Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

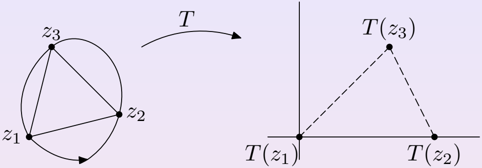
prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza
Prednáška 7

22. marca 2024

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky (pripomenutie)

Nech γ je **jednoduchá uzavretá krivka**:



– nech $z_1, z_2, z_3 \in [\gamma]$ také, že $[z_1, z_2, z_3]$ je usporiadaná trojica a trojuholník s vrcholmi z_1, z_2, z_3 leží vo vnútri krivky γ;

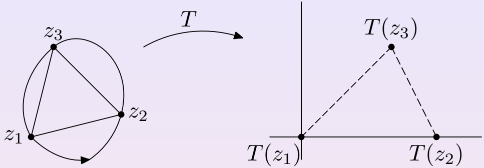
– nech transformácia T (zložená z otočenia a posunutia) zobrazí bod z_1 do počiatku $T(z_1) = 0$ a bod z_2 do bodu $T(z_2)$ ležiaceho na kladnej reálnej osi;

– hovoríme, že γ je kladne (záporne) orientovaná krivka, akk bod z_3 sa zobrazí do bodu $T(z_3)$, ktorý má kladnú (zápornú) imaginárnu zložku;

– t.j. krivka je kladne orientovaná, ak *pri pohybe po grafe krivky v smere orientácie máme vnútro krivky po ľavej ruke*

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky (pripomenutie)

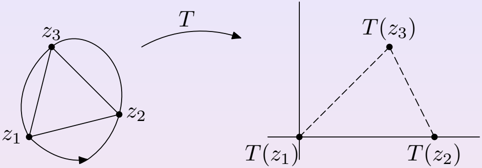
Nech γ je **jednoduchá uzavretá krivka**:



– nech $z_1, z_2, z_3 \in [\gamma]$ také, že $[z_1, z_2, z_3]$ je usporiadaná trojica a trojuholník s vrcholmi z_1, z_2, z_3 leží vo vnútri krivky γ;
– nech transformácia T (zložená z otočenia a posunutia) zobrazí bod z_1 do počiatku $T(z_1) = 0$ a bod z_2 do bodu $T(z_2)$ ležiaceho na kladnej reálnej osi;
– hovoríme, že γ je kladne (záporne) orientovaná krivka, akk bod z_3 sa zobrazí do bodu $T(z_3)$, ktorý má kladnú (zápornú) imaginárnu zložku;
– t.j. krivka je kladne orientovaná, ak *pri pohybe po grafe krivky v smere orientácie máme vnútro krivky po ľavej ruke*

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky (pripomenutie)

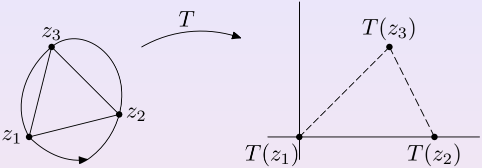
Nech γ je **jednoduchá uzavretá krivka**:



– nech $z_1, z_2, z_3 \in [\gamma]$ také, že $[z_1, z_2, z_3]$ je usporiadaná trojica a trojuholník s vrcholmi z_1, z_2, z_3 leží vo vnútri krivky γ;
– nech transformácia T (zložená z otočenia a posunutia) zobrazí bod z_1 do počiatku $T(z_1) = 0$ a bod z_2 do bodu $T(z_2)$ ležiaceho na kladnej reálnej osi;
– hovoríme, že γ je kladne (záporne) orientovaná krivka, akk bod z_3 sa zobrazí do bodu $T(z_3)$, ktorý má kladnú (zápornú) imaginárnu zložku;
– t.j. krivka je kladne orientovaná, ak *pri pohybe po grafe krivky v smere orientácie máme vnútro krivky po ľavej ruke*

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky (pripomenutie)

Nech γ je **jednoduchá uzavretá krivka**:



– nech $z_1, z_2, z_3 \in [\gamma]$ také, že $[z_1, z_2, z_3]$ je usporiadaná trojica a trojuholník s vrcholmi z_1, z_2, z_3 leží vo vnútri krivky γ;
– nech transformácia T (zložená z otočenia a posunutia) zobrazí bod z_1 do počiatku $T(z_1) = 0$ a bod z_2 do bodu $T(z_2)$ ležiaceho na kladnej reálnej osi;
– hovoríme, že γ je kladne (záporne) orientovaná krivka, akk bod z_3 sa zobrazí do bodu $T(z_3)$, ktorý má kladnú (zápornú) imaginárnú zložku;
– t.j. krivka je kladne orientovaná, ak *pri pohybe po grafe krivky v smere orientácie máme vnútro krivky po ľavej ruke*

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO;
– nech $d_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$;
– nech $D_n = \{z_0, z_1, \ldots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ;
– ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \ldots, p_n$, potom $(d_n)_1^\infty$ je normálna práve vtedy, keď $(D_n)_1^\infty$ je normálna;

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Dôsledok

Ak funkcia je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke, potom je na nej integrovateľná.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO;
– nech $d_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$;
– nech $D_n = \{z_0, z_1, \ldots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ;
– ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \ldots, p_n$, potom $(d_n)_1^\infty$ je normálna práve vtedy, keď $(D_n)_1^\infty$ je normálna;

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Dôsledok

Ak funkcia je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke, potom je na nej integrovateľná.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO;
– nech $d_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$;
– nech $D_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ;
– ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \dots, p_n$, potom $(d_n)_1^\infty$ je normálna práve vtedy, keď $(D_n)_1^\infty$ je normálna;

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Dôsledok

Ak funkcia je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke, potom je na nej integrovateľná.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO;
– nech $d_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$;
– nech $D_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ;
– ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \dots, p_n$, potom $(d_n)_1^\infty$ je normálna práve vtedy, keď $(D_n)_1^\infty$ je normálna;

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Dôsledok

Ak funkcia je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke, potom je na nej integrovateľná.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO;
– nech $d_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$;
– nech $D_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ;
– ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \dots, p_n$, potom $(d_n)_1^\infty$ je normálna práve vtedy, keď $(D_n)_1^\infty$ je normálna;

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Dôsledok

Ak funkcia je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke, potom je na nej integrovateľná.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO;
– nech $d_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$;
– nech $D_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ;
– ak pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \dots, p_n$, potom $(d_n)_1^\infty$ je normálna práve vtedy, keď $(D_n)_1^\infty$ je normálna;

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Dôsledok

Ak funkcia je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke, potom je na nej integrovateľná.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– funkciu F nazývame primitívna funkcia k funkcii f na oblasti G, akk $F'(z) = f(z)$ pre každé $z \in G$;

Veta III.18

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Nech γ je JHO krivka súhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, ktorá leží v oblasti G. Potom

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a)).$$

Dôsledok

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Ak γ je JUHO krivka, ktorá leží v oblasti G, tak

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– funkciu F nazývame primitívna funkcia k funkcii f na oblasti G, akk $F'(z) = f(z)$ pre každé $z \in G$;

Veta III.18

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Nech γ je JHO krivka súhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, ktorá leží v oblasti G. Potom

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a)).$$

Dôsledok

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Ak γ je JUHO krivka, ktorá leží v oblasti G, tak

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– funkciu F nazývame primitívna funkcia k funkcii f na oblasti G, akk $F'(z) = f(z)$ pre každé $z \in G$;

Veta III.18

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Nech γ je JHO krivka súhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, ktorá leží v oblasti G. Potom

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a)).$$

Dôsledok

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Ak γ je JUHO krivka, ktorá leží v oblasti G, tak

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$