Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza

Prednáška 9

19. apríla 2024

Postupnosti komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode $z_0 \in M$, akk konverguje číselná postupnosť $(f_n(z_0))_1^\infty$.

(ii) Množinu všetkých $z \in M$, v ktorých postupnosť $(f_n(z))_1^\infty$ konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

(iii) Nech D je obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$. Funkciu f definovanú na D tak, že pre každé $z \in D$ je $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nazývame limitná funkcia.

(iv) Postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in D) \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon].$$

Postupnosti komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode $z_0 \in M$, akk konverguje číselná postupnosť $(f_n(z_0))_1^\infty$.

(ii) Množinu všetkých $z \in M$, v ktorých postupnosť $(f_n(z))_1^\infty$ konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

(iii) Nech D je obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$. Funkciu f definovanú na D tak, že pre každé $z \in D$ je $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nazývame limitná funkcia.

(iv) Postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in D) \rightarrow |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon].$$

Postupnosti komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode $z_0 \in M$, akk konverguje číselná postupnosť $(f_n(z_0))_1^\infty$.

(ii) Množinu všetkých $z \in M$, v ktorých postupnosť $(f_n(z))_1^\infty$ konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

(iii) Nech D je obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$. Funkciu f definovanú na D tak, že pre každé $z \in D$ je $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nazývame limitná funkcia.

(iv) Postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in D) \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon].$$

Postupnosti komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode $z_0 \in M$, akk konverguje číselná postupnosť $(f_n(z_0))_1^\infty$.

(ii) Množinu všetkých $z \in M$, v ktorých postupnosť $(f_n(z))_1^\infty$ konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

(iii) Nech D je obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$. Funkciu f definovanú na D tak, že pre každé $z \in D$ je $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nazývame limitná funkcia.

(iv) Postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in D) \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon].$$

Postupnosti komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ konverguje v bode $z_0 \in M$, akk konverguje číselná postupnosť $(f_n(z_0))_1^\infty$.

(ii) Množinu všetkých $z \in M$, v ktorých postupnosť $(f_n(z))_1^\infty$ konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$.

(iii) Nech D je obor konvergencie postupnosti funkcií $(f_n)_1^\infty$. Funkciu f definovanú na D tak, že pre každé $z \in D$ je $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nazývame limitná funkcia.

(iv) Postupnosť funkcií $(f_n)_1^\infty$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D, akk

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)(\forall z \in D) \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon].$$

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode z_0, akk v tomto bode konverguje číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

(ii) Obor konvergencie funkcionálneho radu je množina všetkých komplexných čísel, v ktorých funkcionálny rad konverguje.

(iii) Funkciu s definovanú na D rovnosťou $s(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$, kde $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ je postupnosť čiastočných súčtov funkcionálneho radu, nazývame súčet radu.

(iv) Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D, akk rovnomerne konverguje na D jeho postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že funkcionálny rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode z_0, akk v tomto bode konverguje číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

(ii) Obor konvergencie funkcionálneho radu je množina všetkých komplexných čísel, v ktorých funkcionálny rad konverguje.

(iii) Funkciu s definovanú na D rovnosťou $s(z) = \lim_{n\to\infty} s_n(z)$, kde $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ je postupnosť čiastočných súčtov funkcionálneho radu, nazývame súčet radu.

(iv) Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D, akk rovnomerne konverguje na D jeho postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode z_0, akk v tomto bode konverguje číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

(ii) Obor konvergencie funkcionálneho radu je množina všetkých komplexných čísel, v ktorých funkcionálny rad konverguje.

(iii) Funkciu s definovanú na D rovnosťou $s(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$, kde $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ je postupnosť čiastočných súčtov funkcionálneho radu, nazývame súčet radu.

(iv) Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D, akk rovnomerne konverguje na D jeho postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode z_0, akk v tomto bode konverguje číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

(ii) Obor konvergencie funkcionálneho radu je množina všetkých komplexných čísel, v ktorých funkcionálny rad konverguje.

(iii) Funkciu s definovanú na D rovnosťou $s(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$, kde $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ je postupnosť čiastočných súčtov funkcionálneho radu, nazývame súčet radu.

(iv) Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D, akk rovnomerne konverguje na D jeho postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

(i) Hovoríme, že funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode z_0, akk v tomto bode konverguje číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

(ii) Obor konvergencie funkcionálneho radu je množina všetkých komplexných čísel, v ktorých funkcionálny rad konverguje.

(iii) Funkciu s definovanú na D rovnosťou $s(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$, kde $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ je postupnosť čiastočných súčtov funkcionálneho radu, nazývame súčet radu.

(iv) Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D, akk rovnomerne konverguje na D jeho postupnosť čiastočných súčtov $(s_n)_1^{\infty}$.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium)

Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ a každé $z \in D$ platí

$$\left| \sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z) \right| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon.$$

Dôsledok

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D a g je definovaná a ohraničená na D. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (g \cdot f_n)$ rovnomerne konverguje na D.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium)

Rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ a každé $z \in D$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z)\right| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon.$$

Dôsledok

Nech $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D a g je definovaná a ohraničená na D. Potom rad $\sum_{n=1}^{\infty} (g \cdot f_n)$ rovnomerne konverguje na D.

Rady komplexných funkcií komplexnej premennej

Veta (Cauchyho-Bolzanovo kritérium)

Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ a každé $z \in D$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z)\right| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+m}(z)| < \varepsilon.$$

Veta (Weierstrassovo kritérium)

Nech pre každé $z \in D$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí $|f_n(z)| \leq a_n$. Ak číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D.

Vlastnosti súčtov rovnomerne konvergentných radov

Veta (o spojitosti súčtu radu)

Nech funkcie f_n sú spojité na množine D a rad $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D. Potom funkcia f je spojitá na množine D.

Veta (o integrovateľnosti súčtu radu)

Nech γ je jednoduchá krivka konečnej dĺžky. Nech funkcie f_n sú spojité na krivke γ a $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k funkcii f na krivke γ. Potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Vlastnosti súčtov rovnomerne konvergentných radov

Veta (o spojitosti súčtu radu)

Nech funkcie f_n sú spojité na množine D a rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D. Potom funkcia f je spojitá na množine D.

Veta (o integrovateľnosti súčtu radu)

Nech γ je jednoduchá krivka konečnej dĺžky. Nech funkcie f_n sú spojité na krivke γ a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje k funkcii f na krivke γ. Potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Vlastnosti súčtov rovnomerne konvergentných radov

Veta (o derivácii súčtu radu)

Nech funkcie f_n, $n \in \mathbb{N}$, sú analytické v oblasti G, funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na G a rovnomerne konverguje na ľubovoľnej uzavretej množine $\overline{G_1} \subset G$, kde $\overline{G_1} = G_1 \cup \gamma_1$, G_1 je jednoducho súvislá oblasť s hranicou γ_1. Potom:

(i) súčet radu $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je analytická funkcia v oblasti G;

(ii) funkcionálny rad môžeme derivovať v oblasti G člen po člene, t.j.

$$(\forall z \in G)\ \ f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z),$$

pričom rad derivácií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ rovnomerne konverguje k funkcii f' na $\overline{G_1}$.

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

– bod z_0 sa nazýva stred mocninového radu;

– c_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ sa nazývajú koeficienty mocninového radu;

– obor konvergencie každého mocninového radu je neprázdna množina (konverguje aspoň v strede);

Veta IV.1

Ak mocninový rad konverguje v komplexnom čísle $z_1 \neq z_0$, potom konverguje v každom komplexnom čísle z, pre ktoré platí $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Naviac tento rad konverguje absolútne.

– t.j. ku každému mocninovému radu existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ (polomer konvergencie) také, že tento rad absolútne konverguje vo vnútri kruhu $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ (kruh konvergencie);

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

– bod z_0 sa nazýva stred mocninového radu;
– c_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ sa nazývajú koeficienty mocninového radu;
– obor konvergencie každého mocninového radu je neprázdna množina (konverguje aspoň v strede);

Veta IV.1

Ak mocninový rad konverguje v komplexnom čísle $z_1 \neq z_0$, potom konverguje v každom komplexnom čísle z, pre ktoré platí $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Naviac tento rad konverguje absolútne.

– t.j. ku každému mocninovému radu existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ (polomer konvergencie) také, že tento rad absolútne konverguje vo vnútri kruhu $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ (kruh konvergencie);

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

– bod z_0 sa nazýva stred mocninového radu;
– c_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ sa nazývajú koeficienty mocninového radu;
– obor konvergencie každého mocninového radu je neprázdna množina (konverguje aspoň v strede);

Veta IV.1

Ak mocninový rad konverguje v komplexnom čísle $z_1 \neq z_0$, potom konverguje v každom komplexnom čísle z, pre ktoré platí $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Naviac tento rad konverguje absolútne.

– t.j. ku každému mocninovému radu existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty\rangle$ (polomer konvergencie) také, že tento rad absolútne konverguje vo vnútri kruhu $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ (kruh konvergencie);

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

– bod z_0 sa nazýva stred mocninového radu;
– c_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ sa nazývajú koeficienty mocninového radu;
– obor konvergencie každého mocninového radu je neprázdna množina (konverguje aspoň v strede);

Veta IV.2

Ak mocninový rad diverguje v komplexnom čísle z_2, potom diverguje v každom z, pre ktoré platí $|z-z_0| > |z_2-z_0|$.

– t.j. ku každému mocninovému radu existuje číslo $R \in \langle 0, +\infty \rangle$ (polomer konvergencie) také, že tento rad diverguje v každom čísle, ktoré leží vo vonkajšku kruhu $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z-z_0| < R\}$;
– množina $|z-z_0| = R$ sa nazýva konvergenčná kružnica;

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \qquad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Ako určiť polomer konvergencie mocninového radu?

Veta IV.3

Nech existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$). Potom

(i) ak $L \neq 0$, tak $R = \frac{1}{L}$;

(ii) ak $L = 0$, tak $R = +\infty$.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, tak $R = 0$.

Veta IV.4

Ak $R > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu, tak tento rad konverguje rovnomerne na každom kruhu $|z - z_0| \leq r < R$.

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Ako určiť polomer konvergencie mocninového radu?

Veta IV.3

Nech existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$). Potom

(i) ak $L \neq 0$, tak $R = \frac{1}{L}$;

(ii) ak $L = 0$, tak $R = +\infty$.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, tak $R = 0$.

Veta IV.4

Ak $R > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu, tak tento rad konverguje rovnomerne na každom kruhu $|z - z_0| \leq r < R$.

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Ako určiť polomer konvergencie mocninového radu?

Veta IV.3

Nech existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$ (resp. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$). Potom

(i) ak $L \neq 0$, tak $R = \frac{1}{L}$;

(ii) ak $L = 0$, tak $R = +\infty$.

Ak $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, tak $R = 0$.

Veta IV.4

Ak $R > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu, tak tento rad konverguje rovnomerne na každom kruhu $|z - z_0| \leq r < R$.

Mocninové rady komplexnej premennej – zopakovanie

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Veta IV.5

Nech mocninový rad má polomer konvergencie $R > 0$ a súčet f. Potom

(i) f je funkcia analytická na kruhu konvergencie $K(z_0, R)$;

(ii) pre každý bod $z \in K(z_0, R)$ a ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k};$$

(iii) pre každú krivku so začiatočným bodom $z_0 \in K(z_0, R)$ a koncovým bodom $z \in K(z_0, R)$ platí

$$\int_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1}.$$

Taylorove rady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Taylorove rady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Taylorove rady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Taylorove rady

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Niektoré dôležité Taylorove rady

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \ z \in \mathbb{C};$$

$$\lg(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$