Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza

Prednáška 4

8. marca 2024

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\, z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\, w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\, k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow \mathrm{Lg}\, z_1 \neq \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow \mathrm{Lg}\, z_1 \neq \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C}\setminus\{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\,z=\{w\in\mathbb{C};\,z=\mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0\in\mathrm{Lg}\,z$, tak

$$\mathrm{Lg}\,z=\{w\in\mathbb{C};\,w=w_0+2k\pi\mathrm{i},\,k\in\mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\})\ \mathrm{Lg}\,z=\ln|z|+\mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}\setminus\{0\})\ z_1\neq z_2\Rightarrow\mathrm{Lg}\,z_1\neq\mathrm{Lg}\,z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow \mathrm{Lg}\, z_1 \neq \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ w = w_0 + 2k\pi \mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln |z| + \mathrm{i} \operatorname{Arg} z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow \mathrm{Lg}\, z_1 \neq \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow \mathrm{Lg}\, z_1 \neq \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\, z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\, w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\, k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

1. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ z_1 \neq z_2 \Rightarrow \mathrm{Lg}\, z_1 \neq \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\, z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\, w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln |z| + \mathrm{i}\, \mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

2. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\,(z_1 \cdot z_2) = \mathrm{Lg}\, z_1 + \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

3. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, \dfrac{z_1}{z_2} = \mathrm{Lg}\, z_1 - \mathrm{Lg}\, z_2$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– definičným oborom logaritmickej funkcie je množina $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– oborom hodnôt logaritmickej funkcie je $\mathbb{C}$;
– logaritmom komplexného čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ nazývame množinu $\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ z = \mathrm{e}^w\}$, jej prvky hodnoty logaritmu čísla z;
– z periodičnosti exponenciálnej funkcie máme, že ak $w_0 \in \mathrm{Lg}\, z$, tak

$$\mathrm{Lg}\, z = \{w \in \mathbb{C};\ w = w_0 + 2k\pi\mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}\};$$

– $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{Lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\, z$
– **základné vlastnosti logaritmu**:

4. $(\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\})(\forall n \in \mathbb{N})\ \mathrm{Lg}\, z_1^n = n\, \mathrm{Lg}\, z_1$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– hlavná hodnota logaritmu: $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{lg}\, z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z$;
– $(\forall x > 0)\ \mathrm{lg}\, x = \ln x$;
– hlavná hodnota logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– hlavná hodnota logaritmu je spojitá na množine

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\};$$

– vetva logaritmu, ktorá jednoznačne zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sa nazýva k-ta vetva logaritmu, označuje sa Lg_k;
– každá k-ta vetva logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– hlavná hodnota logaritmu: $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$;
– $(\forall x > 0)\ \mathrm{lg}\, x = \ln x$;
– hlavná hodnota logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– hlavná hodnota logaritmu je spojitá na množine

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\};$$

– vetva logaritmu, ktorá jednoznačne zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sa nazýva k-ta vetva logaritmu, označuje sa Lg_k;
– každá k-ta vetva logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– hlavná hodnota logaritmu: $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{lg}\, z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z$;
– $(\forall x > 0)\ \mathrm{lg}\, x = \ln x$;
– hlavná hodnota logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– hlavná hodnota logaritmu je spojitá na množine

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\};$$

– vetva logaritmu, ktorá jednoznačne zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sa nazýva k-ta vetva logaritmu, označuje sa Lg_k;
– každá k-ta vetva logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– hlavná hodnota logaritmu: $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{lg}\, z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z$;
– $(\forall x > 0)\ \mathrm{lg}\, x = \ln x$;
– hlavná hodnota logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– hlavná hodnota logaritmu je spojitá na množine

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\};$$

– vetva logaritmu, ktorá jednoznačne zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sa nazýva k-ta vetva logaritmu, označuje sa Lg_k;
– každá k-ta vetva logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– hlavná hodnota logaritmu: $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{lg}\, z = \ln |z| + \mathrm{i} \arg z$;
– $(\forall x > 0)\ \mathrm{lg}\, x = \ln x$;
– hlavná hodnota logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– hlavná hodnota logaritmu je spojitá na množine

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\};$$

– vetva logaritmu, ktorá jednoznačne zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sa nazýva k-ta vetva logaritmu, označuje sa Lg_k;
– každá k-ta vetva logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vi) Logaritmická funkcia:

Definícia

Logaritmická funkcia (označujeme Lg, alebo aj Ln) je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii.

– hlavná hodnota logaritmu: $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})\ \mathrm{lg}\, z = \ln|z| + \mathrm{i} \arg z$;
– $(\forall x > 0)\ \mathrm{lg}\, x = \ln x$;
– hlavná hodnota logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
– hlavná hodnota logaritmu je spojitá na množine

$$\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\, z = 0 \wedge \mathrm{Re}\, z \leq 0\};$$

– vetva logaritmu, ktorá jednoznačne zobrazuje $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu

$$P_k := \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \mathrm{Im}\, z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

sa nazýva k-ta vetva logaritmu, označuje sa Lg_k;
– každá k-ta vetva logaritmu je jednolistá na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^\alpha := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \mathrm{Lg}\, z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^α nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;

– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \,\mathrm{Lg}\, z}$;

– z^α je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;

– z^α je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;

– z^α je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;

– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \lg z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^\alpha := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \operatorname{Lg} z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^α nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;
– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Lg} z}$;
– z^α je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;
– z^α je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;
– z^α je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \lg z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^\alpha := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \mathrm{Lg}\, z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^α nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;
– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{Lg}\, z}$;
– z^α je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;
– z^α je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;
– z^α je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{lg}\, z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^{\alpha} := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \mathrm{Lg}\, z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^{α} nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;
– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{Lg}\, z}$;
– z^{α} je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;
– z^{α} je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;
– z^{α} je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^{\alpha} = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{lg}\, z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^\alpha := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \operatorname{Lg} z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^α nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;
– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Lg} z}$;
– z^α je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;
– z^α je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;
– z^α je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \lg z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^\alpha := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \mathrm{Lg}\, z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^α nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;
– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{Lg}\, z}$;
– z^α je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;
– z^α je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;
– z^α je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, \lg z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ funkciu

$$z^\alpha := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{\alpha s}, \text{ kde } s \in \operatorname{Lg} z\}$$

nazývame α-tá všeobecná mocnina.

– každý prvok množiny z^α nazývame hodnota α-tej mocniny čísla z;
– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \operatorname{Lg} z}$;
– z^α je jednoznačná práve vtedy, keď $\alpha \in \mathbb{Z}$;
– z^α je n-značná práve vtedy, keď $\alpha = \frac{m}{n}$, kde $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ a $(m, n) = 1$;
– z^α je nekonečnoznačná v zostávajúcich prípadoch;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu α-tej všeobecnej mocniny $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \lg z}$;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme všeobecnú exponenciálnu funkciu predpisom

$$a^z := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{zs}, \text{ kde } s \in \mathrm{Lg}\, a\}.$$

– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Lg}\,a}$;
– a^z je jednoznačná na $\mathbb{Z}$, na niektorých množinách je n-značná a existuje množina, na ktorej je nekonečnoznačná;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu všeobecnej exponenciálnej funkcie $a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{lg}\,a}$;
– zrejme, pre $a = \mathrm{e}$ definície exponenciálnej a všeobecnej exponenciálnej funkcie dávajú tú istú (komplexnú exponenciálnu) funkciu;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme všeobecnú exponenciálnu funkciu predpisom

$$a^z := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{zs}, \text{ kde } s \in \operatorname{Lg} a\}.$$

– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $a^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Lg} a}$;

– a^z je jednoznačná na $\mathbb{Z}$, na niektorých množinách je n-značná a existuje množina, na ktorej je nekonečnoznačná;

– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu všeobecnej exponenciálnej funkcie $a^z = \mathrm{e}^{z \lg a}$;

– zrejme, pre $a = \mathrm{e}$ definície exponenciálnej a všeobecnej exponenciálnej funkcie dávajú tú istú (komplexnú exponenciálnu) funkciu;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme všeobecnú exponenciálnu funkciu predpisom

$$a^z := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{zs},\ \text{kde}\, s \in \operatorname{Lg} a\}\,.$$

– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $a^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Lg} a}$;
– a^z je jednoznačná na $\mathbb{Z}$, na niektorých množinách je n-značná a existuje množina, na ktorej je nekonečnoznačná;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu všeobecnej exponenciálnej funkcie $a^z = \mathrm{e}^{z \lg a}$;
– zrejme, pre $a = \mathrm{e}$ definície exponenciálnej a všeobecnej exponenciálnej funkcie dávajú tú istú (komplexnú exponenciálnu) funkciu;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme všeobecnú exponenciálnu funkciu predpisom

$$a^z := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{zs}, \text{ kde } s \in \operatorname{Lg} a\}.$$

– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $a^z = \mathrm{e}^{z \operatorname{Lg} a}$;
– a^z je jednoznačná na $\mathbb{Z}$, na niektorých množinách je n-značná a existuje množina, na ktorej je nekonečnoznačná;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu všeobecnej exponenciálnej funkcie $a^z = \mathrm{e}^{z \lg a}$;
– zrejme, pre $a = \mathrm{e}$ definície exponenciálnej a všeobecnej exponenciálnej funkcie dávajú tú istú (komplexnú exponenciálnu) funkciu;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(vii) Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia:

Definícia

Nech $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme všeobecnú exponenciálnu funkciu predpisom

$$a^z := \{w \in \mathbb{C}; w = \mathrm{e}^{zs}, \text{ kde } s \in \mathrm{Lg}\, a\}\,.$$

– podľa poznámky o zápise viacznačných funkcií píšeme $a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{Lg}\,a}$;
– a^z je jednoznačná na $\mathbb{Z}$, na niektorých množinách je n-značná a existuje množina, na ktorej je nekonečnoznačná;
– pre hlavnú hodnotu logaritmu dostávame hlavnú hodnotu všeobecnej exponenciálnej funkcie $a^z = \mathrm{e}^{z\,\mathrm{lg}\,a}$;
– zrejme, pre $a = \mathrm{e}$ definície exponenciálnej a všeobecnej exponenciálnej funkcie dávajú tú istú (komplexnú exponenciálnu) funkciu;

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \iff z = k\pi$ a $\cos z = 0 \iff z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \ z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \ z \neq k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z},\ z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z},\ z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \qquad \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(viii) Goniometrické funkcie:

Definícia

Funkcie sínus a kosínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

– pre $z = x \in \mathbb{R}$ je $\sin z = \sin x$ a $\cos z = \cos x$;
– $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$;
– $\sin z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = k\pi$ a $\cos z = 0 \;\Leftrightarrow\; z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
– obe sú periodické funkcie s periódou 2π;
– obe sú jednoznačné a spojité funkcie na $\mathbb{C}$;
– (komplexný) sínus a kosínus sú **neohraničené funkcie**!!!
– tangens a kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tg} z := \frac{\sin z}{\cos z}, \; z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \operatorname{cotg} z := \frac{\cos z}{\sin z}, \; z \neq k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(ix) Hyperbolické funkcie:

Definícia

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme hyperbolický sínus a hyperbolický kosínus predpisom

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\sinh z = -i \sin iz, \qquad \sin z = -i \sinh iz$$
$$\cosh z = \cos iz, \qquad \cos z = \cosh iz$$

– hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tgh} z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \operatorname{cotgh} z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(ix) Hyperbolické funkcie:

Definícia

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme hyperbolický sínus a hyperbolický kosínus predpisom

$$\sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \qquad \cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\sinh z = -i \sin iz, \qquad \sin z = -i \sinh iz$$
$$\cosh z = \cos iz, \qquad \cos z = \cosh iz$$

– hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tgh} z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \operatorname{cotgh} z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(ix) Hyperbolické funkcie:

Definícia

Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme hyperbolický sínus a hyperbolický kosínus predpisom

$$\sinh z := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \cosh z := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\sinh z = -\mathrm{i} \sin \mathrm{i} z, \qquad \sin z = -\mathrm{i} \sinh \mathrm{i} z$$

$$\cosh z = \cos \mathrm{i} z, \qquad \cos z = \cosh \mathrm{i} z$$

– hyperbolický tangens a hyperbolický kotangens definované "štandardne", t.j.

$$\operatorname{tgh} z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \operatorname{cotgh} z := \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(x) Cyklometrické funkcie:

Definícia

Cyklometrické funkcie arkussínus, arkuskosínus, arkustangens, arkuskotangens sú definované pre $z \in \mathbb{C}$ predpismi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \sin w = z\}, \\ \operatorname{Arccos} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \cos w = z\}, \\ \operatorname{Arctg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{tg} w = z\}, \\ \operatorname{Arccotg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{cotg} w = z\}. \end{aligned}$$

– množinu $\operatorname{Arcsin} z$ nazývame arkussínus komplexného čísla z a jej prvky hodnoty arkussínusu čísla z, podobne ostatné;

– cyklometrické funkcie sú nekonečnoznačné;

– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(x) Cyklometrické funkcie:

Definícia

Cyklometrické funkcie arkussínus, arkuskosínus, arkustangens, arkuskotangens sú definované pre $z \in \mathbb{C}$ predpismi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \sin w = z\},\\
\operatorname{Arccos} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \cos w = z\},\\
\operatorname{Arctg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{tg} w = z\},\\
\operatorname{Arccotg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{cotg} w = z\}.
\end{aligned}$$

– množinu $\operatorname{Arcsin} z$ nazývame arkussínus komplexného čísla z a jej prvky hodnoty arkussínusu čísla z, podobne ostatné;

– cyklometrické funkcie sú nekonečnoznačné;

– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i}\operatorname{Lg}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\operatorname{Lg}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(x) Cyklometrické funkcie:

Definícia

Cyklometrické funkcie arkussínus, arkuskosínus, arkustangens, arkuskotangens sú definované pre $z \in \mathbb{C}$ predpismi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \sin w = z\}, \\ \operatorname{Arccos} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \cos w = z\}, \\ \operatorname{Arctg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{tg} w = z\}, \\ \operatorname{Arccotg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{cotg} w = z\}. \end{aligned}$$

– množinu $\operatorname{Arcsin} z$ nazývame arkussínus komplexného čísla z a jej prvky hodnoty arkussínusu čísla z, podobne ostatné;
– cyklometrické funkcie sú nekonečnoznačné;
– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(x) Cyklometrické funkcie:

Definícia

Cyklometrické funkcie arkussínus, arkuskosínus, arkustangens, arkuskotangens sú definované pre $z \in \mathbb{C}$ predpismi:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \sin w = z\}, \\ \operatorname{Arccos} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \cos w = z\}, \\ \operatorname{Arctg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{tg} w = z\}, \\ \operatorname{Arccotg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{cotg} w = z\}. \end{aligned}$$

– množinu $\operatorname{Arcsin} z$ nazývame arkussínus komplexného čísla z a jej prvky hodnoty arkussínusu čísla z, podobne ostatné;
– cyklometrické funkcie sú nekonečnoznačné;
– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i}\operatorname{Lg}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right), \quad \operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i}\operatorname{Lg}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$$

Elementárne funkcie komplexnej premennej

(x) Cyklometrické funkcie:

Definícia

Cyklometrické funkcie arkussínus, arkuskosínus, arkustangens, arkuskotangens sú definované pre $z \in \mathbb{C}$ predpismi:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arcsin} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \sin w = z\},\\
\operatorname{Arccos} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \cos w = z\},\\
\operatorname{Arctg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{tg} w = z\},\\
\operatorname{Arccotg} z &:= \{w \in \mathbb{C};\ \operatorname{cotg} w = z\}.
\end{aligned}$$

– množinu $\operatorname{Arcsin} z$ nazývame arkussínus komplexného čísla z a jej prvky hodnoty arkussínusu čísla z, podobne ostatné;
– cyklometrické funkcie sú nekonečnoznačné;
– pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí:

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Lg} \frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}, \qquad \operatorname{Arccotg} z = \frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Lg} \frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$$