Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza

Prednáška 3

1. marca 2024

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!

– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.

– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;

– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!
– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.
– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;
– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!
– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.
– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;
– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Komplexná funkcia komplexnej premennej

Definícia

Každú reláciu f na rozšírenej Gaussovej rovine $\mathbb{C}_\infty$, t.j. $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$, nazývame komplexná funkcia komplexnej premennej.

Dohoda: Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**!
– ak f je jednoznačná, tak každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená **práve jedna** funkčná hodnota $w = f(z) \in H_f$. Označme

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x+\mathrm{i}y), \\ v(x,y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x+\mathrm{i}y). \end{aligned}$$

Potom $f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$.
– funkciu u nazývame **reálna zložka** funkcie f;
– funkciu v nazývame **imaginárna zložka** funkcie f.

Limita funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **limitu** $\boldsymbol{w_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **vzhľadom na množinu** $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{D_f}$, akk

(i) z_0 je hromadný bod množiny M,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U_\delta^*(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in M$.

– ak funkcia f je definovaná na nejakom $U^*(z_0)$ alebo $M = D_f$, vynechávame prívlastok **vzhľadom na množinu** a píšeme len

$$\lim_{z \to z_0} f(y) = w_0 \quad \text{alebo} \quad f(z) \to w_0 \text{ pre } z \to z_0$$

Limita funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ **limitu** $w_0 \in \mathbb{C}_\infty$ **vzhľadom na množinu** $M \subset D_f$, akk

(i) z_0 je hromadný bod množiny M,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U^*_\delta(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in M$.

– ak funkcia f je definovaná na nejakom $U^*(z_0)$ alebo $M = D_f$, vynechávame prívlastok **vzhľadom na množinu** a píšeme len

$$\lim_{z \to z_0} f(y) = w_0 \quad \text{alebo} \quad f(z) \to w_0 \text{ pre } z \to z_0$$

Limita funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **limitu** $\boldsymbol{w_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **vzhľadom na množinu** $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{D_f}$, akk

(i) z_0 je hromadný bod množiny M,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U^*_\delta(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in M$.

– v závislosti na hodnotách z_0 a w_0 dostávame:

- ak $z_0, w_0 \in \mathbb{C}$, tak

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z \in M)\;\; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Limita funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **limitu** $\boldsymbol{w_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **vzhľadom na množinu** $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{D_f}$, akk

(i) z_0 je hromadný bod množiny M,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U^*_\delta(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in M$.

– v závislosti na hodnotách z_0 a w_0 dostávame:

- ak $z_0 = \infty$ a $w_0 \in \mathbb{C}$, tak

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z \in M)\ \ |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$$

Limita funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **limitu** $\boldsymbol{w_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **vzhľadom na množinu** $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{D_f}$, akk

(i) z_0 je hromadný bod množiny M,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U^*_\delta(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in M$.

– v závislosti na hodnotách z_0 a w_0 dostávame:

- ak $z_0 \in \mathbb{C}$ a $w_0 = \infty$, tak

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z \in M)\;\; 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Limita funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia** f **má v bode** $\boldsymbol{z_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **limitu** $\boldsymbol{w_0} \in \mathbb{C}_\infty$ **vzhľadom na množinu** $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{D_f}$, akk

(i) z_0 je hromadný bod množiny M,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U^*_\delta(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in M$.

– v závislosti na hodnotách z_0 a w_0 dostávame:

- ak $z_0 = \infty$ a $w_0 = \infty$, tak

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z \in M)\;\; |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$$

Vety o limitách funkcie

Fakt: keďže pojem okolie je základným pojmom v definícii limity funkcie komplexnej premennej v bode, môžeme prevziať všetky všeobecné tvrdenia platiace pre limity zobrazení v metrických alebo topologických priestoroch, ktoré vyplývajú z vlastností okolí!!!

Veta (Heineho)

Nech f je komplexná funkcia a bod z_0 je hromadný bod množiny $M \subset D_f$. Limita $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ práve vtedy, keď pre ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in M$, $z_n \neq z_0$ konvergujúcu k z_0, postupnosť funkčných hodnôt $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k w_0.

Veta (o jednoznačnosti limity)

Každá funkcia má v bode nanajvýš jednu limitu (vzhľadom na množinu).

Vety o limitách funkcie

Fakt: keďže pojem okolie je základným pojmom v definícii limity funkcie komplexnej premennej v bode, môžeme prevziať všetky všeobecné tvrdenia platiace pre limity zobrazení v metrických alebo topologických priestoroch, ktoré vyplývajú z vlastností okolí!!!

Veta (Heineho)

Nech f je komplexná funkcia a bod z_0 je hromadný bod množiny $M \subset D_f$. Limita $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ práve vtedy, keď pre ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in M$, $z_n \neq z_0$ konvergujúcu k z_0, postupnosť funkčných hodnôt $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k w_0.

Veta (o jednoznačnosti limity)

Každá funkcia má v bode nanajvýš jednu limitu (vzhľadom na množinu).

Vety o limitách funkcie

Fakt: keďže pojem okolie je základným pojmom v definícii limity funkcie komplexnej premennej v bode, môžeme prevziať všetky všeobecné tvrdenia platiace pre limity zobrazení v metrických alebo topologických priestoroch, ktoré vyplývajú z vlastností okolí!!!

Veta (Heineho)

Nech f je komplexná funkcia a bod z_0 je hromadný bod množiny $M \subset D_f$. Limita $\lim_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = w_0$ práve vtedy, keď pre ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $z_n \in M$, $z_n \neq z_0$ konvergujúcu k z_0, postupnosť funkčných hodnôt $(f(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k w_0.

Veta (o jednoznačnosti limity)

Každá funkcia má v bode nanajvýš jednu limitu (vzhľadom na množinu).

Vety o limitách funkcie

Fakt: keďže pojem okolie je základným pojmom v definícii limity funkcie komplexnej premennej v bode, môžeme prevziať všetky všeobecné tvrdenia platiace pre limity zobrazení v metrických alebo topologických priestoroch, ktoré vyplývajú z vlastností okolí!!!

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium)

Konečná limita $\lim\limits_{z \to z_0, z \in M} f(z)$ existuje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z_1, z_2 \in M)\ \ z_1, z_2 \in U_\delta^*(z_0) \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Veta III.1

Ak f je komplexná funkcia a z_0 je hromadný bod množiny $M \subset D_f$, tak

(i) $\lim\limits_{z \to z_0, z \in M} f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z \to z_0, z \in M} |f(z)| = 0;$

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0, z \in M} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{z \to z_0, z \in M} |f(z)| = \infty.$

Vety o limitách funkcie

Fakt: keďže pojem okolie je základným pojmom v definícii limity funkcie komplexnej premennej v bode, môžeme prevziať všetky všeobecné tvrdenia platiace pre limity zobrazení v metrických alebo topologických priestoroch, ktoré vyplývajú z vlastností okolí!!!

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium)

Konečná limita $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z)$ existuje práve vtedy, keď

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall z_1, z_2 \in M)\;\; z_1, z_2 \in U^*_\delta(z_0) \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

Veta III.1

Ak f je komplexná funkcia a z_0 je hromadný bod množiny $M \subset D_f$, tak

(i) $\lim\limits_{z \to z_0, z \in M} f(z) = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{z \to z_0, z \in M} |f(z)| = 0$;

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0, z \in M} f(z) = \infty \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{z \to z_0, z \in M} |f(z)| = \infty$.

Veta (o algebrických operáciách s limitami)

Nech existujú $\lim\limits_{z\to z_0, z\in M} f(z) = A$ a $\lim\limits_{z\to z_0, z\in M} g(z) = B$. Potom

a) $\lim\limits_{z\to z_0, z\in M} |f(z)| = |A|$;

b) ak $A + B$ je definovaný, tak existuje $\lim\limits_{z\to z_0, z\in M} (f(z) + g(z))$ a platí

$$\lim_{z\to z_0, z\in M} (f(z) + g(z)) = A + B;$$

c) ak $A \cdot B$ je definovaný, tak existuje $\lim\limits_{z\to z_0, z\in M} (f(z) \cdot g(z))$ a platí

$$\lim_{z\to z_0, z\in M} (f(z) \cdot g(z)) = A \cdot B;$$

d) ak A/B je definovaný, tak existuje $\lim\limits_{z\to z_0, z\in M} (f(z)/g(z))$ a platí

$$\lim_{z\to z_0, z\in M} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}.$$

Vety o limitách funkcie

Veta (o limite zloženej funkcie)

Nech existujú $\lim\limits_{z\to a, z\in A} g(z) = b$ a $\lim\limits_{w\to b, w\in B} f(w)$, pričom $g(A) \subset B$. Ak existuje $U^*(z_0)$ také, že pre všetky $z \in U^*(z_0) \cap A$ je $g(z) \neq b$, tak existuje $\lim\limits_{z\to a, z\in A} (f \circ g)(z)$ a platí

$$\lim_{z\to z_0, z\in A} (f \circ g)(z) = \lim_{w\to b, w\in B} g(w).$$

Veta III.2

Nech $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$. Funkcia f má v bode z_0 konečnú limitu práve vtedy, keď reálne funkcie u, v majú konečné limity v bode (x_0, y_0) a platí

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + \mathrm{i} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y).$$

Vety o limitách funkcie

Veta (o limite zloženej funkcie)

Nech existujú $\lim\limits_{z\to a, z\in A} g(z) = b$ a $\lim\limits_{w\to b, w\in B} f(w)$, pričom $g(A) \subset B$. Ak existuje $U^*(z_0)$ také, že pre všetky $z \in U^*(z_0) \cap A$ je $g(z) \neq b$, tak existuje $\lim\limits_{z\to a, z\in A} (f\circ g)(z)$ a platí

$$\lim_{z\to z_0, z\in A} (f\circ g)(z) = \lim_{w\to b, w\in B} g(w).$$

Veta III.2

Nech $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. Funkcia f má v bode z_0 konečnú limitu práve vtedy, keď reálne funkcie u, v majú konečné limity v bode (x_0, y_0) a platí

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + \mathrm{i} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y).$$

Spojitosť funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ vzhľadom na množinu $M \subset D_f$**, akk

(i) $z_0 \in M$,

(ii) k ľubovoľnému okoliu $U(f(z_0))$ existuje okolie $U(z_0)$ bodu z_0 také, že pre všetky $z \in U(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U(f(z_0))$.

– ak M je kruhové okolie bodu z_0, hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode z_0, t.j. $(\forall U(f(z_0)))(\exists U(z_0))(\forall z \in U(z_0))\ f(z) \in U(f(z_0))$;

– funkciu f nazývame spojitá na množine M, akk f je spojitá v každom bode množiny M vzhľadom na množinu M;

– hovoríme, že f je spojitá funkcia, akk je spojitá v každom bode D_f.

Spojitosť funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ vzhľadom na množinu $M \subset D_f$**, akk

(i) $z_0 \in M$,

(ii) k ľubovoľnému okoliu $U(f(z_0))$ existuje okolie $U(z_0)$ bodu z_0 také, že pre všetky $z \in U(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U(f(z_0))$.

– ak M je kruhové okolie bodu z_0, hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode z_0, t.j. $(\forall U(f(z_0)))(\exists U(z_0))(\forall z \in U(z_0))\ f(z) \in U(f(z_0))$;

– funkciu f nazývame spojitá na množine M, akk f je spojitá v každom bode množiny M vzhľadom na množinu M;

– hovoríme, že f je spojitá funkcia, akk je spojitá v každom bode D_f.

Spojitosť funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ vzhľadom na množinu $M \subset D_f$**, akk

(i) $z_0 \in M$,

(ii) k ľubovoľnému okoliu $U(f(z_0))$ existuje okolie $U(z_0)$ bodu z_0 také, že pre všetky $z \in U(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U(f(z_0))$.

– ak M je kruhové okolie bodu z_0, hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode z_0, t.j. $(\forall U(f(z_0)))(\exists U(z_0))(\forall z \in U(z_0))\ f(z) \in U(f(z_0))$;

– funkciu f nazývame spojitá na množine M, akk f je spojitá v každom bode množiny M vzhľadom na množinu M;

– hovoríme, že f je spojitá funkcia, akk je spojitá v každom bode D_f.

Spojitosť funkcie

Definícia

Hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ vzhľadom na množinu $M \subset D_f$**, akk

(i) $z_0 \in M$,

(ii) k ľubovoľnému okoliu $U(f(z_0))$ existuje okolie $U(z_0)$ bodu z_0 také, že pre všetky $z \in U(z_0) \cap M$ je $f(z) \in U(f(z_0))$.

– ak M je kruhové okolie bodu z_0, hovoríme, že funkcia f je spojitá v bode z_0, t.j. $(\forall U(f(z_0)))(\exists U(z_0))(\forall z \in U(z_0))\ f(z) \in U(f(z_0))$;

– funkciu f nazývame spojitá na množine M, akk f je spojitá v každom bode množiny M vzhľadom na množinu M;

– hovoríme, že f je spojitá funkcia, akk je spojitá v každom bode D_f.

Spojitosť funkcie

Veta III.3

Nech z_0 je hromadný bod množiny D_f. Funkcia f je spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu $M \subset D_f$ práve vtedy, keď

(i) z_0 je hromadný bod množiny M;

(ii) $\lim\limits_{z\to z_0,\, z\in M} f(z) = f(z_0)$.

– špeciálne, ak z_0 je hromadný bod D_f, tak funkcia f je spojitá v bode z_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

Veta III.4

Nech v istom okolí $U(z_0)$ sú všetky hodnoty funkcie f konečné. Potom funkcia f je spojitá v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ práve vtedy, keď $\mathrm{Re}\, f$ a $\mathrm{Im}\, f$ sú spojité v bode (x_0, y_0).

Spojitosť funkcie

Veta III.3

Nech z_0 je hromadný bod množiny D_f. Funkcia f je spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu $M \subset D_f$ práve vtedy, keď

(i) z_0 je hromadný bod množiny M;

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = f(z_0)$.

– špeciálne, ak z_0 je hromadný bod D_f, tak funkcia f je spojitá v bode z_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Veta III.4

Nech v istom okolí $U(z_0)$ sú všetky hodnoty funkcie f konečné. Potom funkcia f je spojitá v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$ práve vtedy, keď $\mathrm{Re}\, f$ a $\mathrm{Im}\, f$ sú spojité v bode (x_0, y_0).

Spojitosť funkcie

Veta III.3

Nech z_0 je hromadný bod množiny D_f. Funkcia f je spojitá v bode z_0 vzhľadom na množinu $M \subset D_f$ práve vtedy, keď

(i) z_0 je hromadný bod množiny M;

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in M} f(z) = f(z_0)$.

– špeciálne, ak z_0 je hromadný bod D_f, tak funkcia f je spojitá v bode z_0 práve vtedy, keď $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Veta III.4

Nech v istom okolí $U(z_0)$ sú všetky hodnoty funkcie f konečné. Potom funkcia f je spojitá v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$ práve vtedy, keď $\mathrm{Re}\, f$ a $\mathrm{Im}\, f$ sú spojité v bode (x_0, y_0).

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(i) Mocninová funkcia:

– $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, pričom $z^{n+1} := z \cdot z^n$ pre $n \in \mathbb{N}$, kde $z^1 := z$;
– definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty$;
– $z^n = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$;
– $z^n = \infty \;\Leftrightarrow\; z = \infty$;

(ii) Polynomická funkcia:

– $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$;
– limita $\lim\limits_{z \to \infty} P(z)$ vždy existuje, preto P môžeme spojite rozšíriť na $\mathbb{C}_\infty$ položením $P(\infty) = \infty$;
– t.j. P je definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty$;

(iii) Racionálna funkcia:

– $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q sú polynomické funkcie;
– definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C};\, Q(z) = 0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(i) Mocninová funkcia:
– $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, pričom $z^{n+1} := z \cdot z^n$ pre $n \in \mathbb{N}$, kde $z^1 := z$;
– definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty$;
– $z^n = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$;
– $z^n = \infty \;\Leftrightarrow\; z = \infty$;

(ii) Polynomická funkcia:
– $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$;
– limita $\lim\limits_{z\to\infty} P(z)$ vždy existuje, preto P môžeme spojite rozšíriť na $\mathbb{C}_\infty$ položením $P(\infty) = \infty$;
– t.j. P je definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty$;

(iii) Racionálna funkcia:
– $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q sú polynomické funkcie;
– definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C};\, Q(z) = 0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(i) Mocninová funkcia:

– $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$, pričom $z^{n+1} := z \cdot z^n$ pre $n \in \mathbb{N}$, kde $z^1 := z$;

– definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty$;

– $z^n = 0 \;\Leftrightarrow\; z = 0$;

– $z^n = \infty \;\Leftrightarrow\; z = \infty$;

(ii) Polynomická funkcia:

– $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$;

– limita $\lim\limits_{z\to\infty} P(z)$ vždy existuje, preto P môžeme spojite rozšíriť na $\mathbb{C}_\infty$ položením $P(\infty) = \infty$;

– t.j. P je definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty$;

(iii) Racionálna funkcia:

– $R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, kde P, Q sú polynomické funkcie;

– definovaná a spojitá na $\mathbb{C}_\infty \setminus \{z \in \mathbb{C};\, Q(z) = 0\}$;

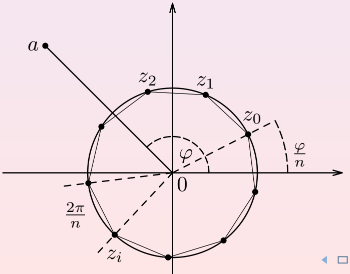
Elementárne funkcie komplexnej premennej

(iv) *n*-tá odmocnina:

– inverzná funkcia k mocninovej funkcii, t.j. $\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C};\, w^n = z\}$;
– definovaná na $\mathbb{C}_\infty$, pričom $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$;
– je *n*-značná funkcia: pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ existuje práve n rôznych hodnôt $z_k = (\sqrt[n]{z})_k$ pre $k = 1, \dots, n$ vyjadriteľných napr. v tvare

$$z_k = \sqrt[n]{|z|}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\arg z + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

– geometrická interpretácia hodnoty n-tej odmocniny = vrcholy pravidelného n-uholníka so stredom v počiatku;



Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

1. Pre každé $z \in \mathbb{C}_\infty$ je $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

1. Pre každé $z \in \mathbb{C}_\infty$ je $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

1. Pre každé $z \in \mathbb{C}_\infty$ je $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\, \sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\, \sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou
– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

2. Pre každé dva body $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

3. Funkcia e^z je jednoznačná a spojitá na $\mathbb{C}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

4. Neexistuje $\lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{e}^z$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) **Exponenciálna funkcia**:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

5. $\mathrm{e}^z = 1$ práve vtedy, keď $z = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou
– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

6. $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ práve vtedy, keď $z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(v) Exponenciálna funkcia:

Definícia

Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme (komplexnú) exponenciálnu funkciu (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z := e^x(\cos y + \mathrm{i}\,\sin y),$$

kde e^x označuje reálnu exponenciálnu funkciu.

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = e^x(\cos 0 + \mathrm{i}\,\sin 0) = e^x$, t.j. na množine reálnych čísel je komplexná exponenciálna funkcia totožná s reálnou exponenciálnou funkciou

– **základné vlastnosti komplexnej exponenciálnej funkcie**:

7. Funkcia e^z je periodická s periódou $2\pi\mathrm{i}$, t.j. $(\forall z \in \mathbb{C})\ \mathrm{e}^{z+2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$, $k \in \mathbb{Z}$.