti:

✠ JOHANN BERNOULLI (1667–1748)

– logaritmy záporných čísel neexistujú, pretože "logaritmy čísel z intervalu $\langle 1, +\infty)$ vyčerpávajú nezáporné reálne čísla a logaritmy čísel z intervalu $(0, 1)$ vyčerpajú všetky záporné reálne čísla, na logaritmy záporných čísel tak už žiadne hodnoty nezostávajú"

✠ GOTTFRIED LEIBNIZ (1646–1716)

– logaritmy záporných čísel existujú, pretože $(-x)^2 = x^2$, čiže $2\log(-x) = 2\log x$, a teda $\log(-x) = \log x$

✠ LEONHARD EULER (1707–1783)

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(-4)} = \sqrt{4} = 2$$

Historické okienko

Ďalší vývoj plynul veľmi pomaly a počas neho sa mnohí dopúšťali chýb z nevedomosti:

✠ JOHANN BERNOULLI (1667–1748)

– logaritmy záporných čísel neexistujú, pretože "logaritmy čísel z intervalu $\langle 1, +\infty)$ vyčerpávajú nezáporné reálne čísla a logaritmy čísel z intervalu $(0, 1)$ vyčerpajú všetky záporné reálne čísla, na logaritmy záporných čísel tak už žiadne hodnoty nezostávajú"

✠ GOTTFRIED LEIBNIZ (1646–1716)

– logaritmy záporných čísel existujú, pretože $(-x)^2 = x^2$, čiže $2\log(-x) = 2\log x$, a teda $\log(-x) = \log x$

✠ LEONHARD EULER (1707–1783)

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(-4)} = \sqrt{4} = 2$$

Historické okienko

Ďalší vývoj plynul veľmi pomaly a počas neho sa mnohí dopúšťali chýb z nevedomosti:

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t-\mathrm{i}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t+\mathrm{i}}\right) \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}} \log \frac{\mathrm{i}-x}{\mathrm{i}+x} = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log \frac{1+\mathrm{i}x}{1-\mathrm{i}x} = \frac{\mathrm{i}}{2} \log \frac{\mathrm{i}+x}{\mathrm{i}-x}\end{aligned}$$

Potom pre $x = 1$ máme

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \operatorname{arctg} 1 = \frac{1}{2\mathrm{i}} \log \frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1} = \frac{1}{4\mathrm{i}} \log \left(\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4\mathrm{i}} \log(-1) = \frac{1}{8\mathrm{i}} \log(-1)^2 = 0\end{aligned}$$

... a mnohé ďalšie skvosty...

Historické okienko

Uveďme však aj pozitívne výsledky:

✠ Roger Cotes (1682–1716)

– v roku 1714 publikoval výsledok

$$\sqrt{-1}\varphi = \ln\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

✠ Leonhard Euler (1707–1783)

– v roku 1740 napísal Bernoullimu, že funkcie

$$y = 2\cos x \quad \text{a} \quad y = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}x}$$

sú riešením tej istej diferenciálnej rovnice a pre obe platí $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, teda sa musia rovnať (1743)

– od Eulera pochádza aj označenie imaginárnej jednotky i (1777)

Historické okienko

Uveďme však aj pozitívne výsledky:

✠ Roger Cotes (1682–1716)

– v roku 1714 publikoval výsledok

$$\sqrt{-1}\varphi = \ln\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

✠ Leonhard Euler (1707–1783)

– v roku 1740 napísal Bernoullimu, že funkcie

$$y = 2\cos x \quad \text{a} \quad y = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}x}$$

sú riešením tej istej diferenciálnej rovnice a pre obe platí $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, teda sa musia rovnať (1743)

– od Eulera pochádza aj označenie imaginárnej jednotky i (1777)

Historické okienko

Uveďme však aj pozitívne výsledky:

✠ ROGER COTES (1682–1716)

– v roku 1714 publikoval výsledok

$$\sqrt{-1}\varphi = \ln\left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi\right)$$

✠ LEONHARD EULER (1707–1783)

– v roku 1740 napísal Bernoullimu, že funkcie

$$y = 2\cos x \quad \text{a} \quad y = \mathrm{e}^{\sqrt{-1}x} + \mathrm{e}^{-\sqrt{-1}x}$$

sú riešením tej istej diferenciálnej rovnice a pre obe platí $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, teda sa musia rovnať (1743)

– od Eulera pochádza aj označenie imaginárnej jednotky i (1777)

Rozličné pohľady na komplexné čísla

✠ Caspar Wessel (1745–1818)

– 10.3.1797 predstavil Dánskej kráľovskej spoločnosti svoj jediný matematický článok *O analytickej reprezentácii smeru*, v ktorom zaviedol násobenie vektorov v rovine

Wessel: *Let* $+1$ *designate the positive rectilinear unit and* $+\varepsilon$ *a certain other unit perpendicular to the positive unit and having the same origin; then the direction angle of* $+1$ *will be equal to* 0°*, that of* -1 *to* 180°*, that of* $+\varepsilon$ *to* 90°*, and that of* $-\varepsilon$ *to* -90° *or* 270°*. By the rule that the direction angle of the product shall equal the sum of the angles of the factors, we have:*

$$
\begin{array}{llll}
(+1)(+1)=+1; & (+1)(-1)=-1; & (-1)(-1)=+1; & (+1)(+\varepsilon)=+\varepsilon; \\
(+1)(-\varepsilon)=-\varepsilon; & (-1)(+\varepsilon)=-\varepsilon; & (-1)(-\varepsilon)=+\varepsilon; & (+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1; \\
(+\varepsilon)(-\varepsilon)=+1; & (-\varepsilon)(-\varepsilon)=-1. & &
\end{array}
$$

From this it is seen that ε *is equal to* $\sqrt{-1}$*; and the divergence of the product is determined such that not any of the common rules of operation are contravened.*

The cosine of a circle arc beginning at the terminal point of the radius +1 is that part of the radius, or of its opposite, which begins at the centre and ends in the perpendicular dropped from the terminal point of the arc. The sine of the arc is drawn perpendicular to the cosine from its end point to the end point of the arc.

✠ Jean-Robert Argand (1768–1822)

– pôsobil ako účtovník v Paríži, matematike sa venoval amatérsky
– je známy Legendreov dopis z 2.11.1806 Francoisovi Francaisovi:

Sú ľudia, ktorí pestujú vedu s veľkým úspechom bez toho, aby boli známi a bez toho, aby hľadali slávu. Nedávno som videl mladého muža, ktorý ma požiadal, aby som si prečítal prácu, ktorú urobil o imaginárnych číslach; nevysvetlil mi svoj predmet veľmi dobre, ale dal mi pochopiť, že takzvané imaginárne veličiny považuje za skutočné ako ostatné a zobrazuje ich úsečkami. Najprv som autorovi ukázal, že o tom veľmi pochybujem, ale sľúbil som, že si prečítam jeho rukopis. V rozpore s mojím očakávaním som našiel celkom originálne nápady, veľmi dobre prezentované, podložené pomerne hlbokými znalosťami, a nakoniec, ktoré vedú k veľmi presným dôsledkom, ako je väčšina vzorcov trigonometrie, Cotesova veta, atď. Tu je náčrt tejto práce, ktorá by vás mohla zaujímať a ktorá vám umožní posúdiť zvyšok. ... dávam sem len malú časť jeho nápadov, ale vy si to vynahradíte a možno zistíte, ako ja, že sú natoľko originálne, že si zaslúžia pozornosť.

– imaginárna jednotka = jednotkový vektor otočený o 90° proti smeru hodinových ručičiek

CARL FRIEDRICH GAUSS (1777–1855)

– v práci Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda z roku 1831 doslova píše:

Gauss: *Tak, ako je každá reálna veličina vyjadrená úsečkou priamky nekonečnej na oboch stranách, prevzatá z ľubovoľného začiatku a vyhodnotená podľa ľubovoľnej úsečky prijatej ako jednotka, tak môže byť reprezentovaná iným bodom tak, že body z jednej strany počiatku predstavujú kladné veličiny, od ostatných záporných veličín: teda každú komplexnú veličinu možno znázorniť ľubovoľným bodom v nekonečnej rovine, v ktorej sa určená priamka vzťahuje na reálne veličiny, teda komplexnú veličinu* $x + iy$ *bodom, ktorého úsečka =* x*, usporiadaná (z jednej strany úsečky kladne, z druhej záporne) =* y*...*

WILLIAM ROWAN HAMILTON (1805–1865)

– narodil sa 4.8.1805 v Dubline, študoval na Trinity College, kde mu ponúkli miesto profesora astronómie (vo veku 21 rokov!)
– 4.11.1833 Hamilton predstavil Írskej kráľovskej spoločnosti komplexné čísla ako dvojice reálnych čísel, publikované v roku 1837 pod názvom *Theory of conjugate functions, or algebraic couples*:

$$(a,b) \pm (x,y) = (a \pm x, b \pm y);$$

$$(a,b) \cdot (x,y) = (ax - by, ay + bx);$$

$$\frac{(a,b)}{(x,y)} = \left(\frac{ax+by}{x^2+y^2}, \frac{by-ax}{x^2+y^2}\right)$$

Historické okienko

Základy teórie komplexných funkcií boli položené a rozvinuté v 19. storočí nasledujúcimi veľkými matematikmi:

- Louis Augustin Cauchy (1789–1857)
- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Carl Theodor Wilhelm Weierstras (1815–1897)
- Joseph Liouville (1809–1882)
- neskôr ďalší...

Prístup menovaných matematikov k základnému pojmu teórie komplexných funkcií, tzv. holomorfným funkciám, bol odlišný...

ale o tom až počas tohto kurzu...

Historické okienko

Základy teórie komplexných funkcií boli položené a rozvinuté v 19. storočí nasledujúcimi veľkými matematikmi:

- Louis Augustin Cauchy (1789–1857)
- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Carl Theodor Wilhelm Weierstras (1815–1897)
- Joseph Liouville (1809–1882)
- neskôr ďalší...

Prístup menovaných matematikov k základnému pojmu teórie komplexných funkcií, tzv. holomorfným funkciám, bol odlišný...

ale o tom až počas tohto kurzu...

Historické okienko

Základy teórie komplexných funkcií boli položené a rozvinuté v 19. storočí nasledujúcimi veľkými matematikmi:

- Louis Augustin Cauchy (1789–1857)
- Bernhard Riemann (1826–1866)
- Carl Theodor Wilhelm Weierstras (1815–1897)
- Joseph Liouville (1809–1882)
- neskôr ďalší...

Prístup menovaných matematikov k základnému pojmu teórie komplexných funkcií, tzv. holomorfným funkciám, bol odlišný...

ale o tom až počas tohto kurzu...

Elementárne pozorovania z reálnej analýzy:

V $\mathbb{N}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a + x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{Z}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a \cdot x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{Z}!$$

V $\mathbb{Q}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{R}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{Z}!$$

Definícia (množina komplexných čísel)

Množinou všetkých komplexných čísel $\mathbb{C}$ nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, t.j. $z = (x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Prvky množiny $\mathbb{C}$ nazývame **komplexné čísla**.

Elementárne pozorovania z reálnej analýzy:

V $\mathbb{N}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a + x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{Z}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a \cdot x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{Z}!$$

V $\mathbb{Q}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{R}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{Z}!$$

Definícia (množina komplexných čísel)

Množinou všetkých komplexných čísel $\mathbb{C}$ nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, t.j. $z = (x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Prvky množiny $\mathbb{C}$ nazývame **komplexné čísla**.

Elementárne pozorovania z reálnej analýzy:

V $\mathbb{N}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a + x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{Z}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a \cdot x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{Z}!$$

V $\mathbb{Q}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{R}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{Z}!$$

Definícia (množina komplexných čísel)

Množinou všetkých komplexných čísel $\mathbb{C}$ nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, t.j. $z = (x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Prvky množiny $\mathbb{C}$ nazývame **komplexné čísla**.

Elementárne pozorovania z reálnej analýzy:

V $\mathbb{N}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a + x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{Z}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a \cdot x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{Z}!$$

V $\mathbb{Q}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{R}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{Z}!$$

Definícia (množina komplexných čísel)

Množinou všetkých komplexných čísel $\mathbb{C}$ nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, t.j. $z = (x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Prvky množiny $\mathbb{C}$ nazývame **komplexné čísla**.

Elementárne pozorovania z reálnej analýzy:

V $\mathbb{N}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a + x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{Z}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$a \cdot x = b \text{ pre } a, b \in \mathbb{Z}!$$

V $\mathbb{Q}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{N}!$$

V $\mathbb{R}$ nevieme riešiť všetky rovnice tvaru

$$x \cdot x = a \text{ pre } a \in \mathbb{Z}!$$

Definícia (množina komplexných čísel)

Množinou všetkých komplexných čísel $\mathbb{C}$ nazývame množinu všetkých usporiadaných dvojíc reálnych čísel, t.j. $z = (x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$. Prvky množiny $\mathbb{C}$ nazývame **komplexné čísla**.

Operácie s komplexnými číslami

Nech $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$. Potom

- rovnosť komplexných čísel $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;
- mocnina komplexného čísla: z^n, $n \in \mathbb{N}$ definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Komplexné číslo $\mathrm{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**. Platí:

- $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \dots$.

Operácie s komplexnými číslami

Nech $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$. Potom

- rovnosť komplexných čísel $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;
- mocnina komplexného čísla: z^n, $n \in \mathbb{N}$ definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Komplexné číslo $\mathrm{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**. Platí:

- $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \ldots$.

Operácie s komplexnými číslami

Nech $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$. Potom

- rovnosť komplexných čísel $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;
- mocnina komplexného čísla: z^n, $n \in \mathbb{N}$ definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Komplexné číslo $\mathrm{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**. Platí:

- $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \ldots$.

Operácie s komplexnými číslami

Nech $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$. Potom

- rovnosť komplexných čísel $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;
- mocnina komplexného čísla: z^n, $n \in \mathbb{N}$ definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Komplexné číslo $\mathrm{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**. Platí:

- $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \ldots$.

Operácie s komplexnými číslami

Nech $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$. Potom

- rovnosť komplexných čísel $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;
- mocnina komplexného čísla: z^n, $n \in \mathbb{N}$ definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Komplexné číslo $\mathrm{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**. Platí:

- $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \ldots$

Operácie s komplexnými číslami

Nech $z = (x, y)$, $z_1 = (x_1, y_1)$ a $z_2 = (x_2, y_2)$. Potom

- rovnosť komplexných čísel $z_1 = z_2$ nastáva práve vtedy, keď $x_1 = x_2$ a $y_1 = y_2$;
- súčet komplexných čísel: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- násobok komplexného čísla reálnym číslom $c \in \mathbb{R}$: $cz = (cx, cy)$;
- súčin komplexných čísel: $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$;
- mocnina komplexného čísla: z^n, $n \in \mathbb{N}$ definovaná indukciou: $z^1 = z$, $z^{n+1} = z \cdot z^n$.

Komplexné číslo $\mathrm{i} = (0, 1)$ nazývame **imaginárnou jednotkou**. Platí:

- $\mathrm{i}^1 = \mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$,
- $\mathrm{i}^3 = -1 \cdot (0, 1) = -\mathrm{i}$,
- $\mathrm{i}^4 = (0, -1) \cdot (0, 1) = (1, 0) = 1, \ldots$.

Algebrický tvar komplexného čísla

Vzhľadom na uvedené operácie a označenie môžeme komplexné číslo $z = (x, y)$ zapísať v tvare

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y \cdot (0, 1) = x + \mathrm{i}y,$$

ktorý nazývame algebrický tvar komplexného čísla z.

- Číslo x nazývame **reálna časť** (zložka) komplexného čísla z, označujeme $x = \operatorname{Re} z$;
- číslo y nazývame **imaginárna časť** (zložka) komplexného čísla z, označujeme $y = \operatorname{Im} z$.

Číslo $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ nazývame komplexne združené k číslu $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, akk $\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_1$ a $\operatorname{Im} z_2 = -\operatorname{Im} z_1$. V takom prípade píšeme $z_2 = \overline{z}_1$.

Algebrický tvar komplexného čísla

Vzhľadom na uvedené operácie a označenie môžeme komplexné číslo $z = (x, y)$ zapísať v tvare

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y \cdot (0, 1) = x + \mathrm{i}y,$$

ktorý nazývame algebrický tvar komplexného čísla z.

- Číslo x nazývame **reálna časť** (zložka) komplexného čísla z, označujeme $x = \operatorname{Re} z$;
- číslo y nazývame **imaginárna časť** (zložka) komplexného čísla z, označujeme $y = \operatorname{Im} z$.

Číslo $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ nazývame komplexne združené k číslu $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, akk $\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_1$ a $\operatorname{Im} z_2 = -\operatorname{Im} z_1$. V takom prípade píšeme $z_2 = \overline{z}_1$.

Algebrický tvar komplexného čísla

Vzhľadom na uvedené operácie a označenie môžeme komplexné číslo $z = (x, y)$ zapísať v tvare

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + y \cdot (0, 1) = x + \mathrm{i}y,$$

ktorý nazývame algebrický tvar komplexného čísla z.

- Číslo x nazývame **reálna časť** (zložka) komplexného čísla z, označujeme $x = \operatorname{Re} z$;
- číslo y nazývame **imaginárna časť** (zložka) komplexného čísla z, označujeme $y = \operatorname{Im} z$.

Číslo $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ nazývame komplexne združené k číslu $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, akk $\operatorname{Re} z_2 = \operatorname{Re} z_1$ a $\operatorname{Im} z_2 = -\operatorname{Im} z_1$. V takom prípade píšeme $z_2 = \bar{z}_1$.

Modul (absolútna hodnota) komplexného čísla

Modul (veľkosť, absolútna hodnota) komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ nazývame nezáporné reálne číslo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Vlastnosti modulu komplexného čísla:

1. $|z| = 0 \iff z = 0,$
2. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
3. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (trojuholníková nerovnosť),
4. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 + z_2|.$

Podiel komplexných čísel z_1, z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0$$

Modul (absolútna hodnota) komplexného čísla

Modul (veľkosť, absolútna hodnota) komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ nazývame nezáporné reálne číslo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Vlastnosti modulu komplexného čísla:

1. $|z| = 0 \iff z = 0$,
2. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
3. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ \ |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (trojuholníková nerovnosť),
4. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C})\ ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Podiel komplexných čísel z_1, z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \quad z_2 \neq 0$$

Modul (absolútna hodnota) komplexného čísla

Modul (veľkosť, absolútna hodnota) komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ nazývame nezáporné reálne číslo

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}.$$

Vlastnosti modulu komplexného čísla:

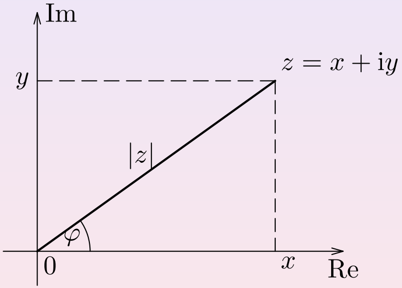
1. $|z| = 0 \iff z = 0,$
2. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \;\; |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
3. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \;\; |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (trojuholníková nerovnosť),
4. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \; ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$.

Podiel komplexných čísel z_1, z_2:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}, \;\; z_2 \neq 0$$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

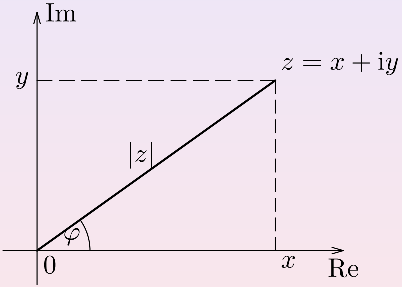
– Gaussova (tiež Argandova) rovina: vzájomné (bijektívne) priradenie komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ bodu $[x, y]$ v rovine $\mathbb{E}_2$ (v karteziánskom súradnicovom systéme);



– množinu komplexných čísel tvaru $(x, 0)$ nazývame **reálna os**
– množinu komplexných čísel tvaru $(0, y)$ nazývame **imaginárna os**

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

– Gaussova (tiež Argandova) rovina: vzájomné (bijektívne) priradenie komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ bodu $[x, y]$ v rovine $\mathbb{E}_2$ (v karteziánskom súradnicovom systéme);

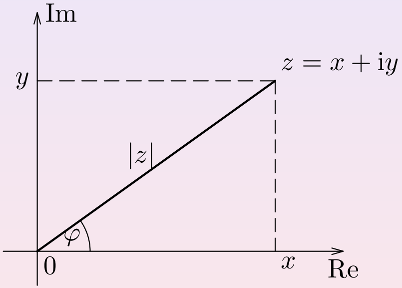


– množinu komplexných čísel tvaru $(x, 0)$ nazývame **reálna os**

– množinu komplexných čísel tvaru $(0, y)$ nazývame **imaginárna os**

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

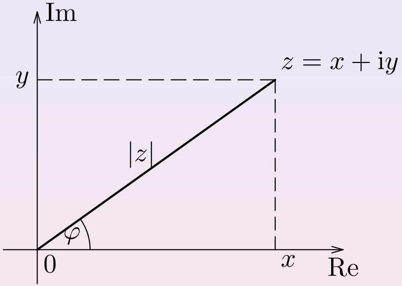
– Gaussova (tiež Argandova) rovina: vzájomné (bijektívne) priradenie komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ bodu $[x, y]$ v rovine $\mathbb{E}_2$ (v karteziánskom súradnicovom systéme);



– množinu komplexných čísel tvaru $(x, 0)$ nazývame **reálna os**
– množinu komplexných čísel tvaru $(0, y)$ nazývame **imaginárna os**

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

– vyjadrenie bodu $[x, y] \neq [0, 0]$ v rovine $\mathbb{E}_2$ pomocou polárnych súradníc: $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$, pričom



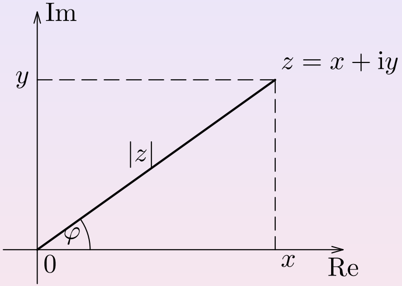
(i) r je modul komplexného čísla z, t.j. $r = |z| \geq 0$;

(ii) číslo $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ vyhovuje rovniciam

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

– vyjadrenie bodu $[x, y] \neq [0, 0]$ v rovine $\mathbb{E}_2$ pomocou polárnych súradníc: $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$, pričom



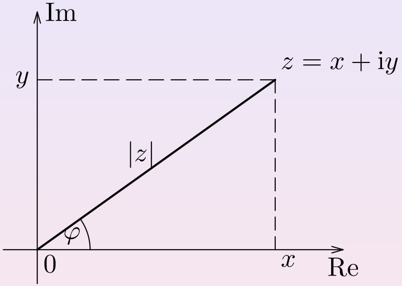
(i) r je modul komplexného čísla z, t.j. $r = |z| \geq 0$;

(ii) číslo $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ vyhovuje rovniciam

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mathrm{Re}\, z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\mathrm{Im}\, z}{|z|}.$$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

– vyjadrenie bodu $[x, y] \neq [0, 0]$ v rovine $\mathbb{E}_2$ pomocou polárnych súradníc: $x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$, pričom



(i) r je modul komplexného čísla z, t.j. $r = |z| \geq 0$;

(ii) číslo $\varphi \in (-\infty, +\infty)$ vyhovuje rovniciam

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

Definícia (argument komplexného čísla)

Nech $z \neq 0$ a φ_0 je jedno z reálnych čísel vyhovujúce rovniciam

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Argumentom komplexného čísla $z \neq 0$ nazývame množinu

$$\operatorname{Arg} z := \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

– každé $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ nazývame **hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$;

– číslo $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ také, že $-\pi < \varphi \leq \pi$, nazývame **hlavná hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$ a označujeme $\arg z$;

– teda $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ pre $z \neq 0$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

Definícia (argument komplexného čísla)

Nech $z \neq 0$ a φ_0 je jedno z reálnych čísel vyhovujúce rovniciam

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Argumentom komplexného čísla $z \neq 0$ nazývame množinu

$$\operatorname{Arg} z := \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

– každé $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ nazývame **hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$;

– číslo $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ také, že $-\pi < \varphi \leq \pi$, nazývame **hlavná hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$ a označujeme $\arg z$;

– teda $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ pre $z \neq 0$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

Definícia (argument komplexného čísla)

Nech $z \neq 0$ a φ_0 je jedno z reálnych čísel vyhovujúce rovniciam

$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Argumentom komplexného čísla $z \neq 0$ nazývame množinu

$$\operatorname{Arg} z := \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

– každé $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ nazývame **hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$;

– číslo $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ také, že $-\pi < \varphi \leq \pi$, nazývame **hlavná hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$ a označujeme $\arg z$;

– teda $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ pre $z \neq 0$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel

Definícia (argument komplexného čísla)

Nech $z \neq 0$ a φ_0 je jedno z reálnych čísel vyhovujúce rovniciam

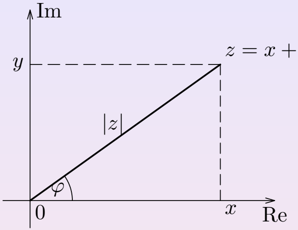
$$\cos\varphi = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}, \qquad \sin\varphi = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}.$$

Argumentom komplexného čísla $z \neq 0$ nazývame množinu

$$\operatorname{Arg} z := \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \varphi_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

– každé $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ nazývame **hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$;
– číslo $\varphi \in \operatorname{Arg} z$ také, že $-\pi < \varphi \leq \pi$, nazývame **hlavná hodnota argumentu** komplexného čísla $z \neq 0$ a označujeme $\arg z$;
– teda $\operatorname{Arg} z = \{\varphi \in \mathbb{R} : \varphi = \arg z + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ pre $z \neq 0$

Geometrická reprezentácia komplexných čísel



Pozorovanie: Pre hlavnú hodnotu komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y \neq 0$ platí:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \ x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, \ x = 0, y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \ x < 0, y \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \ x = 0, y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, \ x < 0, y < 0. \end{cases}$$

Goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla

Z rovníc $\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{z}|\cos\varphi$ a $\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{z}|\sin\varphi$, kde φ je niektorá hodnota argumentu nenulového komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$, máme goniometrický tvar komplexného čísla

$$z = |z|\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)\,.$$

Pomocou Eulerovho vzťahu

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi$$

potom môžeme komplexné číslo z prepísať do exponenciálneho tvaru

$$z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ \ \varphi \in \mathbb{R}.$$

Goniometrický a exponenciálny tvar komplexného čísla

Z rovníc $\boldsymbol{x} = |\boldsymbol{z}| \cos \varphi$ a $\boldsymbol{y} = |\boldsymbol{z}| \sin \varphi$, kde φ je niektorá hodnota argumentu nenulového komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$, máme goniometrický tvar komplexného čísla

$$z = |z| \left(\cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi\right).$$

Pomocou Eulerovho vzťahu

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos \varphi + \mathrm{i} \sin \varphi$$

potom môžeme komplexné číslo z prepísať do exponenciálneho tvaru

$$z = |z| \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Použitie goniometrického tvaru komplexného čísla

Nech $z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + \mathrm{i} \sin \varphi_1)$ a $z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + \mathrm{i} \sin \varphi_2)$.

- pre rovnosť komplexných čísel máme
  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
- súčin komplexných čísel má tvar
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i} \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Moivreova veta:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi)$$

- pre podiel komplexných čísel ($z_2 \neq 0$) platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i} \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Príklad: Určte zvyšné tvary komplexného čísla $z = -1 + \mathrm{i}$.

Použitie goniometrického tvaru komplexného čísla

Nech $z_1 = |z_1| (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2| (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$.

- pre rovnosť komplexných čísel máme
  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- súčin komplexných čísel má tvar
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Moivreova veta:
$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$
- pre podiel komplexných čísel ($z_2 \neq 0$) platí
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Príklad: Určte zvyšné tvary komplexného čísla $z = -1 + \mathrm{i}$.

Použitie goniometrického tvaru komplexného čísla

Nech $z_1 = |z_1| (\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2| (\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$.

- pre rovnosť komplexných čísel máme
  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- súčin komplexných čísel má tvar
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Moivreova veta:
  $$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$
- pre podiel komplexných čísel ($z_2 \neq 0$) platí
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Príklad: Určte zvyšné tvary komplexného čísla $z = -1 + \mathrm{i}$.

Použitie goniometrického tvaru komplexného čísla

Nech $z_1 = |z_1|\,(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|\,(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$.

- pre rovnosť komplexných čísel máme
  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- súčin komplexných čísel má tvar
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2|\,(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Moivreova veta:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

- pre podiel komplexných čísel ($z_2 \neq 0$) platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\,\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Príklad: Určte zvyšné tvary komplexného čísla $z = -1 + \mathrm{i}$.

Použitie goniometrického tvaru komplexného čísla

Nech $z_1 = |z_1| (\cos\varphi_1 + \mathrm{i} \sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2| (\cos\varphi_2 + \mathrm{i} \sin\varphi_2)$.

- pre rovnosť komplexných čísel máme
  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$
- súčin komplexných čísel má tvar
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\, \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Moivreova veta:

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + \mathrm{i} \sin n\varphi)$$

- pre podiel komplexných čísel ($z_2 \neq 0$) platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\, \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Príklad: Určte zvyšné tvary komplexného čísla $z = -1 + \mathrm{i}$.

Použitie goniometrického tvaru komplexného čísla

Nech $z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + \mathrm{i}\sin\varphi_1)$ a $z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + \mathrm{i}\sin\varphi_2)$.

- pre rovnosť komplexných čísel máme
  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2| \wedge \varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- súčin komplexných čísel má tvar
  $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$
- Moivreova veta:

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + \mathrm{i}\sin n\varphi)$$

- pre podiel komplexných čísel ($z_2 \neq 0$) platí

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathrm{i}\ \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Príklad: Určte zvyšné tvary komplexného čísla $z = -1 + \mathrm{i}$.

n-tá odmocnina komplexného čísla

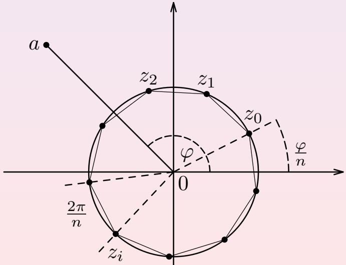
Nech $z = \rho\,(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ a $a = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \neq 0$. Hľadáme riešenia rovnice

$$z^n = a, \quad n \in \mathbb{N},$$

ktoré nazývame n-tá odmocnina komplexného čísla z.

Riešenie:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \ k \in \mathbb{Z}$$



n-tá odmocnina komplexného čísla

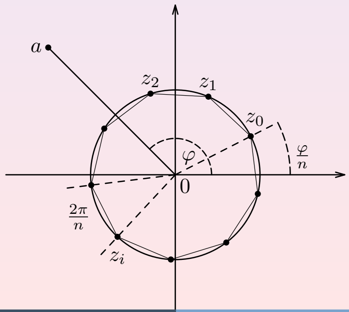
Nech $z = \rho\,(\cos\psi + \mathrm{i}\sin\psi)$ a $a = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \neq 0$. Hľadáme riešenia rovnice

$$z^n = a, \quad n \in \mathbb{N},$$

ktoré nazývame n-tá odmocnina komplexného čísla z.

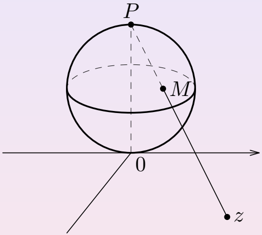
Riešenie:

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k \in \mathbb{Z}$$



Bod nekonečno

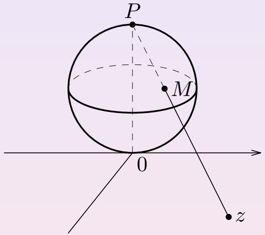
– **stereografická projekcia**: vzájomne jednoznačné priradenie Gaussovej roviny a (Riemannovej) sféry



– nevlastný bod (nekonečne vzdialený bod, nekonečno), označujeme ∞, nemá zavedený pojem reálnej a imaginárnej zložky, ani argument, jeho modul je väčší ako modul ktoréhokoľvek komplexného čísla
– uzavretá Gaussova rovina $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Bod nekonečno

– **stereografická projekcia**: vzájomne jednoznačné priradenie Gaussovej roviny a (Riemannovej) sféry

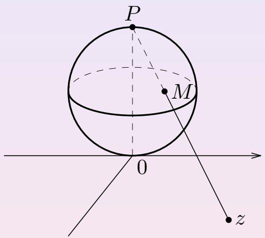


– nevlastný bod (nekonečne vzdialený bod, nekonečno), označujeme ∞, nemá zavedený pojem reálnej a imaginárnej zložky, ani argument, jeho modul je väčší ako modul ktoréhokoľvek komplexného čísla

– uzavretá Gaussova rovina $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Bod nekonečno

– **stereografická projekcia**: vzájomne jednoznačné priradenie Gaussovej roviny a (Riemannovej) sféry



– nevlastný bod (nekonečne vzdialený bod, nekonečno), označujeme ∞, nemá zavedený pojem reálnej a imaginárnej zložky, ani argument, jeho modul je väčší ako modul ktoréhokoľvek komplexného čísla
– uzavretá Gaussova rovina $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

Bod nekonečno – algebrické operácie

1. $z \pm \infty = \infty \pm z = \infty$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
2. $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$ pre každé $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$;
3. $\frac{z}{\infty} = 0$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
4. $\frac{z}{0} = \infty$ pre každé $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$;
5. $\frac{\infty}{z} = \infty$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
6. $\infty^n = \infty$, $\infty^{-n} = 0$, $0^{-n} = \infty$ pre každé $n \in \mathbb{N}$;
7. $\infty^0 = 1$;
8. $|\infty| = \infty$, $\overline{\infty} = \infty$.