Funkcie komplexnej premennej

(prezentácia k prednáške FKP/10)

prof. RNDr. Ondrej Hutník, PhD.[1]

[1]ondrej.hutnik@upjs.sk
umv.science.upjs.sk/analyza
Prednáška 10

26. apríla 2024

Taylorove rady – zopakovanie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Taylorove rady – zopakovanie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Taylorove rady – zopakovanie

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n,\qquad z\in K(z_0,R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0,R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z\in K(z_0,R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Taylorove rady – zopakovanie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in K(z_0, R)$$

= Taylorov rad funkcie f v bode z_0

Dá sa každá analytická funkcia v bode z_0 rozvinúť do Taylorovho radu na nejakom okolí bodu z_0?

Veta (Taylorova)

Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$.

Dôsledok (o jednoznačnosti rozkladu)

Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Niektoré dôležité Taylorove rady

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C};$$

$$\lg(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1;$$

Laurentove rady

Taylorov rad = rozvoj funkcie v okolí jej **regulárneho** bodu;

Existuje rozvoj funkcie v okolí izolovaného singulárneho bodu?

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Definícia

Hovoríme, že rad ($\heartsuit$) konverguje v bode z, resp. na $M \subset \mathbb{C}$, akk konvergujú v bode z, resp. na M, rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

– rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ nazývame regulárna (tiež analytická) časť radu ($\heartsuit$);

– rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ nazývame hlavná časť radu ($\heartsuit$);

– ak konverguje regulárna aj hlavná časť, tak súčtom radu ($\heartsuit$) rozumieme súčet súčtov týchto radov;

Laurentove rady

Taylorov rad = rozvoj funkcie v okolí jej **regulárneho** bodu;
Existuje rozvoj funkcie v okolí izolovaného singulárneho bodu?

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Definícia

Hovoríme, že rad ($\heartsuit$) konverguje v bode z, resp. na $M \subset \mathbb{C}$, akk konvergujú v bode z, resp. na M, rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \quad \text{a} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

– rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ nazývame regulárna (tiež analytická) časť radu ($\heartsuit$);

– rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ nazývame hlavná časť radu ($\heartsuit$);

– ak konverguje regulárna aj hlavná časť, tak súčtom radu ($\heartsuit$) rozumieme súčet súčtov týchto radov;

Laurentove rady

Taylorov rad = rozvoj funkcie v okolí jej **regulárneho** bodu;
Existuje rozvoj funkcie v okolí izolovaného singulárneho bodu?

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Definícia

Hovoríme, že rad ($\heartsuit$) konverguje v bode z, resp. na $M \subset \mathbb{C}$, akk konvergujú v bode z, resp. na M, rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \ \text{ a } \ \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

– rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ nazývame regulárna (tiež analytická) časť radu ($\heartsuit$);

– rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ nazývame hlavná časť radu ($\heartsuit$);

– ak konverguje regulárna aj hlavná časť, tak súčtom radu ($\heartsuit$) rozumieme súčet súčtov týchto radov;

Laurentove rady

Taylorov rad = rozvoj funkcie v okolí jej **regulárneho** bodu;
Existuje rozvoj funkcie v okolí izolovaného singulárneho bodu?

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Definícia

Hovoríme, že rad ($\heartsuit$) konverguje v bode z, resp. na $M \subset \mathbb{C}$, akk konvergujú v bode z, resp. na M, rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \;\text{ a }\; \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

– rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ nazývame regulárna (tiež analytická) časť radu ($\heartsuit$);

– rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ nazývame hlavná časť radu ($\heartsuit$);

– ak konverguje regulárna aj hlavná časť, tak súčtom radu ($\heartsuit$) rozumieme súčet súčtov týchto radov;

Laurentove rady

Taylorov rad = rozvoj funkcie v okolí jej **regulárneho** bodu;
Existuje rozvoj funkcie v okolí izolovaného singulárneho bodu?

$$(\heartsuit) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

Definícia

Hovoríme, že rad ($\heartsuit$) konverguje v bode z, resp. na $M \subset \mathbb{C}$, akk konvergujú v bode z, resp. na M, rady

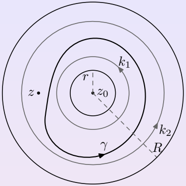
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \text{ a } \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

– rad $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ nazývame regulárna (tiež analytická) časť radu ($\heartsuit$);

– rad $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ nazývame hlavná časť radu ($\heartsuit$);

– ak konverguje regulárna aj hlavná časť, tak súčtom radu ($\heartsuit$) rozumieme súčet súčtov týchto radov;

Dá sa analytická funkcia na nejakom medzikruží rozvinúť do radu tvaru (♡)?



Veta IV.6

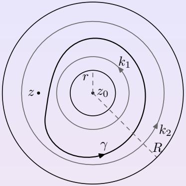
Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots ,$$

pričom γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka ležiaca celá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

– rad nazývame Laurentov rad funkcie f so stredom v z_0 na $M(z_0, r, R)$

Dá sa analytická funkcia na nejakom medzikruží rozvinúť do radu tvaru (♡)?



Veta IV.6

Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom

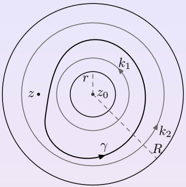
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots ,$$

pričom γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka ležiaca celá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\gamma$.

– rad nazývame Laurentov rad funkcie f so stredom v z_0 na $M(z_0, r, R)$

Dá sa analytická funkcia na nejakom medzikruží rozvinúť do radu tvaru (♡)?



Veta IV.6

Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

pričom γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka ležiaca celá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\gamma$.

– rad nazývame Laurentov rad funkcie f so stredom v z_0 na $M(z_0, r, R)$

Veta IV.6

Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom
$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots ,$$

pričom γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka ležiaca celá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$.

– rad nazývame Laurentov rad funkcie f so stredom v z_0 na $M(z_0, r, R)$
– ako to vyzerá s jednoznačnosťou tohto rozkladu?

Veta IV.7

Nech funkcia f sa dá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ rozvinúť do nekonečného radu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Potom f je analytická na $M(z_0, r, R)$ a tento rad je jej Laurentov rad.

Veta IV.6

Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2\ \dots,$$

pričom γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka ležiaca celá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\,\gamma$.

– rad nazývame Laurentov rad funkcie f so stredom v z_0 na $M(z_0, r, R)$
– ako to vyzerá s jednoznačnosťou tohto rozkladu?

Veta IV.7

Nech funkcia f sa dá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ rozvinúť do nekonečného radu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Potom f je analytická na $M(z_0, r, R)$ a tento rad je jej Laurentov rad.

Veta IV.6

Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$, kde

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots,$$

pričom γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka ležiaca celá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\gamma$.

– rad nazývame Laurentov rad funkcie f so stredom v z_0 na $M(z_0, r, R)$
– ako to vyzerá s jednoznačnosťou tohto rozkladu?

Veta IV.7

Nech funkcia f sa dá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ rozvinúť do nekonečného radu $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$. Potom f je analytická na $M(z_0, r, R)$ a tento rad je jej Laurentov rad.

Nulové body analytických funkcií

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

– bod z_0 nazývame *n-násobný nulový bod* funkcie f, akk $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ a $c_n \neq 0$;

Veta IV.8

Nech funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \mathbb{C}$. Bod z_0 je n-násobný nulový bod funkce f práve vtedy, keď funkcia f sa dá na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde funkcia φ je analytická v bode z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Veta IV.9

Nech f je funkcia analytická v bode z_0, ktorý je jej nulovým bodom. Potom buď $f = 0$ na nejakom okolí bodu z_0 alebo existuje také prstencové okolie bodu z_0, ktoré neobsahuje viac nulových bodov funkcie f.

Nulové body analytických funkcií

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

– bod z_0 nazývame n-násobný nulový bod funkcie f, akk $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ a $c_n \neq 0$;

Veta IV.8

Nech funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \mathbb{C}$. Bod z_0 je n-násobný nulový bod funkce f práve vtedy, keď funkcia f sa dá na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde funkcia φ je analytická v bode z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Veta IV.9

Nech f je funkcia analytická v bode z_0, ktorý je jej nulovým bodom. Potom buď $f = 0$ na nejakom okolí bodu z_0 alebo existuje také prstencové okolie bodu z_0, ktoré neobsahuje viac nulových bodov funkcie f.

Nulové body analytických funkcií

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \ldots$$

– bod z_0 nazývame n-násobný nulový bod funkcie f, akk $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ a $c_n \neq 0$;

Veta IV.8

Nech funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \mathbb{C}$. Bod z_0 je n-násobný nulový bod funkce f práve vtedy, keď funkcia f sa dá na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde funkcia φ je analytická v bode z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Veta IV.9

Nech f je funkcia analytická v bode z_0, ktorý je jej nulovým bodom. Potom buď $f = 0$ na nejakom okolí bodu z_0 alebo existuje také prstencové okolie bodu z_0, ktoré neobsahuje viac nulových bodov funkcie f.

Nulové body analytických funkcií

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \cdots + c_n(z - z_0)^n + \dots$$

– bod z_0 nazývame *n-násobný nulový bod* funkcie f, akk $c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ a $c_n \neq 0$;

Veta IV.8

Nech funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \mathbb{C}$. Bod z_0 je n-násobný nulový bod funkce f práve vtedy, keď funkcia f sa dá na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde funkcia φ je analytická v bode z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Veta IV.9

Nech f je funkcia analytická v bode z_0, ktorý je jej nulovým bodom. Potom buď $f = 0$ na nejakom okolí bodu z_0 alebo existuje také prstencové okolie bodu z_0, ktoré neobsahuje viac nulových bodov funkcie f.

Klasifikácia singulárnych bodov

– Taylorov rad – charakterizácia nulových bodov

– Laurentov rad – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(I) ak hlavná časť Laurentovho radu je rovná 0, t.j.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

tak bod z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod funkcie f;

Veta (Riemann)

Ak funkcia f je analytická v prstencovom okolí bodu z_0 a je ohraničená na tomto okolí, potom bod z_0 je jej odstrániteľný singulárny bod.

Klasifikácia singulárnych bodov

– TAYLOROV RAD – charakterizácia nulových bodov
– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(I) ak hlavná časť Laurentovho radu je rovná 0, t.j.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

tak bod z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod funkcie f;

Veta (Riemann)

Ak funkcia f je analytická v prstencovom okolí bodu z_0 a je ohraničená na tomto okolí, potom bod z_0 je jej odstrániteľný singulárny bod.

Klasifikácia singulárnych bodov

– TAYLOROV RAD – charakterizácia nulových bodov
– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(I) ak hlavná časť Laurentovho radu je rovná 0, t.j.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n,$$

tak bod z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod funkcie f;

Veta (Riemann)

Ak funkcia f je analytická v prstencovom okolí bodu z_0 a je ohraničená na tomto okolí, potom bod z_0 je jej odstrániteľný singulárny bod.

Klasifikácia singulárnych bodov

– TAYLOROV RAD – charakterizácia nulových bodov
– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(I) ak hlavná časť Laurentovho radu je rovná 0, t.j.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,$$

tak bod z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod funkcie f;

Veta (Riemann)

Ak funkcia f je analytická v prstencovom okolí bodu z_0 a je ohraničená na tomto okolí, potom bod z_0 je jej odstrániteľný singulárny bod.

Klasifikácia singulárnych bodov

– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;

Veta IV.10

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď f sa dá na nejakom prstencovom okolí $U^*(z_0, R)$ bodu z_0 vyjadriť v tvare $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, kde φ je analytická na $U(z_0, R)$ a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Klasifikácia singulárnych bodov

– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \dots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;

Veta IV.10

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď f sa dá na nejakom prstencovom okolí $U^*(z_0, R)$ bodu z_0 vyjadriť v tvare $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, kde φ je analytická na $U(z_0, R)$ a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Klasifikácia singulárnych bodov

– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;

Veta IV.11

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Klasifikácia singulárnych bodov

– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;

Veta IV.11

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Dôsledok 1

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď je m-násobný nulový bod funkcie $g = \frac{1}{f}$.

Klasifikácia singulárnych bodov

– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;

Veta IV.11

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Dôsledok 2

Bod z_0 je m-násobný pól funkcie f práve vtedy, keď existuje limita $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m f(z) \neq 0$.

Klasifikácia singulárnych bodov

– LAURENTOV RAD – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(III) ak hlavná časť Laurentovho radu má nekonečný počet členov, tak bod z_0 nazývame podstatne singulárny bod funkcie f;

Veta (Cassorati-Weierstrass)

Ak z_0 je podstatne singulárny bod funkcie f analytickej v istom prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu z_0, potom v ľubovoľnom okolí ľubovoľného bodu $w \in \mathbb{C}$ existuje aspoň jeden bod, ktorý je hodnotou $f(z)$ v bode $z \in U^*(z_0)$.

Klasifikácia singulárnych bodov

– Laurentov rad – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(III) ak hlavná časť Laurentovho radu má nekonečný počet členov, tak bod z_0 nazývame podstatne singulárny bod funkcie f;

Veta (Cassorati-Weierstrass)

Ak z_0 je podstatne singulárny bod funkcie f analytickej v istom prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu z_0, potom v ľubovoľnom okolí ľubovoľného bodu $w \in \mathbb{C}$ existuje aspoň jeden bod, ktorý je hodnotou $f(z)$ v bode $z \in U^*(z_0)$.

Klasifikácia singulárnych bodov – zhrnutie

– Laurentov rad – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(I) ak hlavná časť Laurentovho radu je rovná 0, t.j. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, tak bod z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod funkcie f;

(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;

(III) ak hlavná časť Laurentovho radu má nekonečný počet členov, tak bod z_0 nazývame podstatne singulárny bod funkcie f;

(I) bod z_0 je odstrániteľný singulárny bod funkcie f, ak existuje konečná limita $\lim_{z\to z_0} f(z)$;

(II) bod z_0 je pól funkcie f, ak existuje nekonečná limita $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

(III) bod z_0 je podstatne singulárny bod funkcie f, ak neexistuje limita $\lim_{z\to z_0} f(z)$;

Klasifikácia singulárnych bodov – zhrnutie

– Laurentov rad – charakterizácia singulárnych bodov

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad c_n, z_0, z \in \mathbb{C}$$

(I) ak hlavná časť Laurentovho radu je rovná 0, t.j. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, tak bod z_0 nazývame odstrániteľný singulárny bod funkcie f;
(II) ak hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j.

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0,$$

tak bod z_0 nazývame m-násobný pól funkcie f;
(III) ak hlavná časť Laurentovho radu má nekonečný počet členov, tak bod z_0 nazývame podstatne singulárny bod funkcie f;

(I) bod z_0 je odstrániteľný singulárny bod funkcie f, ak existuje konečná limita $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;

(II) bod z_0 je pól funkcie f, ak existuje nekonečná limita $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;

(III) bod z_0 je podstatne singulárny bod funkcie f, ak neexistuje limita $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;