Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza
Prednáška 8

5. apríla 2024

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta III.17 (výpočet integrálu)

Nech $\gamma : z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, je JHO alebo JUHO a funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_{a}^{b} f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Veta III.18

Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Nech γ je JHO krivka súhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, ktorá leží v oblasti G. Potom

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a)).$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– teória analytických funkcií je jednoduchším alebo zložitejším dôsledkom tzv. Cauchyho integrálnej vety (Cauchy 1814);

Veta (Cauchyho integrálna – jednoduchá verzia)

Nech funkcia f je analytická na jednoducho súvislej oblasti G a γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá aj so svojim vnútrom leží v G. Potom $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Veta (Cauchyho integrálna – všeobecnejšia verzia)

Nech γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na uzávere oblasti G, t.j. $\overline{G} = G \cup \gamma$. Potom $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– teória analytických funkcií je jednoduchším alebo zložitejším dôsledkom tzv. Cauchyho integrálnej vety (Cauchy 1814);

Veta (Cauchyho integrálna – jednoduchá verzia)

Nech funkcia f je analytická na jednoducho súvislej oblasti G a γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá aj so svojím vnútrom leží v G. Potom $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Veta (Cauchyho integrálna – všeobecnejšia verzia)

Nech γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na uzávere oblasti G, t.j. $\overline{G} = G \cup \gamma$. Potom $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

– teória analytických funkcií je jednoduchším alebo zložitejším dôsledkom tzv. Cauchyho integrálnej vety (Cauchy 1814);

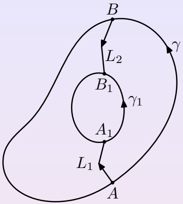
Veta (Cauchyho integrálna – jednoduchá verzia)

Nech funkcia f je analytická na jednoducho súvislej oblasti G a γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá aj so svojim vnútrom leží v G. Potom $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Veta (Cauchyho integrálna – všeobecnejšia verzia)

Nech γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \mathrm{Int}\,\gamma$ a spojitá na uzávere oblasti G, t.j. $\overline{G} = G \cup \gamma$. Potom $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

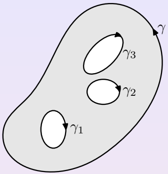


Veta (o deformácii integrálnej krivky)

Nech γ, γ_1 sú jednoduché, uzavreté, po častiach hladké krivky, obidve buď kladne alebo záporne orientované a $\gamma_1 \subset \operatorname{Int} \gamma$. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int} \gamma \cap \operatorname{Ext} \gamma_1$ a spojitá na uzávere oblasti G. Potom

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Komplexné funkcie reálnej premennej – krivky (pripomenutie)

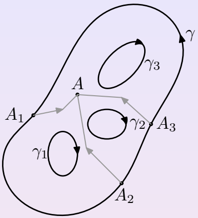


– **viacnásobne súvislá oblasť**: nech $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sú jednoduché uzavreté krivky také, že graf ľubovoľnej z nich leží vo vonkajšku ľubovoľnej inej a nech γ je jednoduchá uzavretá krivka, ktorej vnútro obsahuje grafy kriviek $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

Definícia (viacnásobne súvislej oblasti)

Množinu $G = \operatorname{Int}\gamma \cap \operatorname{Ext}\gamma_1 \cap \operatorname{Ext}\gamma_2 \cap \cdots \cap \operatorname{Ext}\gamma_n$ nazývame $(n+1)$-násobne súvislá oblasť. Jej hranicu tvoria grafy kriviek $\gamma, \gamma_1, \dots, \gamma_n$. Hovoríme, že $(n+1)$- násobne súvislá oblasť má kladne orientovanú hranicu, akk krivky $\gamma, \gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_n^*$ sú kladne orientované.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej



Veta (Cauchyho integrálna pre viacnásobne súvislú oblasť)

Nech G je $(n+1)$-násobne súvislá oblasť s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria po častiach hladké, kladne orientované krivky $\gamma, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$. Nech funkcia f je analytická na G a spojitá na $\overline{G}$. Potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \text{ resp. } \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j^*} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (Cauchyho integrálna formula – CIF)

Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \mathrm{Int}\,\gamma$ a spojitá na $\overline{G}$. Potom v každom bode $z_0 \in G$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Veta (CIF pre viacnásobne súvislú oblasť)

Nech G je $(n+1)$-násobne súvislá oblasť s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria po častiach hladké, kladne orientované krivky $\gamma, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$. Nech funkcia f je analytická na G a spojitá na $\overline{G}$. Potom pre každý bod $z_0 \in G$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \left[\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \right].$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (Cauchyho integrálna formula – CIF)

Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na $\overline{G}$. Potom v každom bode $z_0 \in G$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z.$$

Veta (CIF pre viacnásobne súvislú oblasť)

Nech G je $(n+1)$-násobne súvislá oblasť s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria po častiach hladké, kladne orientované krivky $\gamma, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$. Nech funkcia f je analytická na G a spojitá na $\overline{G}$. Potom pre každý bod $z_0 \in G$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \left[\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z \right].$$

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (zovšeobecnená Cauchyho integrálna formula)

Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech f je analytická na jednoducho súvislej oblasti $G = \operatorname{Int} \gamma$ a spojitá na $\overline{G}$. Potom v každom bode $z \in G$ existuje derivácia ľubovoľného rádu a platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

– ak γ nie je uzavretá, môžeme definovať funkciu (**integrál Cauchyho typu**)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z} \, \mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma,$$

a podobne ako Cauchyho integrálna veta a jej zovšeobecnená veta sa dokáže zovšeobecnená CIF pre F;

Dôsledok

Nech funkcia f je analytická na oblasti G. Potom f má na G všetky derivácie a každá jej derivácia je analytická funkcia na G.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (zovšeobecnená Cauchyho integrálna formula)

Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech f je analytická na jednoducho súvislej oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na $\overline{G}$. Potom v každom bode $z \in G$ existuje derivácia ľubovoľného rádu a platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

– ak γ nie je uzavretá, môžeme definovať funkciu (**integrál Cauchyho typu**)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma,$$

a podobne ako Cauchyho integrálna veta a jej zovšeobecnená veta sa dokáže zovšeobecnená CIF pre F;

Dôsledok

Nech funkcia f je analytická na oblasti G. Potom f má na G všetky derivácie a každá jej derivácia je analytická funkcia na G.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (zovšeobecnená Cauchyho integrálna formula)

Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech f je analytická na jednoducho súvislej oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na $\overline{G}$. Potom v každom bode $z \in G$ existuje derivácia ľubovoľného rádu a platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

– ak γ nie je uzavretá, môžeme definovať funkciu (**integrál Cauchyho typu**)

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z} \, \mathrm{d}s, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma,$$

a podobne ako Cauchyho integrálna veta a jej zovšeobecnená veta sa dokáže zovšeobecnená CIF pre F;

Dôsledok

Nech funkcia f je analytická na oblasti G. Potom f má na G všetky derivácie a každá jej derivácia je analytická funkcia na G.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (Liouvillova)

Nech funkcia f je analytická a ohraničená na celej komplexnej rovine. Potom f je konštantná funkcia.

– ako dôsledok Liouvillovej vety dostávame, že

funkcie $\sin$ a $\cos$ nie sú ohraničené v $\mathbb{C}$!

Základná veta algebry

Algebraická rovnica

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

stupňa $n \geq 1$, kde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2 \ldots, , a_n$ sú komplexné čísla, má aspoň jeden koreň v $\mathbb{C}$.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (Liouvillova)

Nech funkcia f je analytická a ohraničená na celej komplexnej rovine. Potom f je konštantná funkcia.

– ako dôsledok Liouvillovej vety dostávame, že

funkcie $\sin$ a $\cos$ nie sú ohraničené v $\mathbb{C}$!

Základná veta algebry

Algebraická rovnica

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

stupňa $n \geq 1$, kde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú komplexné čísla, má aspoň jeden koreň v $\mathbb{C}$.

Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Veta (Liouvillova)

Nech funkcia f je analytická a ohraničená na celej komplexnej rovine. Potom f je konštantná funkcia.

– ako dôsledok Liouvillovej vety dostávame, že

funkcie $\sin$ a $\cos$ nie sú ohraničené v $\mathbb{C}$!

Základná veta algebry

Algebraická rovnica

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

stupňa $n \geq 1$, kde $a_0 \neq 0$, $a_1, a_2 \ldots, , a_n$ sú komplexné čísla, má aspoň jeden koreň v $\mathbb{C}$.