Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

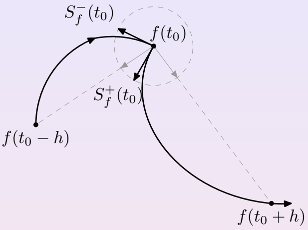
prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza

Prednáška 6

22. marca 2024

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



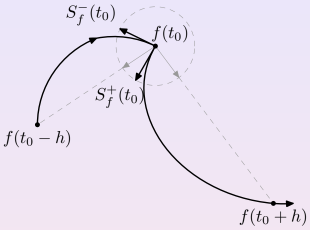
– hovoríme, že krivka f má v bode $t_0 \in \langle a, b)$ poldotyčnicu sprava, akk existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{|f(t_0+h)-f(t_0)|} = S_f^+(t_0);$$

– analogicky sa definuje poldotyčnica zľava;

– hodnota $S_f^+(t_0)$, resp. $S_f^-(t_0)$, predstavuje jednotkový smerový vektor poldotyčnice sprava, resp. zľava;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



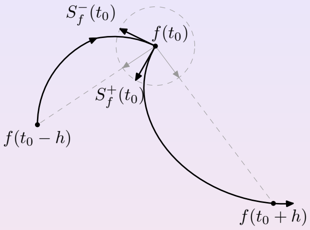
– hovoríme, že krivka f má v bode $t_0 \in \langle a, b)$ poldotyčnicu sprava, akk existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{|f(t_0+h)-f(t_0)|} = S_f^+(t_0);$$

– analogicky sa definuje poldotyčnica zľava;

– hodnota $S_f^+(t_0)$, resp. $S_f^-(t_0)$, predstavuje jednotkový smerový vektor poldotyčnice sprava, resp. zľava;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej

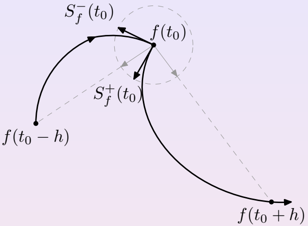


– hovoríme, že krivka f má v bode $t_0 \in \langle a, b)$ poldotyčnicu sprava, akk existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{|f(t_0+h)-f(t_0)|} = S_f^+(t_0);$$

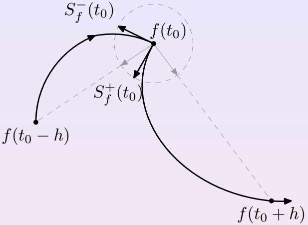
– analogicky sa definuje poldotyčnica zľava;
– hodnota $S_f^+(t_0)$, resp. $S_f^-(t_0)$, predstavuje jednotkový smerový vektor poldotyčnice sprava, resp. zľava;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



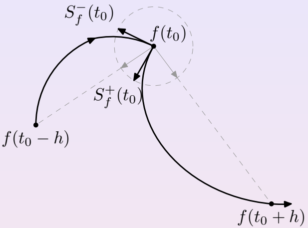
– hovoríme, že f má v bode $t_0 \in (a, b)$ dotyčnicu práve vtedy, keď má v bode t_0 poldotyčnice zľava a sprava a platí $S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$;
– číslo $S_f(t_0) = S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$ nazývame smerový vektor dotyčnice ku krivke f v bode t_0;
– dotyčnica ku krivke f v bode t_0 je priamka $z = f(t_0) + S_f(t_0)\, s$, $s \in \mathbb{R}$;
– jednoduchú krivku nazývame hladká, akk f má na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitú nenulovú deriváciu (v takom prípade môžeme $S_f(t_0)$ zameniť hodnotou $f'(t_0)$);

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



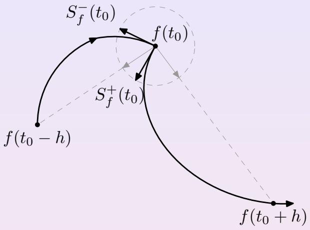
– hovoríme, že f má v bode $t_0 \in (a,b)$ dotyčnicu práve vtedy, keď má v bode t_0 poldotyčnice zľava a sprava a platí $S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$;
– číslo $S_f(t_0) = S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$ nazývame smerový vektor dotyčnice ku krivke f v bode t_0;
– dotyčnica ku krivke f v bode t_0 je priamka $z = f(t_0) + S_f(t_0)\,s$, $s \in \mathbb{R}$;
– jednoduchú krivku nazývame hladká, akk f má na intervale $\langle a,b\rangle$ spojitú nenulovú deriváciu (v takom prípade môžeme $S_f(t_0)$ zameniť hodnotou $f'(t_0)$);

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



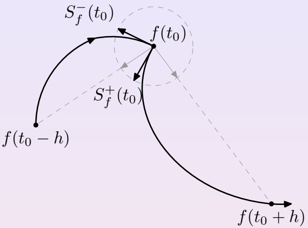
– hovoríme, že f má v bode $t_0 \in (a, b)$ dotyčnicu práve vtedy, keď má v bode t_0 poldotyčnice zľava a sprava a platí $S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$;
– číslo $S_f(t_0) = S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$ nazývame smerový vektor dotyčnice ku krivke f v bode t_0;
– dotyčnica ku krivke f v bode t_0 je priamka $z = f(t_0) + S_f(t_0)\,s$, $s \in \mathbb{R}$;
– jednoduchú krivku nazývame hladká, akk f má na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitú nenulovú deriváciu (v takom prípade môžeme $S_f(t_0)$ zameniť hodnotou $f'(t_0)$);

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



– hovoríme, že f má v bode $t_0 \in (a,b)$ dotyčnicu práve vtedy, keď má v bode t_0 poldotyčnice zľava a sprava a platí $S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$;
– číslo $S_f(t_0) = S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$ nazývame smerový vektor dotyčnice ku krivke f v bode t_0;
– dotyčnica ku krivke f v bode t_0 je priamka $z = f(t_0) + S_f(t_0)\,s$, $s \in \mathbb{R}$;
– jednoduchú krivku nazývame hladká, akk f má na intervale $\langle a,b\rangle$ spojitú nenulovú deriváciu (v takom prípade môžeme $S_f(t_0)$ zameniť hodnotou $f'(t_0)$);

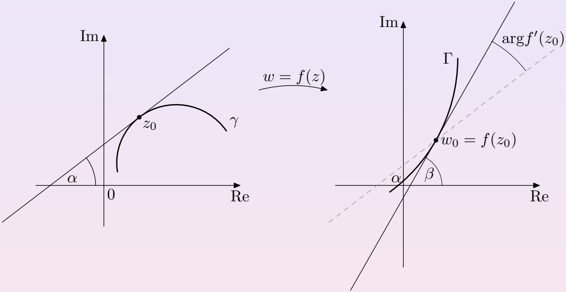
Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia reálnej premennej



– hovoríme, že f má v bode $t_0 \in (a,b)$ dotyčnicu práve vtedy, keď má v bode t_0 poldotyčnice zľava a sprava a platí $S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$;
– číslo $S_f(t_0) = S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$ nazývame smerový vektor dotyčnice ku krivke f v bode t_0;
– dotyčnica ku krivke f v bode t_0 je priamka $z = f(t_0) + S_f(t_0)\, s$, $s \in \mathbb{R}$;
– jednoduchú krivku nazývame po častiach hladká, akk sa dá rozdeliť na konečný počet jednoduchých hladkých kriviek;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;

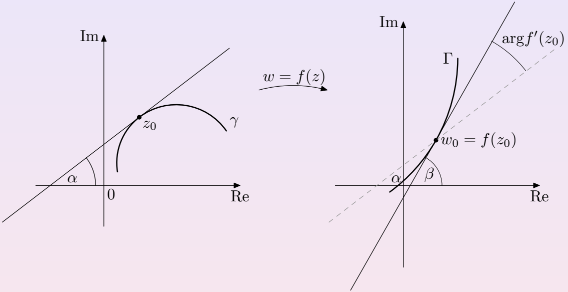


– nech $\gamma(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je taká krivka, že $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$ a $\gamma'(t_0) \neq 0$;

– potom $\gamma'(t_0)$ je smerový vektor dotyčnice ku krivke γ v bode t_0 a $\alpha = \arg \gamma'(t_0)$ určuje uhol dotyčnice s kladným smerom reálnej osi;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;

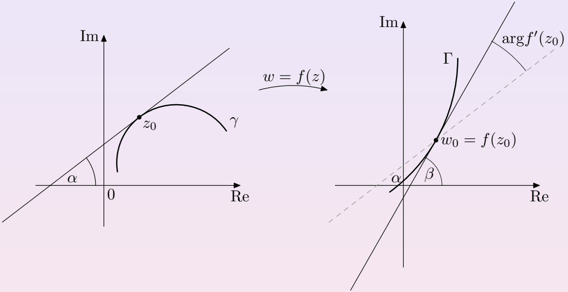


– nech $\gamma(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, je taká krivka, že $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$ a $\gamma'(t_0) \neq 0$;

– potom $\gamma'(t_0)$ je smerový vektor dotyčnice ku krivke γ v bode t_0 a $\alpha = \arg \gamma'(t_0)$ určuje uhol dotyčnice s kladným smerom reálnej osi;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

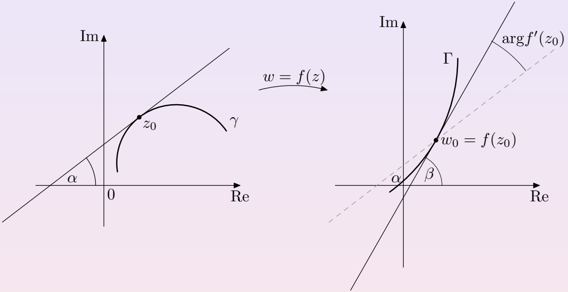
– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;



– nech $\gamma(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je taká krivka, že $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$ a $\gamma'(t_0) \neq 0$;
– potom $\gamma'(t_0)$ je smerový vektor dotyčnice ku krivke γ v bode t_0 a $\alpha = \arg \gamma'(t_0)$ určuje uhol dotyčnice s kladným smerom reálnej osi;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;



– funkcia $w = f(z)$ potom

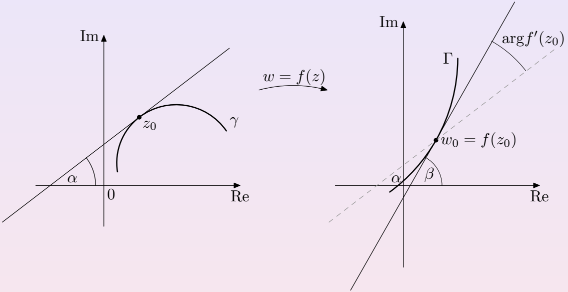
(a) priradí bodu z_0 bod $w_0 = f(z_0)$;

(b) priradí krivke γ krivku $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$;

(c) pričom $\Gamma(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0) = w_0$

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;

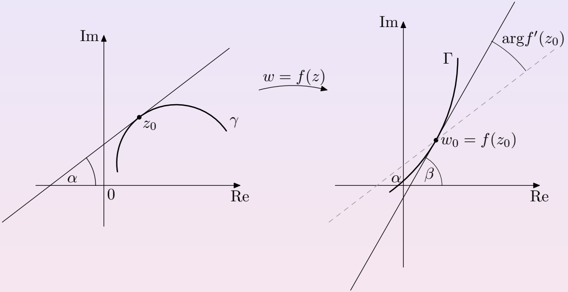


– $\Gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0$, kde $\Gamma'(t_0)$ predstavuje smerový vektor dotyčnice ku krivke Γ v bode t_0;

– $\beta = \arg \Gamma'(t_0)$ je odchýlka smerového vektora dotyčnice ku krivke Γ v bode t_0 od kladnej reálnej polosi;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg f'(z_0)}$;

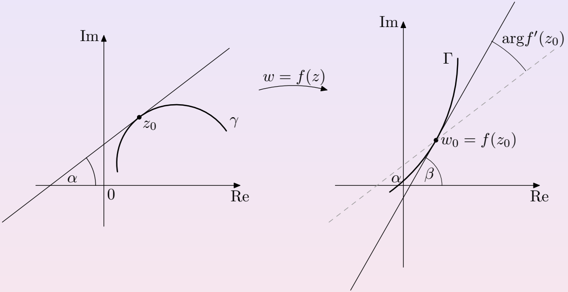


– $\Gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0$, kde $\Gamma'(t_0)$ predstavuje smerový vektor dotyčnice ku krivke Γ v bode t_0;

– $\beta = \arg \Gamma'(t_0)$ je odchýlka smerového vektora dotyčnice ku krivke Γ v bode t_0 od kladnej reálnej polosi;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg f'(z_0)}$;

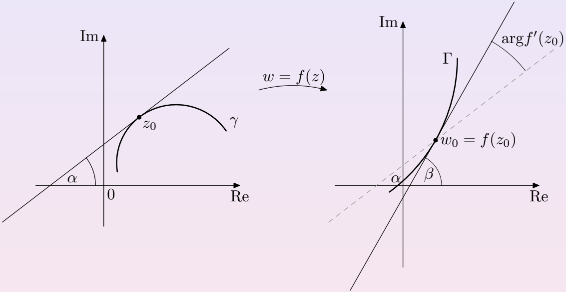


– potom $\beta = \arg f'(z_0) + \alpha + (-2k\pi)$, kde k je vhodné celé číslo, t.j. $\arg f'(z_0) = \beta - \alpha + 2k\pi$, pričom k volíme tak, aby $\beta \in (-\pi, \pi\rangle$;

– číslo $\arg f'(z_0)$ udáva veľkosť uhla otočenia, o ktorý sa otočí dotyčnica ku krivke v bode z_0 pri zobrazení f;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

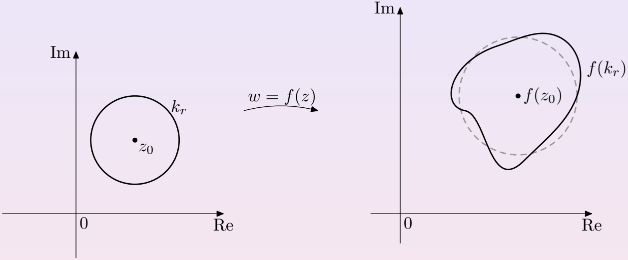
– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;



– potom $\beta = \arg f'(z_0) + \alpha + (-2k\pi)$, kde k je vhodné celé číslo, t.j. $\arg f'(z_0) = \beta - \alpha + 2k\pi$, pričom k volíme tak, aby $\beta \in (-\pi, \pi\rangle$;
– číslo $\arg f'(z_0)$ udáva veľkosť uhla otočenia, o ktorý sa otočí dotyčnica ku krivke v bode z_0 pri zobrazení f;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i} \arg f'(z_0)}$;

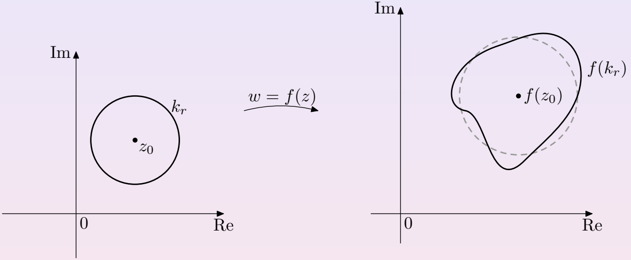


– z definície derivácie v bode je $|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|$ pre z blízko z_0, t.j. **vzdialenosť obrazov $f(z)$, $f(z_0)$ sa približne rovná $|f'(z_0)|$-násobku vzdialenosti vzorov z a z_0**;

– číslo $k = |f'(z_0)|$ sa nazýva koeficient rozťažnosti alebo lokálna deformácia v bode z_0 pri zobrazení f;

Geometrický význam derivácie: komplexná funkcia komplexnej premennej

– nech f je analytická v bode z_0 a $0 \neq f'(z_0) = |f'(z_0)|\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg f'(z_0)}$;



– z definície derivácie v bode je $|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|$ pre z blízko z_0, t.j. **vzdialenosť obrazov $f(z)$, $f(z_0)$ sa približne rovná $|f'(z_0)|$-násobku vzdialenosti vzorov z a z_0**;
– číslo $k = |f'(z_0)|$ sa nazýva koeficient rozťažnosti alebo lokálna deformácia v bode z_0 pri zobrazení f;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;

– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;

– $\Xi := \{\xi_j \in \langle t_{j-1}, t_j\rangle;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;

– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$;

– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;

– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;

– $\Xi := \{\xi_j \in \langle t_{j-1}, t_j\rangle;\ j = 1, 2, \dots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;

– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \dots, n\}$;

– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;

– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;

– $\Xi := \{\xi_j \in \langle t_{j-1}, t_j\rangle;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;

– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$;

– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;
– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;
– $\Xi := \{\xi_j \in \left\langle t_{j-1}, t_j \right\rangle;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$;
– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;
– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;
– $\Xi := \{\xi_j \in \left\langle t_{j-1}, t_j \right\rangle;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$;
– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;
– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;
– $\Xi := \{\xi_j \in \left\langle t_{j-1}, t_j\right\rangle;\ j = 1, 2, \dots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \dots, n\}$;
– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Určitý integrál = ďalšia (nudná) analógia z reálnej analýzy

– nech $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je ohraničená na $\langle a, b\rangle$;
– $D := \{t_j;\ a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b\}$ je delenie intervalu $\langle a, b\rangle$;
– $\Xi := \{\xi_j \in \langle t_{j-1}, t_j\rangle\,;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ je výber reprezentantov z delenia D;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D a výberu reprezentantov Ξ

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1};$$

– norma delenia $\nu(D) := \max\{\triangle t_j;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$;
– normálna postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Komplexné funkcie reálnej premennej

Definícia (integrál komplexnej funkcie reálnej premennej)

Nech f je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a ľubovoľný výber reprezentantov Ξ_n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$ a je stále tá istá, tak túto spoločnú hodnotu nazývame určitý integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$ a funkciu f nazývame integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Označujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n).$$

– pre $f = u + \mathrm{i}v$ je $\mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = \mathscr{S}(u, D_n, \Xi_n) + \mathrm{i}\mathscr{S}(v, D_n, \Xi_n)$;

Veta III.12

Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď funkcie u, v sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$.

Komplexné funkcie reálnej premennej

Definícia (integrál komplexnej funkcie reálnej premennej)

Nech f je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a ľubovoľný výber reprezentantov Ξ_n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$ a je stále tá istá, tak túto spoločnú hodnotu nazývame určitý integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$ a funkciu f nazývame integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Označujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n).$$

– pre $f = u + \mathrm{i}v$ je $\mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = \mathscr{S}(u, D_n, \Xi_n) + \mathrm{i}\mathscr{S}(v, D_n, \Xi_n)$;

Veta III.12

Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď funkcie u, v sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$.

Komplexné funkcie reálnej premennej

Definícia (integrál komplexnej funkcie reálnej premennej)

Nech f je ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$. Ak pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a ľubovoľný výber reprezentantov Ξ_n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n)$ a je stále tá istá, tak túto spoločnú hodnotu nazývame určitý integrál funkcie f na $\langle a, b\rangle$ a funkciu f nazývame integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Označujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t := \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n).$$

– pre $f = u + \mathrm{i}v$ je $\mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n) = \mathscr{S}(u, D_n, \Xi_n) + \mathrm{i}\mathscr{S}(v, D_n, \Xi_n)$;

Veta III.12

Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď funkcie u, v sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$.

Komplexné funkcie reálnej premennej

Veta III.12 umožňuje preniesť vlastnosti určitého integrálu funkcie jednej reálnej premennej na integrál komplexnej funkcie reálnej premennej:

(i) ak f a g sú integrovateľné na $\langle a, b\rangle$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, tak $c_1 f + c_2 g$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí
$$\int_a^b \left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] \mathrm{d}t = c_1 \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c_2 \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t;$$

(ii) ak $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, tak f je integrovateľná na $\langle a, c\rangle$ práve vtedy, keď je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a $\langle b, c\rangle$ a platí
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t;$$

(iii) ak f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$, tak $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$;

(iv) ak f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a F je spojitá diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$ taká, že $F'(t) = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, tak
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \quad \left(= [F(t)]_a^b\right);$$

Komplexné funkcie reálnej premennej

Veta III.12 umožňuje preniesť vlastnosti určitého integrálu funkcie jednej reálnej premennej na integrál komplexnej funkcie reálnej premennej:

(i) ak f a g sú integrovateľné na $\langle a, b\rangle$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, tak $c_1 f + c_2 g$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a platí
$$\int_a^b \left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] \mathrm{d}t = c_1 \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c_2 \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t;$$

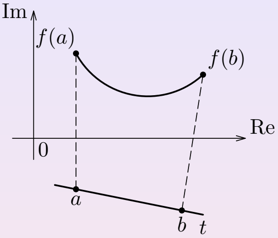
(ii) ak $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$, tak f je integrovateľná na $\langle a, c\rangle$ práve vtedy, keď je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a $\langle b, c\rangle$ a platí
$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t;$$

(iii) ak f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$, tak $\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right| \mathrm{d}t$;

(iv) ak f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$ a F je spojitá diferencovateľná na $\langle a, b\rangle$ taká, že $F'(t) = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, tak
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \;\; \left(= [F(t)]_a^b\right);$$

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

– predstavujú dôležitý prostriedok pri štúdiu kriviek;

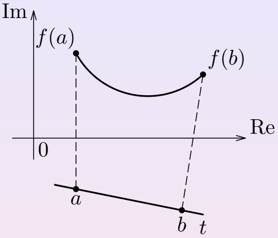


Definícia (spojitej krivky)

Nech $z = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je spojitá komplexná funkcia reálnej premennej. Hovoríme, že funkciou f je definovaná spojitá krivka γ, pričom hodnoty $f(t)$ nazývame bodmi krivky γ a rovnicu $z = f(t)$ parametrickou rovnicou krivky.

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

– predstavujú dôležitý prostriedok pri štúdiu kriviek;

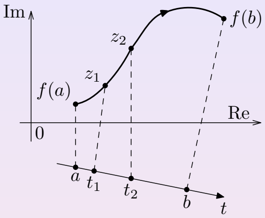


Definícia (jednoduchej krivky)

Spojitú krivku danú parametrickou rovnicou $z = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, nazývame jednoduchá (Jordanova), akk pre každé $t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 \neq t_2$ je $f(t_1) \neq f(t_2)$. Koncovými bodmi krivky nazývame body $A = [u(a), v(a)]$, $B = [u(b), v(b)]$. Ak $A = B$, tak krivku nazývame jednoduchá uzavretá krivka.

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:

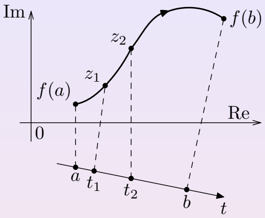
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;

– taký bod krivky, že žiaden bod krivky nie je pred ním, nazývame **začiatočný** bod krivky;

– bod krivky, ktorý nie je pred žiadnym bodom krivky, nazývame **koncový (posledný)** bod krivky;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:

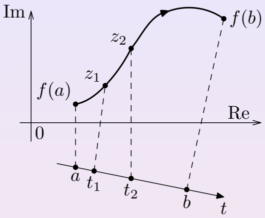
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;

– taký bod krivky, že žiaden bod krivky nie je pred ním, nazývame **začiatočný** bod krivky;

– bod krivky, ktorý nie je pred žiadnym bodom krivky, nazývame **koncový (posledný)** bod krivky;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:

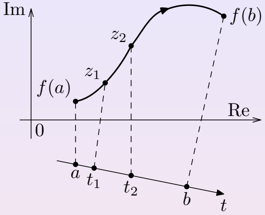
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;

– taký bod krivky, že žiaden bod krivky nie je pred ním, nazývame **začiatočný** bod krivky;

– bod krivky, ktorý nie je pred žiadnym bodom krivky, nazývame **koncový (posledný)** bod krivky;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

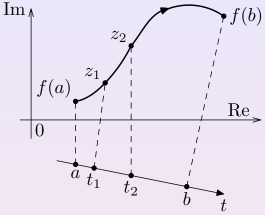
– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;
– taký bod krivky, že žiaden bod krivky nie je pred ním, nazývame **začiatočný** bod krivky;
– bod krivky, ktorý nie je pred žiadnym bodom krivky, nazývame **koncový (posledný)** bod krivky;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

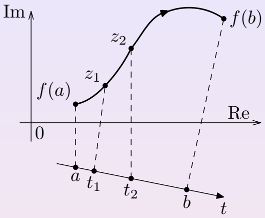
– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;
– taký bod krivky, že žiaden bod krivky nie je pred ním, nazývame **začiatočný** bod krivky;
– bod krivky, ktorý nie je pred žiadnym bodom krivky, nazývame **koncový (posledný)** bod krivky;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

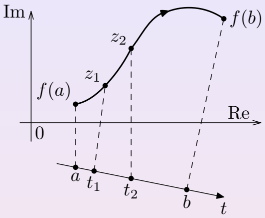
– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;
– ak pre ľubovoľné dva body $z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$ krivky γ platí $z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow t_1 < t_2$, tak krivku γ nazývame súhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením $z = f(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

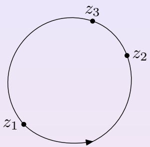
– orientácia krivky = smer obiehania po krivke



Nech γ je **neuzavretá jednoduchá krivka**:
– hovoríme, že bod z_1 krivky γ je pred bodom z_2 krivky γ (píšeme $z_1 \prec z_2$), akk bodom, ktorým sa pohybujeme po krivke γ v smere orientácie, sa dostaneme najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2;
– ak pre ľubovoľné dva body $z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$ krivky γ platí $z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow t_1 > t_2$, tak krivku γ nazývame nesúhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením $z = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

Nech γ je **jednoduchá uzavretá krivka**:



– krivku γ nazývame cyklicky orientovaná, akk je daná trojica z_1, z_2, z_3 bodov krivky γ takých, že $z_1 \prec z_2 \prec z_3$, pričom:

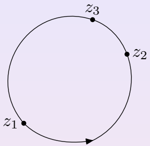
(a) ak $[z_1, z_2, z_3]$ je usporiadaná trojica bodov krivky, potom aj $[z_2, z_3, z_1]$ je usporiadaná trojica bodov;

(b) ak A, B, C sú tri navzájom rôzne body krivky, potom práve jedna trojica $[A, B, C]$ alebo $[A, C, B]$ je usporiadaná trojica.

– krivku γ nazývame súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením $z = f(t)$, akk pre každé $z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$, $z_3 = f(t_3)$ platí $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \Leftrightarrow t_1 < t_2 < t_3$ alebo $t_3 < t_1 < t_2$ alebo $t_2 < t_3 < t_1$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

Nech γ je **jednoduchá uzavretá krivka**:



– krivku γ nazývame cyklicky orientovaná, akk je daná trojica z_1, z_2, z_3 bodov krivky γ takých, že $z_1 \prec z_2 \prec z_3$, pričom:

(a) ak $[z_1, z_2, z_3]$ je usporiadaná trojica bodov krivky, potom aj $[z_2, z_3, z_1]$ je usporiadaná trojica bodov;

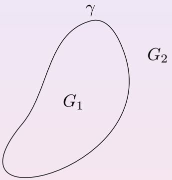
(b) ak A, B, C sú tri navzájom rôzne body krivky, potom práve jedna trojica $[A, B, C]$ alebo $[A, C, B]$ je usporiadaná trojica.

– krivku γ nazývame súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením $z = f(t)$, akk pre každé $z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$, $z_3 = f(t_3)$ platí $z_1 \prec z_2 \prec z_3 \Leftrightarrow t_1 < t_2 < t_3$ alebo $t_3 < t_1 < t_2$ alebo $t_2 < t_3 < t_1$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

Veta (Jordanova)

Každá jednoduchá uzavretá krivka γ rozdeľuje uzavretú Gaussovu rovinu $\mathbb{C}_\infty$ na dve jednoduché oblasti G_1, G_2, t.j. $\mathbb{C}_\infty \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$.

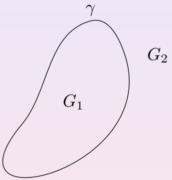


– graf $[\gamma]$ krivky γ je hranicou každej z oblastí G_1 a G_2;
– tú z oblastí G_1, G_2, ktorá neobsahuje bod ∞, nazývame vnútro krivky γ, označíme $\operatorname{Int}\gamma$;
– oblasť, ktorá obsahuje bod ∞, nazývame vonkajšok krivky γ, označíme $\operatorname{Ext}\gamma$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

Veta (Jordanova)

Každá jednoduchá uzavretá krivka γ rozdeľuje uzavretú Gaussovu rovinu $\mathbb{C}_\infty$ na dve jednoduché oblasti G_1, G_2, t.j. $\mathbb{C}_\infty \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$.

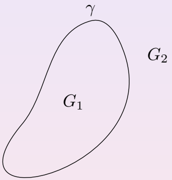


– graf $[\gamma]$ krivky γ je hranicou každej z oblastí G_1 a G_2;
– tú z oblastí G_1, G_2, ktorá neobsahuje bod ∞, nazývame vnútro krivky γ, označíme $\mathrm{Int}\,\gamma$;
– oblasť, ktorá obsahuje bod ∞, nazývame vonkajšok krivky γ, označíme $\mathrm{Ext}\,\gamma$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

Veta (Jordanova)

Každá jednoduchá uzavretá krivka γ rozdeľuje uzavretú Gaussovu rovinu $\mathbb{C}_\infty$ na dve jednoduché oblasti G_1, G_2, t.j. $\mathbb{C}_\infty \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$.

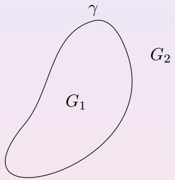


– graf $[\gamma]$ krivky γ je hranicou každej z oblastí G_1 a G_2;
– tú z oblastí G_1, G_2, ktorá neobsahuje bod ∞, nazývame vnútro krivky γ, označíme $\operatorname{Int}\gamma$;
– oblasť, ktorá obsahuje bod ∞, nazývame vonkajšok krivky γ, označíme $\operatorname{Ext}\gamma$;

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky

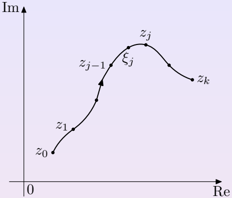
Veta (Jordanova)

Každá jednoduchá uzavretá krivka γ rozdeľuje uzavretú Gaussovu rovinu $\mathbb{C}_\infty$ na dve jednoduché oblasti G_1, G_2, t.j. $\mathbb{C}_\infty \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$.



– graf $[\gamma]$ krivky γ je hranicou každej z oblastí G_1 a G_2;
– tú z oblastí G_1, G_2, ktorá neobsahuje bod ∞, nazývame vnútro krivky γ, označíme $\operatorname{Int}\gamma$;
– oblasť, ktorá obsahuje bod ∞, nazývame vonkajšok krivky γ, označíme $\operatorname{Ext}\gamma$;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá po častiach hladká orientovaná krivka (JHO), alebo jednoduchá uzavretá po častiach hladká cyklicky orientovaná krivka (JUHO)

– pre $k \in \mathbb{N}$ nech $z_0 = \lambda(a), z_1, z_2, \dots, z_k = \lambda(b)$ sú body krivky γ, pričom buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \dots, k$;

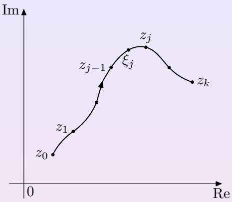
– časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j nazývame oblúk, označujeme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$;

– systém D oblúkov $\widehat{z_0, z_1}, \widehat{z_1, z_2}, \dots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame delenie krivky γ;

– reprezentant je ľubovoľný bod ξ_j oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$, t.j. buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \dots, k$;

– množinu $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ nazývame výber reprezentantov z delenia D;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá po častiach hladká orientovaná krivka (JHO), alebo jednoduchá uzavretá po častiach hladká cyklicky orientovaná krivka (JUHO)

– pre $k \in \mathbb{N}$ nech $z_0 = \lambda(a)$, z_1, $z_2, \ldots, z_k = \lambda(b)$ sú body krivky γ, pričom buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;

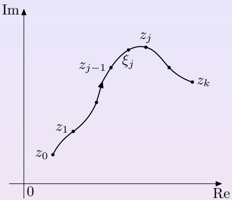
– časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j nazývame oblúk, označujeme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$;

– systém D oblúkov $\widehat{z_0, z_1}$, $\widehat{z_1, z_2}, \ldots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame delenie krivky γ;

– reprezentant je ľubovoľný bod ξ_j oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$, t.j. buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;

– množinu $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ nazývame výber reprezentantov z delenia D;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá po častiach hladká orientovaná krivka (JHO), alebo jednoduchá uzavretá po častiach hladká cyklicky orientovaná krivka (JUHO)

– pre $k \in \mathbb{N}$ nech $z_0 = \lambda(a)$, $z_1, z_2, \dots, z_k = \lambda(b)$ sú body krivky γ, pričom buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \dots, k$;

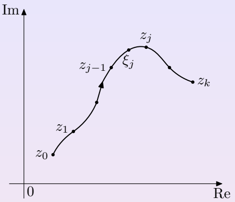
– časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j nazývame oblúk, označujeme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$;

– systém D oblúkov $\widehat{z_0, z_1}, \widehat{z_1, z_2}, \dots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame delenie krivky γ;

– reprezentant je ľubovoľný bod ξ_j oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$, t.j. buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \dots, k$;

– množinu $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ nazývame výber reprezentantov z delenia D;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá po častiach hladká orientovaná krivka (JHO), alebo jednoduchá uzavretá po častiach hladká cyklicky orientovaná krivka (JUHO)

– pre $k \in \mathbb{N}$ nech $z_0 = \lambda(a)$, z_1, $z_2, \ldots, z_k = \lambda(b)$ sú body krivky γ, pričom buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;

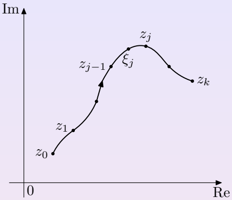
– časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j nazývame oblúk, označujeme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$;

– systém D oblúkov $\widehat{z_0, z_1}$, $\widehat{z_1, z_2}, \ldots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame delenie krivky γ;

– reprezentant je ľubovoľný bod ξ_j oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$, t.j. buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;

– množinu $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ nazývame výber reprezentantov z delenia D;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá po častiach hladká orientovaná krivka (JHO), alebo jednoduchá uzavretá po častiach hladká cyklicky orientovaná krivka (JUHO)

– pre $k \in \mathbb{N}$ nech $z_0 = \lambda(a), z_1, z_2, \ldots, z_k = \lambda(b)$ sú body krivky γ, pričom buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;

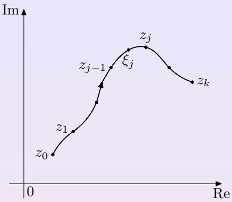
– časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j nazývame oblúk, označujeme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$;

– systém D oblúkov $\widehat{z_0, z_1}, \widehat{z_1, z_2}, \ldots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame delenie krivky γ;

– reprezentant je ľubovoľný bod ξ_j oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$, t.j. buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;

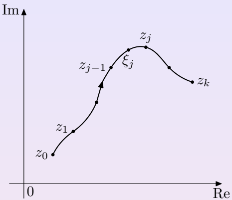
– množinu $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ nazývame výber reprezentantov z delenia D;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je jednoduchá po častiach hladká orientovaná krivka (JHO), alebo jednoduchá uzavretá po častiach hladká cyklicky orientovaná krivka (JUHO)
– pre $k \in \mathbb{N}$ nech $z_0 = \lambda(a), z_1, z_2, \ldots, z_k = \lambda(b)$ sú body krivky γ, pričom buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;
– časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j nazývame oblúk, označujeme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$;
– systém D oblúkov $\widehat{z_0, z_1}, \widehat{z_1, z_2}, \ldots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame delenie krivky γ;
– reprezentant je ľubovoľný bod ξ_j oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$, t.j. buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \ldots, k$;
– množinu $\Xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$ nazývame výber reprezentantov z delenia D;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– nech funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ;

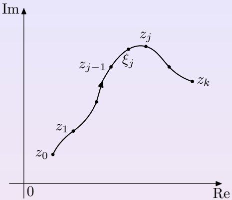
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D krivky γ a výberu reprezentantov Ξ je číslo

$$\mathscr{S}(f,D,\Xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}), \quad \text{ak} \quad z_{j-1} \prec z_j;$$

– číslo $\nu(D) = \max\{|z_j - z_{j-1}|\,;\, j = 1,\ldots,k\}$ nazývame norma delenia D;

– postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ sa nazýva normálna, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

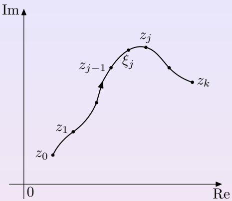


– nech funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D krivky γ a výberu reprezentantov Ξ je číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}), \quad \text{ak} \quad z_{j-1} \prec z_j;$$

– číslo $\nu(D) = \max\{|z_j - z_{j-1}|\,;\, j = 1, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D;
– postupnosť delení $(D_n)_1^{\infty}$ sa nazýva normálna, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

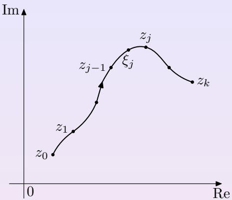


– nech funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D krivky γ a výberu reprezentantov Ξ je číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_{j-1} - z_j), \quad \text{ak} \quad z_j \prec z_{j-1};$$

– číslo $\nu(D) = \max\{|z_j - z_{j-1}|\,; j = 1, \ldots, k\}$ nazývame norma delenia D;
– postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ sa nazýva normálna, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

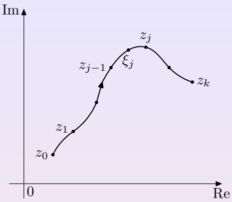


– nech funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D krivky γ a výberu reprezentantov Ξ je číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_{j-1} - z_j), \quad \text{ak} \quad z_j \prec z_{j-1};$$

– číslo $\nu(D) = \max\{|z_j - z_{j-1}|\,; j = 1, \dots, k\}$ nazývame norma delenia D;
– postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ sa nazýva normálna, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

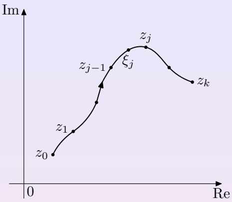


– nech funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ;
– integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D krivky γ a výberu reprezentantov Ξ je číslo

$$\mathscr{S}(f, D, \Xi) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_{j-1} - z_j), \quad \text{ak} \quad z_j \prec z_{j-1};$$

– číslo $\nu(D) = \max\{|z_j - z_{j-1}|\,;\, j = 1, \dots, k\}$ nazývame norma delenia D;
– postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ sa nazýva normálna, akk $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



Definícia (integrál komplexnej funkcie po krivke)

Nech γ je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Integrálom funkcie f na krivke γ nazývame číslo I také, že pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_1^\infty$ krivky γ a pre každý výber reprezentantov Ξ_n je

$$I = \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \Xi_n).$$

Ak tento integrál existuje, funkciu f nazývame integrovateľná na krivke γ.

Integrál funkcie f po krivke γ označujeme $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta III.13

Nech γ je JHO alebo JUHO. Ak f, g sú integrovateľné na krivke γ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, tak $c_1 f + c_2 g$ je integrovateľná na krivke γ a platí

$$\int_\gamma [c_1 f(z) + c_2 g(z)]\,\mathrm{d}z = c_1 \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + c_2 \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z.$$

Veta III.14

Nech γ je JHO. Ak γ^* je opačne orientovaná krivka ku krivke γ, tak f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď je integrovateľná na γ^* a platí

$$\int_{\gamma^*} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta III.13

Nech γ je JHO alebo JUHO. Ak f, g sú integrovateľné na krivke γ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, tak $c_1 f + c_2 g$ je integrovateľná na krivke γ a platí

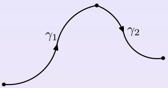
$$\int_\gamma [c_1 f(z) + c_2 g(z)]\,\mathrm{d}z = c_1 \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + c_2 \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z.$$

Veta III.14

Nech γ je JHO. Ak γ^* je opačne orientovaná krivka ku krivke γ, tak f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď je integrovateľná na γ^* a platí

$$\int_{\gamma^*} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– γ_1: $z = \lambda_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1\rangle$ a γ_2: $z = \lambda_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2\rangle$ sú dve neuzavreté krivky, pre ktoré platí $\lambda_1(b_1) = \lambda_2(a_2)$;

– orientovaný súčet kriviek γ_1, γ_2 je krivka $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ určená predpisom

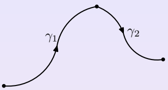
$$z = \begin{cases} \lambda_1(t), & t \in \langle a_1, b_1\rangle, \\ \lambda_2(t - b_1 + a_2), & t \in \langle b_1, b_1 + b_2 - a_2\rangle. \end{cases}$$

Veta III.15

Nech γ je JHO. Ak γ je orientovaný súčet kriviek γ_1 a γ_2, tak f je integrovateľná na γ práve vtedy, keď je integrovateľná na γ_1 aj γ_2 a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– $\gamma_1\colon z = \lambda_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1\rangle$ a $\gamma_2\colon z = \lambda_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2\rangle$ sú dve neuzavreté krivky, pre ktoré platí $\lambda_1(b_1) = \lambda_2(a_2)$;

– orientovaný súčet kriviek γ_1, γ_2 je krivka $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ určená predpisom

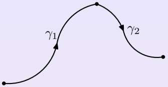
$$z = \begin{cases} \lambda_1(t), & t \in \langle a_1, b_1\rangle\,, \\ \lambda_2(t - b_1 + a_2), & t \in \langle b_1, b_1 + b_2 - a_2\rangle\,. \end{cases}$$

Veta III.15

Nech γ je JHO. Ak γ je orientovaný súčet kriviek γ_1 a γ_2, tak f je integrovateľná na γ práve vtedy, keď je integrovateľná na γ_1 aj γ_2 a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z\,.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



– γ_1: $z = \lambda_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$ a γ_2: $z = \lambda_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2 \rangle$ sú dve neuzavreté krivky, pre ktoré platí $\lambda_1(b_1) = \lambda_2(a_2)$;
– orientovaný súčet kriviek γ_1, γ_2 je krivka $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$ určená predpisom

$$z = \begin{cases} \lambda_1(t), & t \in \langle a_1, b_1 \rangle, \\ \lambda_2(t - b_1 + a_2), & t \in \langle b_1, b_1 + b_2 - a_2 \rangle. \end{cases}$$

Veta III.15

Nech γ je JHO. Ak γ je orientovaný súčet kriviek γ_1 a γ_2, tak f je integrovateľná na γ práve vtedy, keď je integrovateľná na γ_1 aj γ_2 a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta III.16

Nech γ je JHO, ktorej dĺžka je L. Ak f je integrovateľná na krivke γ a $(\forall z \in \gamma)\ |f(z)| \leq M$, tak

$$\left| \int_\gamma f(z) \mathrm{d}z \right| \leq ML.$$