Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza
Prednáška 2

23. februára 2024

Trochu (nutnej) topológie v Gaussovej rovine

Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je pevné a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

- Množina bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \delta\}$ predstavuje kružnicu so stredom v bode z_0 a polomerom δ.
- Množinu bodov
$$U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$$
nazývame δ-okolím bodu z_0.
- Okolie bodu z_0, pri ktorom nezáleží na veľkosti (označení) polomeru, budeme označovať $U(z_0)$.
- Prstencovým δ-okolím bodu z_0 nazývame množinu
$$U^*_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$
- δ-okolím bodu ∞ nazývame množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}_\infty; |z| > \frac{1}{\delta}\}$.

Trochu (nutnej) topológie v Gaussovej rovine

Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je pevné a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

- Množina bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \delta\}$ predstavuje kružnicu so stredom v bode z_0 a polomerom δ.
- Množinu bodov

$$U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$$

  nazývame δ-okolím bodu z_0.
- Okolie bodu z_0, pri ktorom nezáleží na veľkosti (označení) polomeru, budeme označovať $U(z_0)$.
- Prstencovým δ-okolím bodu z_0 nazývame množinu

$$U^*_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

- δ-okolím bodu ∞ nazývame množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}_\infty; |z| > \frac{1}{\delta}\}$.

Trochu (nutnej) topológie v Gaussovej rovine

Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je pevné a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

- Množina bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \delta\}$ predstavuje kružnicu so stredom v bode z_0 a polomerom δ.
- Množinu bodov

$$U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$$

  nazývame δ-okolím bodu z_0.
- Okolie bodu z_0, pri ktorom nezáleží na veľkosti (označení) polomeru, budeme označovať $U(z_0)$.
- Prstencovým δ-okolím bodu z_0 nazývame množinu

$$U_\delta^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

- δ-okolím bodu ∞ nazývame množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}_\infty; |z| > \frac{1}{\delta}\}$.

Trochu (nutnej) topológie v Gaussovej rovine

Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je pevné a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

- Množina bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \delta\}$ predstavuje kružnicu so stredom v bode z_0 a polomerom δ.
- Množinu bodov
$$U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$$
nazývame δ-okolím bodu z_0.
- Okolie bodu z_0, pri ktorom nezáleží na veľkosti (označení) polomeru, budeme označovať $U(z_0)$.
- Prstencovým δ-okolím bodu z_0 nazývame množinu
$$U_\delta^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$
- δ-okolím bodu ∞ nazývame množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}_\infty; |z| > \frac{1}{\delta}\}$.

Trochu (nutnej) topológie v Gaussovej rovine

Nech $z_0 \in \mathbb{C}$ je pevné a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$.

- Množina bodov $\{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = \delta\}$ predstavuje kružnicu so stredom v bode z_0 a polomerom δ.
- Množinu bodov

$$U_\delta(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < \delta\}$$

  nazývame δ-okolím bodu z_0.
- Okolie bodu z_0, pri ktorom nezáleží na veľkosti (označení) polomeru, budeme označovať $U(z_0)$.
- Prstencovým δ-okolím bodu z_0 nazývame množinu

$$U_\delta^*(z_0) := \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

- δ-okolím bodu ∞ nazývame množinu bodov $\{z \in \mathbb{C}_\infty; |z| > \frac{1}{\delta}\}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: ohraničenosť postupnosti

Definícia (ohraničená postupnosť)

Postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ nazývame ohraničená, akk existuje nezáporné reálne číslo $K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|z_n| \leq K$.

– teda postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená, akk všetky jej členy ležia v kruhu so stredom v počiatku a polomerom K, resp. ak všetky členy postupnosti ležia v nejakom okolí bodu 0

Tvrdenie II.1

Postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená práve vtedy, keď postupnosti $(\mathrm{Re}\, z_n)_1^\infty$ a $(\mathrm{Im}\, z_n)_1^\infty$ sú ohraničené.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: ohraničenosť postupnosti

Definícia (ohraničená postupnosť)

Postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ nazývame ohraničená, akk existuje nezáporné reálne číslo $K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|z_n| \leq K$.

– teda postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená, akk všetky jej členy ležia v kruhu so stredom v počiatku a polomerom K, resp. ak všetky členy postupnosti ležia v nejakom okolí bodu 0

Tvrdenie II.1

Postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená práve vtedy, keď postupnosti $(\operatorname{Re} z_n)_1^\infty$ a $(\operatorname{Im} z_n)_1^\infty$ sú ohraničené.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: ohraničenosť postupnosti

Definícia (ohraničená postupnosť)

Postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ nazývame ohraničená, akk existuje nezáporné reálne číslo $K \in \mathbb{R}$ také, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ platí $|z_n| \leq K$.

– teda postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená, akk všetky jej členy ležia v kruhu so stredom v počiatku a polomerom K, resp. ak všetky členy postupnosti ležia v nejakom okolí bodu 0

Tvrdenie II.1

Postupnosť komplexných čísel $(z_n)_1^\infty$ je ohraničená práve vtedy, keď postupnosti $(\mathrm{Re}\, z_n)_1^\infty$ a $(\mathrm{Im}\, z_n)_1^\infty$ sú ohraničené.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

Definícia (konvergentná postupnosť)

Konečné (vlastné) komplexné číslo z_0 nazývame limita postupnosti $(z_n)_1^\infty$, akk $\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

– uvedenú limitu označujeme $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ a hovoríme, že postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k číslu z_0, skrátene $z_n \to z_0$
– postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentná**
– postupnosť, ktorá nemá limitu, nazývame **divergentná**

Tvrdenie II.2

Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k z_0 práve vtedy, keď $(\mathrm{Re}\, z_n)_1^\infty$ konverguje k $\mathrm{Re}\, z_0$ a $(\mathrm{Im}\, z_n)_1^\infty$ konverguje k $\mathrm{Im}\, z_0$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

Definícia (konvergentná postupnosť)

Konečné (vlastné) komplexné číslo z_0 nazývame limita postupnosti $(z_n)_1^\infty$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

– uvedenú limitu označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ a hovoríme, že postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k číslu z_0, skrátene $z_n \to z_0$

– postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentná**

– postupnosť, ktorá nemá limitu, nazývame **divergentná**

Tvrdenie II.2

Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k z_0 práve vtedy, keď $(\operatorname{Re} z_n)_1^\infty$ konverguje k $\operatorname{Re} z_0$ a $(\operatorname{Im} z_n)_1^\infty$ konverguje k $\operatorname{Im} z_0$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

Definícia (konvergentná postupnosť)

Konečné (vlastné) komplexné číslo z_0 nazývame limita postupnosti $(z_n)_1^\infty$, akk $\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

– uvedenú limitu označujeme $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ a hovoríme, že postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k číslu z_0, skrátene $z_n \to z_0$

– postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentná**

– postupnosť, ktorá nemá limitu, nazývame **divergentná**

Tvrdenie II.2

Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k z_0 práve vtedy, keď $(\mathrm{Re}\, z_n)_1^\infty$ konverguje k $\mathrm{Re}\, z_0$ a $(\mathrm{Im}\, z_n)_1^\infty$ konverguje k $\mathrm{Im}\, z_0$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

Definícia (konvergentná postupnosť)

Konečné (vlastné) komplexné číslo z_0 nazývame limita postupnosti $(z_n)_1^\infty$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

– uvedenú limitu označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ a hovoríme, že postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k číslu z_0, skrátene $z_n \to z_0$
– postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentná**
– postupnosť, ktorá nemá limitu, nazývame **divergentná**

Tvrdenie II.2

Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k z_0 práve vtedy, keď $(\operatorname{Re} z_n)_1^\infty$ konverguje k $\operatorname{Re} z_0$ a $(\operatorname{Im} z_n)_1^\infty$ konverguje k $\operatorname{Im} z_0$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

Definícia (konvergentná postupnosť)

Konečné (vlastné) komplexné číslo z_0 nazývame limita postupnosti $(z_n)_1^\infty$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$, t.j.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon.$$

– uvedenú limitu označujeme $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$ a hovoríme, že postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k číslu z_0, skrátene $z_n \to z_0$
– postupnosť, ktorá má limitu, nazývame **konvergentná**
– postupnosť, ktorá nemá limitu, nazývame **divergentná**

Tvrdenie II.2

Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ konverguje k z_0 práve vtedy, keď $(\operatorname{Re} z_n)_1^\infty$ konverguje k $\operatorname{Re} z_0$ a $(\operatorname{Im} z_n)_1^\infty$ konverguje k $\operatorname{Im} z_0$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď
$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$
- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \dots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každdú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}$

- Každá postupnosť má nanajvýš jednu limitu.
- Každá konvergentná postupnosť je ohraničená.
- Ak $z_n \to z_0$, potom pre každú vybranú postupnosť $(k_n)_1^\infty$ platí $z_{k_n} \to z_0$.
- Postupnosť $(z_n)_1^\infty$ je konvergentná práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0, m \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

- Ak $z_n \to z_0$ a $w_n \to w_0$, tak $z_n \pm w_n \to z_0 \pm w_0$ a $z_n w_n \to z_0 w_0$. Ak naviac $w_0 \neq 0$, tak $\dfrac{z_n}{w_n} \to \dfrac{z_0}{w_0}$.
- Ak $z_n \to z_0$, tak $|z_n| \to |z_0|$.
- Nech $|z_n| = r_n \neq 0$ a $\arg z_n = \varphi_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ak $r_n \to r$ a $\varphi_n \to \varphi$, tak $z_n = r_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_n} \to z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}_\infty$

Definícia (konvergentná postupnosť v $\mathbb{C}_\infty$)

Hovoríme, že postupnosť bodov $(z_n)_1^\infty$, kde $z_n \in \mathbb{C}_\infty$, konverguje k bodu $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, akk ku každému okoliu $U(z_0)$ bodu z_0 existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ platí $z_n \in U(z_0)$. Bod $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ nazývame limitou postupnosti $(z_n)_1^\infty$.

– zápis $z_n \to \infty$, $z_n \in \mathbb{C}$ **má teda zmysel** a dá sa definovať napr. takto:

$$z_n \to \infty,\ z_n \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n| > \frac{1}{\varepsilon};$$

– platí: $z_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z_n| \to \infty$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}_\infty$

Definícia (konvergentná postupnosť v $\mathbb{C}_\infty$)

Hovoríme, že postupnosť bodov $(z_n)_1^\infty$, kde $z_n \in \mathbb{C}_\infty$, konverguje k bodu $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, akk ku každému okoliu $U(z_0)$ bodu z_0 existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ platí $z_n \in U(z_0)$. Bod $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ nazývame limitou postupnosti $(z_n)_1^\infty$.

– zápis $z_n \to \infty$, $z_n \in \mathbb{C}$ **má teda zmysel** a dá sa definovať napr. takto:

$$z_n \to \infty,\ z_n \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n| > \frac{1}{\varepsilon};$$

– platí: $z_n \to \infty \quad \Leftrightarrow \quad |z_n| \to \infty$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: konvergencia v $\mathbb{C}_\infty$

Definícia (konvergentná postupnosť v $\mathbb{C}_\infty$)

Hovoríme, že postupnosť bodov $(z_n)_1^\infty$, kde $z_n \in \mathbb{C}_\infty$, konverguje k bodu $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$, akk ku každému okoliu $U(z_0)$ bodu z_0 existuje prirodzené číslo n_0 také, že pre každé prirodzené číslo $n \geq n_0$ platí $z_n \in U(z_0)$. Bod $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ nazývame limitou postupnosti $(z_n)_1^\infty$.

– zápis $z_n \to \infty$, $z_n \in \mathbb{C}$ **má teda zmysel** a dá sa definovať napr. takto:

$$z_n \to \infty,\ z_n \in \mathbb{C} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |z_n| > \frac{1}{\varepsilon};$$

– platí: $z_n \to \infty \ \Leftrightarrow\ |z_n| \to \infty$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

Definícia (súčet komplexného radu)

Súčtom komplexného radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}$, nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$ a zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

– komplexný rad nazývame **konvergentný**, akk konverguje jeho pčs;
– komplexný rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame **divergentný**

Tvrdenie II.3

Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je konvergentný práve vtedy, keď konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

Definícia (súčet komplexného radu)

Súčtom komplexného radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}$, nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$ a zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

– komplexný rad nazývame **konvergentný**, akk konverguje jeho pčs;
– komplexný rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame **divergentný**

Tvrdenie II.3

Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je konvergentný práve vtedy, keď konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

Definícia (súčet komplexného radu)

Súčtom komplexného radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}$, nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$ a zapisujeme $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s$.

– komplexný rad nazývame **konvergentný**, akk konverguje jeho pčs;
– komplexný rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame **divergentný**

Tvrdenie II.3

Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je konvergentný práve vtedy, keď konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

Definícia (súčet komplexného radu)

Súčtom komplexného radu $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, kde $z_n \in \mathbb{C}$, nazývame konečnú limitu postupnosti jeho čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$ a zapisujeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

– komplexný rad nazývame **konvergentný**, akk konverguje jeho pčs;
– komplexný rad, ktorý nie je konvergentný, nazývame **divergentný**

Tvrdenie II.3

Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je konvergentný práve vtedy, keď konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

Definícia (absolútna konvergencia komplexného radu)

Hovoríme, že komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je absolútne konvergentný, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nazývame relatívne konvergentný, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ diverguje.

Tvrdenie II.4

Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď absolútne konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

Definícia (absolútna konvergencia komplexného radu)

Hovoríme, že komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je absolútne konvergentný, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ nazývame relatívne konvergentný, akk konverguje rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ a rad $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ diverguje.

Tvrdenie II.4

Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ je absolútne konvergentný práve vtedy, keď absolútne konvergujú rady $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, z_n$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, z_n$.

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

- Konvergencia radu sa nezmení, ak vynecháme, alebo pridáme, alebo zmeníme konečný počet členov.
- Ak konverguje komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, potom $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.
- Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = 0$.
- **Cauchyho-Bolzanovo kritérium**: Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon.$$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

- Konvergencia radu sa nezmení, ak vynecháme, alebo pridáme, alebo zmeníme konečný počet členov.
- Ak konverguje komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, potom $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.
- Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď $$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = 0.$$
- **Cauchyho-Bolzanovo kritérium**: Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď $$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon.$$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

- Konvergencia radu sa nezmení, ak vynecháme, alebo pridáme, alebo zmeníme konečný počet členov.
- Ak konverguje komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, potom $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.
- Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď
  $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = 0$.
- **Cauchyho-Bolzanovo kritérium**: Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon.$$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

- Konvergencia radu sa nezmení, ak vynecháme, alebo pridáme, alebo zmeníme konečný počet členov.
- Ak konverguje komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, potom $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.
- Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k = 0$.
- **Cauchyho-Bolzanovo kritérium**: Komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ konverguje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \ \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon.$$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

- Ak komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konverguje, potom konverguje.
- Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ a $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w$ sú komplexné konvergentné rady. Potom rady $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$, kde $c \in \mathbb{C}$, sú konvergentné a platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n \pm w_n) = s + w, \quad \sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cs.$$

Zopakovanie pojmov a tvrdení: rady komplexných čísel

- Ak komplexný rad $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ absolútne konverguje, potom konverguje.
- Nech $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$ a $\sum_{n=1}^{\infty} w_n = w$ sú komplexné konvergentné rady. Potom rady $\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm w_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} cz_n$, kde $c \in \mathbb{C}$, sú konvergentné a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}(z_n \pm w_n) = s + w, \quad \sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cs.$$

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f, označujeme D_f;
– obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f, označujeme H_f, t.j.

$$H_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};\ (\exists z \in D_f)\ w = f(z)\};$$

– pre $z \in D_f$ každý bod z množiny $f(z)$ nazývame (funkčnou) **hodnotou** funkcie f v bode z;
– ak pre každý bod $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednobodová, funkciu f nazývame **jednoznačná**;
– ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež mnohoznačná).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f, označujeme D_f;
– obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f, označujeme H_f, t.j.

$$H_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};\ (\exists z \in D_f)\ w = f(z)\};$$

– pre $z \in D_f$ každý bod z množiny $f(z)$ nazývame (funkčnou) **hodnotou** funkcie f v bode z;
– ak pre každý bod $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednobodová, funkciu f nazývame **jednoznačná**;
– ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež mnohoznačná).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f, označujeme D_f;
– obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f, označujeme H_f, t.j.

$$H_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};\ (\exists z \in D_f)\ w = f(z)\};$$

– pre $z \in D_f$ každý bod z množiny $f(z)$ nazývame (funkčnou) **hodnotou** funkcie f v bode z;
– ak pre každý bod $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednobodová, funkciu f nazývame **jednoznačná**;
– ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež mnohoznačná).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f, označujeme D_f;
– obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f, označujeme H_f, t.j.

$$H_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};\ (\exists z \in D_f)\ w = f(z)\};$$

– pre $z \in D_f$ každý bod z množiny $f(z)$ nazývame (funkčnou) **hodnotou** funkcie f v bode z;
– ak pre každý bod $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednobodová, funkciu f nazývame **jednoznačná**;
– ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež mnohoznačná).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f, označujeme D_f;
– obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f, označujeme H_f, t.j.

$$H_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};\ (\exists z \in D_f)\ w = f(z)\};$$

– pre $z \in D_f$ každý bod z množiny $f(z)$ nazývame (funkčnou) **hodnotou** funkcie f v bode z;
– ak pre každý bod $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednobodová, funkciu f nazývame **jednoznačná**;
– ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež mnohoznačná).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f, označujeme D_f;
– obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f, označujeme H_f, t.j.

$$H_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};\ (\exists z \in D_f)\ w = f(z)\};$$

– pre $z \in D_f$ každý bod z množiny $f(z)$ nazývame (funkčnou) **hodnotou** funkcie f v bode z;
– ak pre každý bod $z \in D_f$ je množina $f(z)$ jednobodová, funkciu f nazývame **jednoznačná**;
– ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež mnohoznačná).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– funkciu f nazývame **konečná**, akk $H_f \subset \mathbb{C}$;
– ak f je viacznačná funkcia, tak funkciu φ, pre ktorú platí
  a) $D_\varphi \subset D_f$,
  b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$,
nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f;
– ak f je jednoznačná funkcia, každému bodu $w \in H_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$;
– funkcia určujúca takéto priradenie sa nazýva **inverzná k funkcii** f, t.j. $z = f^{-1}(w)$;
– ak funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** (tiež jednojednoznačná, alebo jednolistá).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– funkciu f nazývame **konečná**, akk $H_f \subset \mathbb{C}$;

– ak f je viacznačná funkcia, tak funkciu φ, pre ktorú platí

a) $D_\varphi \subset D_f$,

b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$,

nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f;

– ak f je jednoznačná funkcia, každému bodu $w \in H_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$;

– funkcia určujúca takéto priradenie sa nazýva **inverzná k funkcii** f, t.j. $z = f^{-1}(w)$;

– ak funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** (tiež jednojednoznačná, alebo jednolistá).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– funkciu f nazývame **konečná**, akk $H_f \subset \mathbb{C}$;
– ak f je viacznačná funkcia, tak funkciu φ, pre ktorú platí

a) $D_\varphi \subset D_f$,
b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$,

nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f;
– ak f je jednoznačná funkcia, každému bodu $w \in H_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$;
– funkcia určujúca takéto priradenie sa nazýva **inverzná k funkcii** f, t.j. $z = f^{-1}(w)$;
– ak funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** (tiež jednojednoznačná, alebo jednolistá).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– funkciu f nazývame **konečná**, akk $H_f \subset \mathbb{C}$;
– ak f je viacznačná funkcia, tak funkciu φ, pre ktorú platí

a) $D_\varphi \subset D_f$,
b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$,

nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f;
– ak f je jednoznačná funkcia, každému bodu $w \in H_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$;
– funkcia určujúca takéto priradenie sa nazýva **inverzná k funkcii** f, t.j. $z = f^{-1}(w)$;
– ak funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** (tiež jednojednoznačná, alebo jednolistá).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– funkciu f nazývame **konečná**, akk $H_f \subset \mathbb{C}$;
– ak f je viacznačná funkcia, tak funkciu φ, pre ktorú platí

a) $D_\varphi \subset D_f$,
b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$,

nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f;
– ak f je jednoznačná funkcia, každému bodu $w \in H_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$;
– funkcia určujúca takéto priradenie sa nazýva **inverzná k funkcii** f, t.j. $z = f^{-1}(w)$;
– ak funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** (tiež jednojednoznačná, alebo jednolistá).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

– funkciu f nazývame **konečná**, akk $H_f \subset \mathbb{C}$;
– ak f je viacznačná funkcia, tak funkciu φ, pre ktorú platí

a) $D_\varphi \subset D_f$,
b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$,

nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f;
– ak f je jednoznačná funkcia, každému bodu $w \in H_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$;
– funkcia určujúca takéto priradenie sa nazýva **inverzná k funkcii** f, t.j. $z = f^{-1}(w)$;
– ak funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** (tiež jednojednoznačná, alebo jednolistá).

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!

– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.

– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;

– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!
– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.
– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;
– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!
– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i} v(x,y)$.
– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;
– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!
– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i}\operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.
– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;
– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.