Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

doc. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza

Prednáška 5

15. marca 2024

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej)

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu z_0 a nech existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Hodnotu tejto limity nazývame derivácia funkcie f v bode z_0 a označujeme $f'(z_0)$.

Definícia (diferenciál komplexnej funkcie komplexnej premennej)

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu z_0. Funkciu f nazývame diferencovateľná v bode z_0, akk existuje $A \in \mathbb{C}$ a funkcia ω spojitá v bode 0 s $\omega(0)=0$ také, že

$$f(z_0+h)-f(z_0) = A\cdot h + h\cdot\omega(h).$$

Výraz $A\cdot h$ nazývame diferenciál funkcie f v bode z_0 a označujeme $\mathrm{d}f(z_0)$ alebo $\mathrm{d}f(z)|_{z=z_0}$.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej)

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu z_0 a nech existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}.$$

Hodnotu tejto limity nazývame derivácia funkcie f v bode z_0 a označujeme $f'(z_0)$.

Definícia (diferenciál komplexnej funkcie komplexnej premennej)

Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu z_0. Funkciu f nazývame diferencovateľná v bode z_0, akk existuje $A \in \mathbb{C}$ a funkcia ω spojitá v bode 0 s $\omega(0)=0$ také, že

$$f(z_0+h)-f(z_0) = A\cdot h + h\cdot\omega(h).$$

Výraz $A\cdot h$ nazývame diferenciál funkcie f v bode z_0 a označujeme $\mathrm{d}f(z_0)$ alebo $\mathrm{d}f(z)|_{z=z_0}$.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– z analogickej definície derivácie a limity v komplexnom obore vyplýva, že vzťah medzi *deriváciou*, *diferencovateľnosťou* a *spojitosťou v bode* je rovnaký ako pre funkciu reálnej premennej!

Veta III.6

Ak funkcia f má deriváciu v bode z_0, potom je v tomto bode spojitá.

Veta III.7

Funkcia f je diferencovateľná v bode z_0 práve vtedy, keď má deriváciu v bode z_0, pričom platí $\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0) \cdot h$.

– platia všetky analogické pravidlá pre **deriváciu súčtu, rozdielu, súčinu, podielu** a **kompozície** komplexných funkcií!
– podstatný rozdiel je nasledujúci (nemá analógiu v reálnej analýze)!

Veta III.8

Ak komplexná funkcia komplexnej premennej má deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– z analogickej definície derivácie a limity v komplexnom obore vyplýva, že vzťah medzi *deriváciou*, *diferencovateľnosťou* a *spojitosťou v bode* je rovnaký ako pre funkciu reálnej premennej!

Veta III.6

Ak funkcia f má deriváciu v bode z_0, potom je v tomto bode spojitá.

Veta III.7

Funkcia f je diferencovateľná v bode z_0 práve vtedy, keď má deriváciu v bode z_0, pričom platí $\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0) \cdot h$.

– platia všetky analogické pravidlá pre **deriváciu súčtu, rozdielu, súčinu, podielu** a **kompozície** komplexných funkcií!
– podstatný rozdiel je nasledujúci (nemá analógiu v reálnej analýze)!

Veta III.8

Ak komplexná funkcia komplexnej premennej má deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– z analogickej definície derivácie a limity v komplexnom obore vyplýva, že vzťah medzi *deriváciou*, *diferencovateľnosťou* a *spojitosťou v bode* je rovnaký ako pre funkciu reálnej premennej!

Veta III.6

Ak funkcia f má deriváciu v bode z_0, potom je v tomto bode spojitá.

Veta III.7

Funkcia f je diferencovateľná v bode z_0 práve vtedy, keď má deriváciu v bode z_0, pričom platí $\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0) \cdot h$.

– platia všetky analogické pravidlá pre **deriváciu súčtu, rozdielu, súčinu, podielu** a **kompozície** komplexných funkcií!

– podstatný rozdiel je nasledujúci (nemá analógiu v reálnej analýze)!

Veta III.8

Ak komplexná funkcia komplexnej premennej má deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– z analogickej definície derivácie a limity v komplexnom obore vyplýva, že vzťah medzi *deriváciou*, *diferencovateľnosťou* a *spojitosťou v bode* je rovnaký ako pre funkciu reálnej premennej!

Veta III.6

Ak funkcia f má deriváciu v bode z_0, potom je v tomto bode spojitá.

Veta III.7

Funkcia f je diferencovateľná v bode z_0 práve vtedy, keď má deriváciu v bode z_0, pričom platí $\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0) \cdot h$.

– platia všetky analogické pravidlá pre **deriváciu súčtu, rozdielu, súčinu, podielu** a **kompozície** komplexných funkcií!

– podstatný rozdiel je nasledujúci (nemá analógiu v reálnej analýze)!

Veta III.8

Ak komplexná funkcia komplexnej premennej má deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– z analogickej definície derivácie a limity v komplexnom obore vyplýva, že vzťah medzi *deriváciou*, *diferencovateľnosťou* a *spojitosťou v bode* je rovnaký ako pre funkciu reálnej premennej!

Veta III.6

Ak funkcia f má deriváciu v bode z_0, potom je v tomto bode spojitá.

Veta III.7

Funkcia f je diferencovateľná v bode z_0 práve vtedy, keď má deriváciu v bode z_0, pričom platí $\mathrm{d}f(z_0) = f'(z_0) \cdot h$.

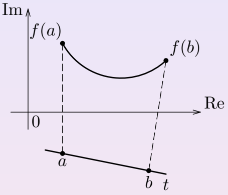
– platia všetky analogické pravidlá pre **deriváciu súčtu, rozdielu, súčinu, podielu** a **kompozície** komplexných funkcií!
– podstatný rozdiel je nasledujúci (nemá analógiu v reálnej analýze)!

Veta III.8

Ak komplexná funkcia komplexnej premennej má deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.

Špeciálny prípad: komplexné funkcie reálnej premennej

– $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, kde $t \in D_f \subset \mathbb{R}$;
– predstavujú dôležitý prostriedok pri štúdiu kriviek;



– ak $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je definovaná na okolí bodu t_0, potom

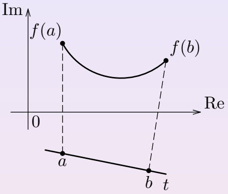
$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Veta III.9

Komplexná funkcia reálnej premennej $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode t_0 práve vtedy, keď v bode t_0 majú konečnú deriváciu funkcie $u = \mathrm{Re}\, f$ a $v = \mathrm{Im}\, f$, pričom platí $f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0)$.

Špeciálny prípad: komplexné funkcie reálnej premennej

– $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, kde $t \in D_f \subset \mathbb{R}$;
– predstavujú dôležitý prostriedok pri štúdiu kriviek;



– ak $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je definovaná na okolí bodu t_0, potom

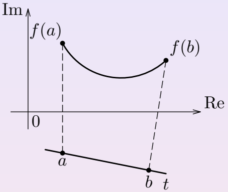
$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Veta III.9

Komplexná funkcia reálnej premennej $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode t_0 práve vtedy, keď v bode t_0 majú konečnú deriváciu funkcie $u = \mathrm{Re}\, f$ a $v = \mathrm{Im}\, f$, pričom platí $f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0)$.

Špeciálny prípad: komplexné funkcie reálnej premennej

– $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, kde $t \in D_f \subset \mathbb{R}$;
– predstavujú dôležitý prostriedok pri štúdiu kriviek;



– ak $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je definovaná na okolí bodu t_0, potom

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Veta III.9

Komplexná funkcia reálnej premennej $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode t_0 práve vtedy, keď v bode t_0 majú konečnú deriváciu funkcie $u = \mathrm{Re}\, f$ a $v = \mathrm{Im}\, f$, pričom platí $f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0)$.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– aký je vzťah derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej k (parciálnym) deriváciám jej zložiek?

Veta III.10

Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ práve vtedy, keď funkcie u a v spĺňajú podmienky:

(i) u a v sú diferencovateľné funkcie v bode (x_0, y_0);

(ii) v bode x_0, y_0 vyhovujú Cauchyho-Riemannovým podmienkam

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Ak sú splnené tieto podmienky, tak pre deriváciu f v bode z_0 platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– aký je vzťah derivácie komplexnej funkcie komplexnej premennej k (parciálnym) deriváciám jej zložiek?

Veta III.10

Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ práve vtedy, keď funkcie u a v spĺňajú podmienky:

(i) u a v sú diferencovateľné funkcie v bode (x_0, y_0);

(ii) v bode x_0, y_0 vyhovujú Cauchyho-Riemannovým podmienkam

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Ak sú splnené tieto podmienky, tak pre deriváciu f v bode z_0 platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

- ✓ $(c)' = 0$, kde $c \in \mathbb{C}$
- ✓ $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ pre každé $z \in \mathbb{C}$ a $\alpha \in \mathbb{Z}$
- ✓ $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$
- ✓ $(\lg z)' = \frac{1}{z}$ pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z \leq 0\}$
- ✓ $(\sin z)' = \cos z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$
- ✓ $(\cos z)' = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$
- ✓ $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$ pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ $(\operatorname{cotg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$ pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; z = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ $(\sinh z)' = \cosh z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$
- ✓ $(\cosh z)' = \sinh z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$
- ✓ $(\operatorname{tgh} z)' = \frac{1}{\cosh^2 z}$ pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; z = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$
- ✓ $(\operatorname{cotgh} z)' = -\frac{1}{\sinh^2 z}$ pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C}; z = k\pi\mathrm{i}, k \in \mathbb{Z}\}$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (analytickej funkcie)

Funkciu f nazývame analytická v bode z_0 (alebo aj **holomorfná**), akk má deriváciu v každom bode nejakého okolia bodu z_0. Hovoríme, že funkcia f je analytická na oblasti G, akk je analytická v každom bode tejto oblasti.

– ak f je analytická v bode z_0, tak je analytická na okolí bodu z_0;
– množina bodov, na ktorej je funkcia analytická, je otvorená množina;
– ak f je analytická v bode z_0, tak f je diferencovateľná v z_0;

Definícia (singulárneho bodu)

Bod z_0 nazývame regulárny bod funkcie f, akk funkcia f je analytická v bode z_0. Bod z_0 nazývame singulárny bod funkcie f, akk funkcia f nie je analytická v bode z_0.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (analytickej funkcie)

Funkciu f nazývame analytická v bode z_0 (alebo aj **holomorfná**), akk má deriváciu v každom bode nejakého okolia bodu z_0. Hovoríme, že funkcia f je analytická na oblasti G, akk je analytická v každom bode tejto oblasti.

– ak f je analytická v bode z_0, tak je analytická na okolí bodu z_0;
– množina bodov, na ktorej je funkcia analytická, je otvorená množina;
– ak f je analytická v bode z_0, tak f je diferencovateľná v z_0;

Definícia (singulárneho bodu)

Bod z_0 nazývame regulárny bod funkcie f, akk funkcia f je analytická v bode z_0. Bod z_0 nazývame singulárny bod funkcie f, akk funkcia f nie je analytická v bode z_0.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (analytickej funkcie)

Funkciu f nazývame analytická v bode z_0 (alebo aj **holomorfná**), akk má deriváciu v každom bode nejakého okolia bodu z_0. Hovoríme, že funkcia f je analytická na oblasti G, akk je analytická v každom bode tejto oblasti.

– ak f je analytická v bode z_0, tak je analytická na okolí bodu z_0;
– množina bodov, na ktorej je funkcia analytická, je otvorená množina;
– ak f je analytická v bode z_0, tak f je diferencovateľná v z_0;

Definícia (singulárneho bodu)

Bod z_0 nazývame regulárny bod funkcie f, akk funkcia f je analytická v bode z_0. Bod z_0 nazývame singulárny bod funkcie f, akk funkcia f nie je analytická v bode z_0.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (analytickej funkcie)

Funkciu f nazývame analytická v bode z_0 (alebo aj **holomorfná**), akk má deriváciu v každom bode nejakého okolia bodu z_0. Hovoríme, že funkcia f je analytická na oblasti G, akk je analytická v každom bode tejto oblasti.

– ak f je analytická v bode z_0, tak je analytická na okolí bodu z_0;
– množina bodov, na ktorej je funkcia analytická, je otvorená množina;
– ak f je analytická v bode z_0, tak f je diferencovateľná v z_0;

Definícia (singulárneho bodu)

Bod z_0 nazývame regulárny bod funkcie f, akk funkcia f je analytická v bode z_0. Bod z_0 nazývame singulárny bod funkcie f, akk funkcia f nie je analytická v bode z_0.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (analytickej funkcie)

Funkciu f nazývame analytická v bode z_0 (alebo aj **holomorfná**), akk má deriváciu v každom bode nejakého okolia bodu z_0. Hovoríme, že funkcia f je analytická na oblasti G, akk je analytická v každom bode tejto oblasti.

– ak f je analytická v bode z_0, tak je analytická na okolí bodu z_0;
– množina bodov, na ktorej je funkcia analytická, je otvorená množina;
– ak f je analytická v bode z_0, tak f je diferencovateľná v z_0;

Definícia (singulárneho bodu)

Bod z_0 nazývame regulárny bod funkcie f, akk funkcia f je analytická v bode z_0. Bod z_0 nazývame singulárny bod funkcie f, akk funkcia f nie je analytická v bode z_0.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– $f = u + \mathrm{i}v$ je analytická na oblasti $G \Rightarrow u, v$ majú parciálne derivácie podľa x aj y;

– nech u, v majú **spojité parciálne derivácie druhého rádu** na G;

– derivovaním Cauchyho-Riemannových rovností a ich sčítaním dostávame Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0;$$

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– $f = u + \mathrm{i}v$ je analytická na oblasti $G \Rightarrow u, v$ majú parciálne derivácie podľa x aj y;

– nech u, v majú **spojité parciálne derivácie druhého rádu** na G;

– derivovaním Cauchyho-Riemannových rovností a ich sčítaním dostávame Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0;$$

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– $f = u + \mathrm{i}v$ je analytická na oblasti $G \;\Rightarrow\; u, v$ majú parciálne derivácie podľa x aj y;
– nech u, v majú **spojité parciálne derivácie druhého rádu** na G;
– derivovaním Cauchyho-Riemannových rovností a ich sčítaním dostávame Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0;$$

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

– $f = u + \mathrm{i}v$ je analytická na oblasti $G \;\Rightarrow\; u, v$ majú parciálne derivácie podľa x aj y;
– nech u, v majú **spojité parciálne derivácie druhého rádu** na G;
– derivovaním Cauchyho-Riemannových rovností a ich sčítaním dostávame Laplaceovu diferenciálnu rovnicu

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0;$$

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0.$$

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici $\Delta\Phi = 0$.

Definícia (harmonicky združené funkcie)

Harmonické funkcie Φ a Ψ dvoch premenných nazývame harmonicky združené na oblasti G, akk na tejto oblasti vyhovujú C-R podmienkam

$$(\forall (x_0, y_0) \in G) \quad \frac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial\Psi(x_0, y_0)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Veta III.11

Komplexná funkcia je diferencovateľná na oblasti G práve vtedy, keď jej reálna a imaginárna zložka sú harmonicky združené.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici $\Delta\Phi = 0$.

Definícia (harmonicky združené funkcie)

Harmonické funkcie Φ a Ψ dvoch premenných nazývame harmonicky združené na oblasti G, akk na tejto oblasti vyhovujú C-R podmienkam

$$(\forall (x_0, y_0) \in G) \quad \frac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial\Psi(x_0, y_0)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Veta III.11

Komplexná funkcia je diferencovateľná na oblasti G práve vtedy, keď jej reálna a imaginárna zložka sú harmonicky združené.

Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Definícia (harmonickej funkcie)

Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame harmonická na oblasti G, akk má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici $\Delta\Phi = 0$.

Definícia (harmonicky združené funkcie)

Harmonické funkcie Φ a Ψ dvoch premenných nazývame harmonicky združené na oblasti G, akk na tejto oblasti vyhovujú C-R podmienkam

$$(\forall(x_0, y_0) \in G) \quad \frac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial\Psi(x_0, y_0)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial\Phi(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial\Psi(x_0, y_0)}{\partial x}.$$

Veta III.11

Komplexná funkcia je diferencovateľná na oblasti G práve vtedy, keď jej reálna a imaginárna zložka sú harmonicky združené.