2 Funkcia

2.1 Komplexná funkcia komplexnej premennej

V komplexnej analýze sa, na rozdiel od reálnej analýzy, dosť často stretávame s funkciami, ktoré nie sú zobrazením. Takéto funkcie bodom svojho definičného oboru priraďujú aj niekoľko (dokonca aj nekonečne veľa) hodnôt. Matematicky je možné takúto situáciu popísať pomocou relácie. Dostaneme definíciu funkcie, ktorá zovšeobecňuje definíciu pojmu funkcia z reálnej analýzy.

Definícia 2.1.1. Každú reláciu f na Gaussovej rovine $\mathbb{C}$, t.j. $f \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, nazývame **komplexná funkcia komplexnej premennej** (alebo stručne len funkcia). Obor relácie f nazývame **definičný obor** funkcie f a označujeme ho D_f. Obraz definičného oboru D_f v relácii f nazývame **obor hodnôt** funkcie f a označujeme ho W_f, teda $W_f = f(D_f) = \{w \in \mathbb{C};$ existuje bod $z \in D_f$ taký, že $w = f(z)\}$.

Z uvedeného vyplýva, že komplexná funkcia komplexnej premennej f priradí každému komplexnému číslu $z \in D_f \subset \mathbb{C}$ podľa určitého pravidla jedno alebo viac komplexných čísel $w \in W_f \subset \mathbb{C}$. Ak $z \in D_f$, potom každý bod (komplexné číslo) z množiny $f(z)$ (správnejšie by sa malo písať $\{f(z)\}$) nazývame (**funkčnou**) **hodnotou** funkcie f v bode z.

Ak je pre každý bod $z \in D_f$ množina $f(z)$ jednobodová, t.j. relácia f je zobrazením, hovoríme, že funkcia f je **jednoznačná**.

Ak aspoň pre jeden bod $z \in D_f$ obsahuje množina $f(z)$ aspoň dva prvky, tak funkciu f nazývame **viacznačná** (tiež **mnohoznačná**). Viacznačnú funkciu, pre ktorú aspoň jedna množina $f(z)$ nie je konečná, nazývame **nekonečnoznačná** funkcia.

Ak f je viacznačná funkcia, tak jednoznačnú funkciu φ nazývame **jednoznačná vetva** funkcie f, ak platí:

a) $D_\varphi \subset D_f$,

b) pre každý bod $z \in D_\varphi$ je $\varphi(z) \in f(z)$.

Hovoríme, že funkcia f je **funkciou reálnej premennej**, resp. **reálnou funkciou**, ak $D_f \subset \mathbb{R}$, resp. $W_f \subset \mathbb{R}$.

Poznámka. Pretože komplexná funkcia komplexnej premennej f je definovaná ako relácia na $\mathbb{C}$, sú tým definované aj ďalšie pojmy ako: zložená funkcia, inverzná funkcia, obraz a vzor množiny v relácii f, zúženie, rozšírenie funkcie, prostá funkcia a ďalšie.

Ak f je jednoznačná funkcia, potom každému bodu $w \in W_f$ môžeme priradiť aspoň jeden bod $z \in D_f$, pre ktorý platí $w = f(z)$. Vieme, že funkcia, ktorá určuje takéto priradenie, je inverzná k funkcii f, teda $z = f^{-1}(w)$.

Ak aj funkcia f^{-1} je jednoznačná funkcia, tak funkciu f nazývame **vzájomne jednoznačná** alebo jednojednoznačná alebo jednolistá. Podobne môže byť funkcia jednoznačná, jednojednoznačná na podmnožine definičného oboru $D \subset D_f$. Funkcia f je na $D \subset D_f$ jednojednoznačná práve vtedy, keď je jednoznačná a prostá na množine $D \subset D_f$.

Príklad 2.1.2.

Funkcie $f(z) = \operatorname{Re} z$, $f(z) = \operatorname{Im} z$, $D_f = \mathbb{C}$ sú jednoznačné reálne funkcie komplexnej premennej $W_f = \mathbb{R}$.

Funkcia $f(z) = |z|$, $D_f = \mathbb{C}$ je jednoznačná reálna funkcia komplexnej premennej, $W_f = \langle 0, \infty)$. Nie je jednolistá, k nej inverzná funkcia je nekonečnoznačná, napr. bodu $w = 1$ priradí komplexné čísla z, ktoré ležia na jednotkovej kružnici so stredom v 0.

Funkcia $f(t) = \cos t + \mathrm{i} \sin t$, $D_f = \mathbb{R}$ je jednoznačná komplexná funkcia reálnej premennej, $W_f = \{w, w \in \mathbb{C}, |w| = 1\}$ (jednotková kružnica).

Funkcia $f(z) = \arg z$, $D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (pozri kapitolu 1.1. bod 6.) je jednoznačná reálna funkcia komplexnej premennej, $W_f = (-\pi, \pi\rangle$.

Funkcia $f(z) = \operatorname{Arg} z$, $D_f = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (pozri kapitolu 1.1. bod 6.) je nekonečnoznačná reálna funkcia komplexnej premennej, $W_f = \mathbb{R}$. Funkcia $\arg z$ je jej jednoznačná vetva.

Funkcia $f(z) = z^4$, $D_f = \mathbb{C}$ je jednoznačná komplexná funkcia komplexnej premennej, $W_f = \mathbb{C}$ (napr. $f : 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i} \to 1$). Nie je jednolistá. K nej inverzná funkcia $f(z) = \sqrt[4]{z}$, $D_f = \mathbb{C}$ je štvorznačná funkcia, pretože pre $z \neq 0$ je $\sqrt[4]{z}$ štvorprvková množina. Napríklad $f^{-1} : 1 \to 1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$. □

Poznámka. Definíciu 2.1.1 môžeme rozšíriť na uzavretú Gaussovu rovinu $\mathbb{C}_\infty$, to znamená $f \subset \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty$. V tom prípade ∞ patrí do definičného oboru a do oboru hodnôt. Ak bod ∞ nepatrí do oboru hodnôt, teda $W_f \subset \mathbb{C}$, tak funkciu f nazývame **konečnou**. Napr. funkcia $f(z) = |z|$ je definovaná v bode ∞, $D_f = \mathbb{C}_\infty$, nie je ale konečná, lebo $f(\infty) = \infty$. Funkcia $f(z) = \frac{1}{z}$ je definovaná v bode 0, nie je konečná, lebo $f(0) = \infty$, $f(\infty) = 0$.

Dohovor. Až na výnimky, ktoré budú špeciálne uvedené, **budeme ďalej pod pojmom funkcia rozumieť jednoznačnú funkciu**, t.j. zobrazenie. Budeme pracovať prevažne s jednoznačnými funkciami v zmysle Definície 2.1.1, t.j. $D_f \subset \mathbb{C}$, $W_f \subset \mathbb{C}$.

Nech f je (podľa dohovoru) jednoznačná funkcia s definičným oborom $D_f \subset \mathbb{C}$. Potom každému bodu $z = x + \mathrm{i}y \in D_f$ je priradená práve jedna funkčná hodnota $w = f(z) \in W_f$ (používajú sa aj zápisy $w = f(x + \mathrm{i}y)$, $w = f(x, y)$). Ak určíme reálnu a imaginárnu časť čísla $f(z)$ a označíme

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) \\ v(x, y) &= \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y), \end{aligned}$$

môžeme písať

$$f(z) = \operatorname{Re} f(z) + \mathrm{i} \operatorname{Im} f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y).$$

Komplexná funkcia komplexnej premennej f je takto určená dvojicou reálnych funkcií u, v, pričom obidve sú funkcie dvoch premenných. Funkcia u je reálna zložka a funkcia v imaginárna zložka funkcie f.

Príklad 2.1.3. Určte reálnu a imaginárnu zložku funkcií:

a) $f(z) = z^2 + 1$, $D_f = \mathbb{C}$; b) $f(z) = \arg z$, $D_f = \mathbb{C} - \{0\}$.

Riešenie. a) Nech $z = x + \mathrm{i}y$, potom

$$f(z) = (x + \mathrm{i}y)^2 + 1 = (x^2 - y^2 + 1) + \mathrm{i}\, 2xy.$$

Teda

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = (x^2 - y^2 + 1), \qquad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = 2xy.$$

b) Z definície hlavnej hodnoty argumentu komplexného čísla $z = x + \mathrm{i}y$ vyplýva, že imaginárna zložka $v(x, y) = 0$ a reálna zložka je daná

$$u(x, y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0,\ y \in \mathbb{R} \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0,\ y \geq 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0,\ x < 0. \end{cases}$$

Hlavná hodnota argumentu, funkcia $\arg z$, je reálna funkcia komplexnej premennej. □

2.2 Limita funkcie komplexnej premennej

Tak ako v reálnej analýze, aj v analýze komplexných funkcií komplexnej premennej má dôležité postavenie pojem limity funkcie. Spojíme v jednej definícií vlastnú (konečnú) a nevlastnú limitu.

Definícia 2.2.1. Hovoríme, že **funkcia f má v bode $z_0 \in \mathbb{C}_\infty$ limitu $w_0 \in \mathbb{C}_\infty$ vzhľadom na množinu $A \subset D_f$**, ak

(i) z_0 je hromadný bod množiny A,

(ii) pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé $z \in U^*_\delta(z_0) \cap A$ je $f(z) \in U_\varepsilon(w_0)$.

Zapisujeme $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in A} f(z) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$, $z \in A$.

Špeciálne, ak funkcia f je definovaná na nejakom prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu z_0 alebo $A = D_f$, vynechávame prívlastok „vzhľadom na množinu $U^*(z_0)$“ a píšeme len $\lim\limits_{z \to z_0} f(y) = w_0$ alebo $f(z) \to w_0$ pre $z \to z_0$.

V závislosti od toho, či sú čísla z_0, w_0 konečné alebo nie, môžeme podmienku (ii) z definície limity zapísať nasledovne:

- z_0, w_0 sú konečné: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in A : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$;
- $z_0 = \infty$, $w_0 \neq \infty$: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in A : |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon$;
- $z_0 \neq \infty$, $w_0 = \infty$: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in A : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$;
- $z_0 = \infty$, $w_0 = \infty$: $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall z \in A : |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow |f(z)| > \frac{1}{\varepsilon}$.

Tak ako v reálnej analýze platí Heineho podmienka existencie limity.

Veta 2.2.2. *Nech f je komplexná funkcia a bod z_0 je hromadný bod množiny $A \subset D_f$. Limita $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in A} f(z) = w_0$ práve vtedy, keď pre ľubovoľnú postupnosť $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in A$, $z_n \neq z_0$ konvergujúcu k z_0, postupnosť funkčných hodnôt $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje k číslu w_0.*

Vidíme, že pojem limity je založený, tak ako v reálnej analýze, na pojme okolia. Preto môžeme prevziať nasledujúce tvrdenia týkajúce sa vlastností limity z reálnej analýzy. Budeme ich formulovať pre limitu v bode z_0 (analogické tvrdenia platia pre limitu v bode z_0 vzhľadom na množinu).

Veta 2.2.3. *Funkcia má v bode nanajvýš jednu limitu.*

Veta 2.2.4. *Nech $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$. Potom*

a) $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = |A|$,

b) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)+g(z)) = A+B$,

c) $\lim\limits_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z)) = A\cdot B$,

d) *ak* $B\neq 0$ *je* $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{A}{B}$.

Veta 2.2.5. *Nech* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ *a funkcia* g *je ohraničená na nejakom prstencovom okolí bodu* z_0. *Potom* $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\cdot g(z) = 0$.

Veta 2.2.6. *Nech existujú* $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z) = b$ *a* $\lim\limits_{w\to b} f(w) = A$, *pričom pre všetky* z *nejakého prstencového okolia bodu* z_0 *platí* $\varphi(z)\neq b$. *Potom v bode* z_0 *existuje limita zloženej funkcie* $f(\varphi)$ *a platí*

$$\lim_{z\to z_0} f(\varphi(z)) = \lim_{w\to b} f(w) = A.$$

Veta 2.2.7. a) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = 0$ práve vtedy, keď $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)| = 0$;
b) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ práve vtedy, keď $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)| = \infty$.

Nasledujúca veta dáva súvis limity komplexnej funkcie s limitami jej reálnej a imaginárnej zložky.

Veta 2.2.8. *Nech* $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ *je konečné komplexné číslo a* $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$. *Funkcia* f *má v bode* z_0 *konečnú limitu práve vtedy, keď reálne funkcie* u, v *majú konečné limity v bode* (x_0,y_0) *a platí*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + \mathrm{i}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)$$

Dôkaz. Nech $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n \neq z_0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Potom z konvergencie postupnosti $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vyplýva, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ a $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Pretože $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ je $f(z_n) = u(x_n,y_n) + \mathrm{i}v(x_n,y_n)$. Vieme, že postupnosť $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje práve vtedy, keď sú konvergentné postupnosti $(u(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(v(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Odtiaľ už vyplýva, že funkcia f má v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ limitu práve vtedy, keď funkcie u, v majú limitu v bode (x_0,y_0). Potom

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}(u(x_n,y_n) + \mathrm{i}v(x_n,y_n)) = \lim_{n\to\infty} u(x_n,y_n) + \mathrm{i}\lim_{n\to\infty} v(x_n,y_n) =$$
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) + \mathrm{i}\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y),$$

čo bolo potrebné ukázať. □

Podobne sa dá dokázať veta.

Veta 2.2.9. *Konečná limita* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0 = u_0 + \mathrm{i}v_0$ *existuje práve vtedy, keď existujú konečné limity* $\lim\limits_{|z|\to\infty} u(x,y) = u_0$ *a* $\lim\limits_{|z|\to\infty} v(x,y) = v_0$.

Uvedené vety dávajú možnosť počítať limity komplexnej funkcie úpravami aké poznáme z reálnej analýzy funkcie jednej premennej alebo pomocou limít funkcie dvoch premenných.

Príklad 2.2.10. Určte: a) $\lim\limits_{z\to \mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{z^2+1}$; b) $\lim\limits_{z\to a} \arg z$, kde a je záporné reálne číslo.

Riešenie.
a) Upravíme funkciu a použijeme vetu o limite podielu

$$\lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{z^2+1} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})} = \lim_{z\to \mathrm{i}} \frac{1}{z+\mathrm{i}} = \frac{1}{2\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}}{2}$$

b) Použijeme Vetu 2.2.8. Vieme, že imaginárna zložka $v(x,y) = \operatorname{Im} \arg z = 0$, a tak aj $\lim\limits_{z\to a} \operatorname{Im} \arg z = 0$. Limitu reálnej zložky určíme pomocou Heineho kritéria. Bod $a = (a,0)$, $a < 0$ je hromadný bod množín

$$A_1 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0,\, \operatorname{Im} z \geq 0\} \quad \text{a} \quad A_2 = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re} z < 0,\, \operatorname{Im} z < 0\}.$$

Zoberme postupnosti $\left(a, \frac{1}{n}\right) \in A_1$ a $\left(a, -\frac{1}{n}\right) \in A_2$, $n \in \mathbb{N}$. Obidve konvergujú k bodu $a = (a,0)$. Limity postupností funkčných hodnôt reálnej zložky $u(x,y) = \operatorname{Re} \arg z$ sú

$$\lim_{n\to\infty} \left(\pi + \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{n}}{a}\right) = \pi, \quad \lim_{n\to\infty} \left(-\pi + \operatorname{arctg} \frac{-\frac{1}{n}}{a}\right) = -\pi.$$

To znamená, že $\lim\limits_{z\to a} \arg z$ pre $a < 0$ neexistuje. □

2.3 Spojitosť funkcie komplexnej premennej

Intuitívny význam spojitosti funkcie v bode je ten istý ako v reálnej analýze, t.j. „funkcia f je v bode $a \in D_f$ svojho definičného oboru spojitá, ak pre body z blízke bodu a sú funkčné hodnoty $f(z)$ blízke funkčnej hodnote $f(a)$“.

Definícia 2.3.1. Hovoríme, že funkcia f je **spojitá v bode $z_0 \in \mathbb{C}$ vzhľadom na množinu $A \subset D_f$**, ak

- $z_0 \in A$,
- k ľubovoľnému okoliu $U(f(z_0))$ existuje okolie $U(z_0)$ bodu z_0 také, že pre všetky $z \in U(z_0) \cap A$ je $f(z) \in U(f(z_0))$.

Ak množina A je okolie bodu z_0, hovoríme, že **funkcia f je spojitá v bode z_0**. Funkciu f nazývame **spojitá na množine A**, ak je spojitá v každom bode množiny A vzhľadom na množinu A. Hovoríme, že **f je spojitá funkcia**, ak je spojitá v každom bode D_f.

Z definície spojitosti funkcie vyplýva súvislosť medzi limitou a spojitosťou funkcie v bode.

Veta 2.3.2. *Nech* $z_0 \in D_f$ *a* $A \subset D_f$. *Ak* z_0 *je hromadný bod množiny* A, *tak funkcia* f *je spojitá v bode* z_0 *vzhľadom na množinu* A *práve vtedy, keď* $\lim\limits_{z \to z_0,\, z \in A} f(z) = f(z_0)$. *Špeciálne, funkcia* f *je spojitá v bode* z_0, *ktorý je hromadný bod* D_f, *práve vtedy, keď* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Nasledujúca veta vyplýva z Vety 2.2.8 o limite komplexnej funkcie a dáva do súvisu spojitosť komplexnej funkcie so spojitosťou jej reálnej a imaginárnej zložky.

Veta 2.3.3. *Funkcia* f *je spojitá v bode* $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ *práve vtedy, keď jej zložky* $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ *sú spojité v bode* (x_0, y_0).

Analogické tvrdenie platí pre spojitosť v bode vzhľadom na množinu. Pre operácie so spojitými funkciami platia tvrdenia ako v reálnej analýze.

Veta 2.3.4. *Nech funkcie* f, g *sú spojité v bode* a. *Potom aj funkcie* $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $|f|$ *sú spojité v bode* a. *Ak naviac* $g(a) \neq 0$, *tak aj funkcia* $\frac{f}{g}$ *je spojitá v bode* a.

Veta 2.3.5. *Nech funkcia* f *je spojitá v bode* a, *funkcia* g *je spojitá v bode* $b = f(a)$. *Potom zložená funkcia* $g \circ f$ *je spojitá v bode* a.

2.4 Komplexná funkcia reálnej premennej. Krivka.

Komplexné funkcie reálnej premennej tvoria dôležitý prostriedok pri štúdiu kriviek. Sú špeciálnym prípadom komplexnej funkcie komplexnej premennej f, keď $D_f \subset \mathbb{R}$. Pomocou nich definujeme v komplexnej rovine krivky. V tejto časti uvedieme vlastnosti kriviek, ktoré budeme neskôr potrebovať.

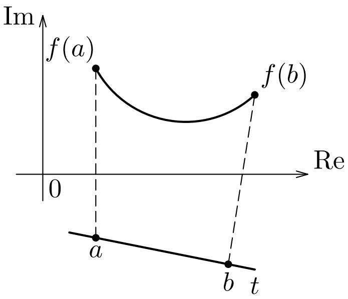
Nech f je komplexná funkcia reálnej premennej, ktorej definičný obor $D_f \subset \mathbb{R}$ a vieme určiť reálnu a imaginárnu zložku

$$f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad t \in D_f.$$

Komplexná funkcia reálnej premennej určuje dvojicu reálnych funkcií reálnej premennej a naopak dvojicou reálnych funkcií reálnej premennej s tým istým definičným oborom je určená komplexná funkcia reálnej premennej. Pretože komplexná funkcia reálnej premennej je špeciálnym prípadom komplexnej funkcie komplexnej premennej, platia pre ňu vety o limitách a spojitosti.

Ak je komplexná funkcia reálnej premennej definovaná pre veľké t, musíme si uvedomiť, že čísla $-\infty$, $+\infty$ nepatria do $\mathbb{C}_\infty$. Preto:

- symboly $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$, $\lim\limits_{|t|\to\infty} f(t)$ znamenajú to isté,
- symbol $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ znamená $\lim\limits_{t\to\infty,\, t\in\mathbb{R}^+} f(t)$,
- symbol $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t)$ znamená $\lim\limits_{t\to\infty,\, t\in\mathbb{R}^-} f(t)$.



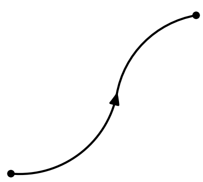
Komplexná funkcia reálnej premennej často popisuje pohyb hmotného bodu v rovine. Ak interpretujeme t ako čas, tak funkčná hodnota $f(t)$ určuje polohu hmotného bodu v čase t.

Definícia 2.4.1. Nech $z = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je spojitá komplexná funkcia reálnej premennej. Hovoríme, že funkciou f je definovaná **spojitá krivka $\boldsymbol{\gamma}$**, pričom hodnoty $f(t)$ nazývame **body krivky** γ a rovnicu $z = f(t)$ **parametrická rovnica krivky**.

V geometrii je krivka množina bodov, vlastne to, čo je grafom krivky γ (funkcie, ktorou je krivka daná). Ak je daná funkcia, potom je jednoznačne daná krivka, jej graf. Opačne, ak je daný graf nie je jednoznačne určená funkcia. Napr. funkcie $f(t) = t$, $t \in \langle -1, 1\rangle$, $g(t) = \cos t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ určujú ten istý graf, úsečku, ktorá spája body $[-1, 0]$, $[1, 0]$. Pre nás bude rozhodujúca funkcia, t.j. zobrazenie. Z tohto dôvodu je krivka definovaná ako zobrazenie, nie ako množina bodov.

Definícia 2.4.2. Spojitú krivku γ danú parametrickou rovnicou $z = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, nazývame **jednoduchá (Jordanova)**, ak pre každé $t_1 \neq t_2$, t_1, $t_2 \in (a, b)$ je $f(t_1) \neq f(t_2)$. Koncovými bodmi krivky nazývame body $A = [u(a), v(a)]$, $B = [u(b), v(b)]$. Ak $A = B$, potom krivku nazývame **jednoduchá uzavretá**.

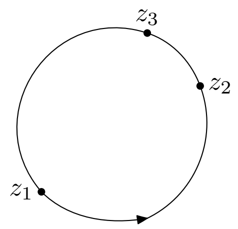
Ako sme už spomínali, pod krivkou si môžeme predstaviť dráhu pohybujúceho sa bodu. Tento bod sa môže po krivke pohybovať dvoma smermi. Ak si zvolíme jeden z dvoch možných smerov, hovoríme, že sme krivku **orientovali**. Orientáciu krivky budeme označovať šípkou na grafe tejto krivky.



Nech z_1, z_2 sú dva rôzne body na krivke γ, ktorá nie je uzavretá. Ak bod, ktorý sa pohybuje po krivke γ v smere orientácie, sa dostane najprv do bodu z_1 a až potom do bodu z_2, tak hovoríme, že **bod $\boldsymbol{z_1}$ je pred bodom $\boldsymbol{z_2}$** a zapisujeme $\boldsymbol{z_1 \prec z_2}$. Bod krivky, ktorý má tú vlastnosť, že žiaden bod krivky nie je pre ním, nazývame **začiatočný** bod krivky. Bod krivky, ktorý nie je pre žiadným bodom krivky, nazývame **koncový (posledný)** bod krivky. Je zrejmé, že pre orientáciu neuzavretej krivky stačí určiť, ktorý z jej koncových bodov je začiatočný a ktorý koncový (posledný).

V prípade uzavretej krivky namiesto dvojice bodov uvažujeme trojicu. Uzavretá krivka sa nazýva **cyklicky orientovaná**, ak je daná trojica z_1, z_2, z_3 bodov krivky usporiadaných v zmysle orientácie krivky (to znamená $z_1 \prec z_2 \prec z_3$), pričom platí:

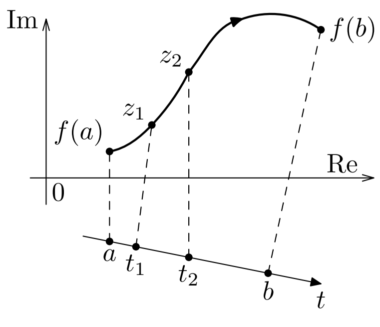
a) ak (z_1, z_2, z_3) je usporiadaná trojica bodov krivky, potom aj (z_2, z_3, z_1) je usporiadaná trojica bodov;
b) ak A, B, C sú tri navzájom rôzne body krivky, potom práve jedna trojica (A, B, C) alebo (A, C, B) je usporiadaná trojica.

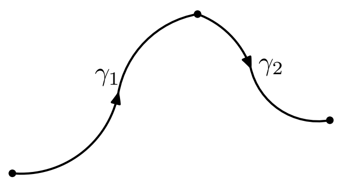


Tým, že je daná orientácia krivky, je daný smer obiehania po krivke.

Nech γ_1: $z = f_1(t)$, $t \in \langle a_1, b_1\rangle$ a γ_2: $z = f_2(t)$, $t \in \langle a_2, b_2\rangle$ sú dve neuzavreté krivky, pre ktoré platí $f_1(b_1) = f_2(a_2)$. **Orientovaným súčtom kriviek** γ_1, γ_2 v danom poradí nazývame krivku $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, ktorá je určená predpisom

$$z = \begin{cases} f_1(t), & t \in \langle a_1, b_1\rangle\,, \\ f_2(t - b_1 + a_2), & t \in \langle b_1, b_1 + b_2 - a_2\rangle\,. \end{cases}$$





Viem, že keď máme daný graf jednoduchej krivky, môžeme mu priradiť rôzne parametrické vyjadrenia. Nech

$$z = f(t),\ t \in \langle a, b\rangle$$

je parametrická rovnica jednoduchej krivky. Ak pre ľubovoľné dva body $z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$ platí

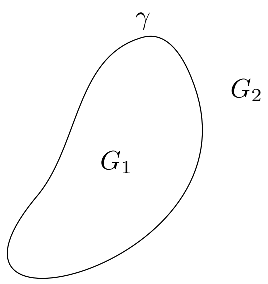
$$z_1 \prec z_2 \Leftrightarrow t_1 < t_2\ (t_1 > t_2),$$

tak hovoríme, že neuzavretá krivka je **orientovaná súhlasne (nesúhlasne) s parametrickým vyjadrením**. Napríklad, orientovanej úsečke s počiatočným bodom $[-1, 0]$, koncovým $[1, 0]$ môžeme priradiť parametrické vyjadrenie $f(t) = t$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. V tom prípade je orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. Ak zoberieme parametrickú rovnicu tejto úsečky $g(t) = \cos t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$ je orientovaná nesúhlasne s parametrickým vyjadrením.

Ak máme orientovanú jednoduchú uzavretú krivku, potom hovoríme, že krivka je **orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením**, ak pre jej tri body $z_1 = f(t_1)$, $z_2 = f(t_2)$, $z_3 = f(t_3)$ platí

$$z_1 \prec z_2 \prec z_3 \Leftrightarrow t_1 < t_2 < t_3 \text{ alebo } t_3 < t_1 < t_2 \text{ alebo } t_2 < t_3 < t_1.$$

V opačnom prípade ju nazývame **orientovaná nesúhlasne s parametrickým vyjadrením**. Opačne orientovanú krivku ku krivke γ budeme označovať γ^*. Graf krivky γ budeme označovať $[\gamma]$.



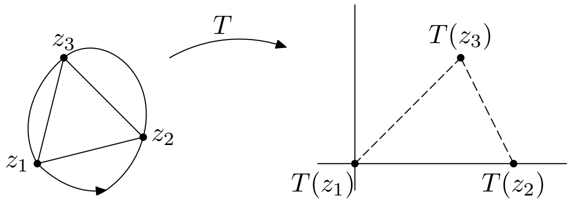
Veľmi dôležitú vlastnosť jednoduchých uzavretých kriviek dáva nasledujúca veta. Jej obsah je veľmi názorný, ale dôkaz zložitý, takže ho neuvádzame (pozri [1]).

Veta (Jordanova)**.** *Každá jednoduchá uzavretá krivka γ rozdeľuje uzavretú Gaussovu rovinu $\mathbb{C}_\infty$ na dve jednoduché oblasti G_1, G_2, t.j. $\mathbb{C}_\infty \setminus [\gamma] = G_1 \cup G_2$. Graf krivky γ je hranicou každej z týchto oblastí.*

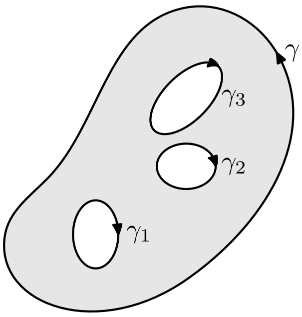
Tú z oblastí G_1, G_2, ktorá neobsahuje bod ∞, nazývame **vnútro krivky** γ a označíme $\operatorname{Int}\gamma$. Druhú oblasť, ktorá obsahuje bod ∞, nazývame **vonkajšok krivky** γ a označíme $\operatorname{Ext}\gamma$.

Pri uzavretých krivkách sa používa ešte pojem „kladne a záporne“ orientovaná krivka. Nech γ je jednoduchá orientovaná krivka a zoberme tri body z_1, z_2, $z_3 \in [\gamma]$ tak, že (z_1, z_2, z_3) je usporiadaná trojica a trojuholník s vrcholmi z_1, z_2, z_3 leží vo vnútri krivky γ. (Také tri body sa vždy dajú nájsť).

Nech pri transformácii T, zloženej z otočenia a posunutia, prejde bod z_1 do počiatku, $T(z_1) = 0$, bod z_2 do bodu $T(z_2)$, ktorý leží na kladnej reálnej osi (tým je transformácia T určená). Ak pri transformácii T prejde bod z_3 do bodu $T(z_3)$, ktorý má kladnú (zápornú) imaginárnu zložku, tak hovoríme, že krivka γ je **kladne (záporne) orientovaná**. Jednoduchšie povedané, ak pri pohybe po grafe krivky v smere orientácie máme



vnútro krivky po ľavej ruke (pohyb proti smeru hodinových ručičiek), je krivka kladne orientovaná, v opačnom prípade záporne orientovaná.



Ešte jedna poznámka, ktorá sa týka charakterizácie viacnásobne súvislej oblasti, t.j. oblasti, ktorej hranica sa skladá z viacerých kriviek. Nech γ_1, γ_2, ..., γ_n sú jednoduché uzavreté krivky také, že graf ľubovoľnej z nich leží vo vonkajšku ľubovoľnej inej a nech γ je jednoduchá uzavretá krivka, ktorej vnútro obsahuje grafy kriviek γ_1, γ_2, ..., γ_n. Množinu

$$G = \operatorname{Int}\gamma \cap \operatorname{Ext}\gamma_1 \cap \operatorname{Ext}\gamma_2 \cap \cdots \cap \operatorname{Ext}\gamma_n$$

nazývame **$(n+1)$-násobne súvislá oblasť**. Hranicu tejto oblasti tvoria grafy kriviek $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$. Hovoríme, že $(n+1)$-násobne súvislá oblasť má **kladne orientovanú hranicu**, ak krivky γ, γ_1^*, γ_2^*, ..., γ_n^* sú kladne orientované.

Pozrime sa ešte na deriváciu komplexnej funkcie reálnej premennej a dotyčnicu ku krivke.

Definícia 2.4.3. Nech funkcia $f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$ je definovaná na okolí bodu t_0. Ak existuje konečná limita

$$\lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0}{t - t_0}, \tag{2.1}$$

tak hodnotu tejto limity nazývame **derivácia** funkcie f v bode t_0 a označujeme $f'(t_0)$.

Ľahko sa ukáže pomocou viet o limitách:

Veta 2.4.4. *Komplexná funkcia reálnej premennej $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode t_0 práve vtedy, keď v bode t_0 majú konečnú deriváciu jej zložky $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$, pričom platí*

$$f'(t_0) = u'(t_0) + \mathrm{i}v'(t_0).$$

Ak zoberieme v definícii derivácie jednostranné limity, tak dostaneme jednostranné derivácie.

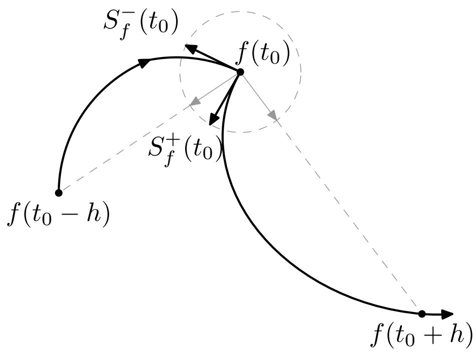
Takto po zložkách môžeme zaviesť derivácie vyšších rádov a je zrejmé, že platia vety o operáciách s deriváciami ako pri reálnej funkcii jednej premennej.

Ukážeme teraz súvis derivácie v bode t_0 komplexnej funkcie reálnej premennej f s dotyčnicou ku krivke v bode $f(t_0)$.

Nech f je krivka daná parametrickou rovnicou $z = f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, kde funkcia f je spojitá. Predpokladajme, že existuje $\delta > 0$ také, že $f(t) \neq f(t_0)$ pre $t_0 \in (t_0, t_0 + \delta)$. Potom pre ľubovoľné h, $0 < h < \delta$ má zmysel výraz

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{|f(t_0 + h) - f(t_0)|},$$

ktorý predstavuje jednotkový vektor polpriamky so začiatočným bodom $f(t_0)$ a prechádzajúcej bodom $f(t_0 + h)$.



Definícia 2.4.5. Hovoríme, že krivka f má v bode $t_0 \in \langle a, b)$ **poldotyčnicu sprava**, ak existuje konečná limita

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{|f(t_0 + h) - f(t_0)|} = S_f^+(t_0).$$

$S_f^+(t_0)$ je jednotkový smerový vektor dotyčnice sprava.

Podobne sa definuje jednotkový smerový vektor **poldotyčnice zľava** v bode $t_0 \in (a, b\rangle$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{|f(t_0 + h) - f(t_0)|} = S_f^-(t_0),$$

za predpokladu, že $f(t) \neq f(t_0)$ pre $t_0 \in (t_0 - \delta, t_0)$.

Hovoríme, že krivka f má v bode $t_0 \in (a, b)$ **dotyčnicu**, ak má v bode t_0 poldotyčnice zľava, sprava a $S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$. Číslo $S_f(t_0) = S_f^+(t_0) = -S_f^-(t_0)$ nazývame **smerový vektor dotyčnice** ku krivke f v bode t_0. Dotyčnica ku krivke f v bode t_0 je teda priamka

$$z = f(t_0) + sS_f(t_0), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Dá sa dokázať (pozri [1]).

Veta 2.4.6. *Nech $z = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ je spojitá krivka. Ak existuje nenulová derivácia $f'_+(t_0)$, resp. $f'_-(t_0)$,($f'(t_0)$), potom v bode t_0 existuje poldotyčnica sprava, resp zľava (dotyčnica) a pre smerové vektory platí*

$$S_f^+(t_0) = \frac{f'_+(t_0)}{|f'_+(t_0)|}, \quad \textit{resp.} \quad S_f^-(t_0) = \frac{f'_- t_0)}{|f'_-(t_0)|} \qquad \left(S_f(t_0) = \frac{f'(t_0)}{|f'(t_0)|}\right).$$

Existencia nenulovej derivácie $f'(t_0)$ nie je nutnou podmienkou existencie dotyčnice ku krivke f v bode t_0. Napr. krivka $f(t) = \mathrm{i} + t^3$, $t \in \langle -1, 1\rangle$ má v bode 0 dotyčnicu, pričom $S_f(0) = 1$, ale $f'(0) = 0$.

Ak funkcia f má na intervale $\langle a, b\rangle$ spojitú deriváciu (v krajných bodoch jednostranné spojité derivácie) a $f'(t) \neq 0$ pre všetky $t \in \langle a, b\rangle$, tak krivku nazývame **hladká**. Jednoduchá hladká krivka má v každom bode dotyčnicu. Jednotkový smerový vektor $S_f(t_0)$ môžeme zameniť vektorom $f'(t_0)$. Dotyčnica ku krivke v bode $z_0 = f(t_0)$ je množina bodov (komplexných čísel) tvaru

$$z = z_0 + sf'(t_0), \quad \text{resp.} \quad x = u(t_0) + su'(t_0),\ y = v(t_0) + sv'(t_0) \quad s \in \mathbb{R}.$$

Jednoduchú krivku nazývame **po častiach hladká**, ak sa dá rozdeliť na konečný počet jednoduchých hladkých kriviek.

2.5 Derivácia komplexnej funkcie komplexnej premennej

Deriváciu, diferenciál funkcie komplexnej premennej definujeme ako v reálnej analýze.

Definícia 2.5.1. Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu z_0 a nech existuje konečná limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}. \tag{2.2}$$

Hodnotu tejto limity nazývame **derivácia funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{z_0}$** a označujeme $f'(z_0)$.

Ak označíme $z_0 + h = z$, potom $f'(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$.

Definícia 2.5.2. Nech funkcia f je definovaná na nejakom okolí bodu z_0. Funkciu f nazývame **diferencovateľná v bode $\boldsymbol{z_0}$**, ak existuje číslo $A \in \mathbb{C}$ a funkcia ω spojitá v bode 0 s $\omega(0) = 0$ také, že prírastok funkcie sa dá vyjadriť v tvare

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = A \cdot h + h \cdot \omega(h). \tag{2.3}$$

Výraz $A \cdot h$ nazývame **diferenciál funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{z_0}$** a označujeme $df(z_0)$ alebo $df(z)|_{z=z_0}$.

Z definície derivácie a vlastností limít v komplexnom obore vyplýva, že vzťah medzi pojmami „funkcia má deriváciu v bode z_0“, „funkcia je spojitá v bode z_0“ a „funkcia je diferencovateľná v bode z_0“, je ten istý ako pre funkciu reálnej premennej. Uvedieme vety bez dôkazov.

Veta 2.5.3. *Ak funkcia f má deriváciu v bode z_0, potom je v tomto bode spojitá.*

Veta 2.5.4. *Funkcia f je diferencovateľná v bode z_0 práve vtedy, keď má deriváciu v bode z_0. Pritom platí $df(z_0) = f'(z_0) \cdot h$.*

Podobne, pravidlá derivovania súčtu, rozdielu, súčinu a podielu funkcií, výpočet derivácie zloženej a inverznej funkcie sú tie isté ako v diferenciálnom počte funkcie jednej premennej. Preto ich nebudemem uvádzať. Platí:

1. $c' = 0$, c - konštanta, $c \in \mathbb{C}$,
2. $(z^n)' = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$.

Príklad 2.5.5. Vypočítajte deriváciu funkcie $f(z) = \dfrac{z-1}{z^2 + (\mathrm{i}-1)z - \mathrm{i}}$.

Riešenie. Definičný obor funkcie je $\mathbb{C} - \{1, -\mathrm{i}\}$. Na tejto množine môžeme použiť vety o derivácií podielu a derivácií súčtu funkcií.

$$f'(z) = \frac{z^2 - (\mathrm{i}-1)z - \mathrm{i} - (z-1)(2z+\mathrm{i}-1)}{(z^2 + (\mathrm{i}-1)z - \mathrm{i})^2} = -\frac{(z-1)^2}{(z-1)^2(z+\mathrm{i})^2} = -\frac{1}{(z+\mathrm{i})^2}.$$

□

Príklad 2.5.6. Vyšetrite deriváciu funkcie $f(z) = z \operatorname{Re} z$.

Dôkaz. Funkcie f je definovaná a spojitá na $\mathbb{C}$. Skutočne, ak označíme $z = x + \mathrm{i}y$, tak $f(z) = z \operatorname{Re} z = x^2 + \mathrm{i}xy$ a $\operatorname{Re} f = x^2$, $\operatorname{Im} f = xy$ sú spojité funkcia na $\mathbb{R}^2$. Vyšetrime najprv deriváciu v bode $z_0 = 0$:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to 0} \frac{z \operatorname{Re} z}{z} = \lim_{z \to 0} \operatorname{Re} z = 0, \quad \text{teda} \quad f'(0) = 0.$$

Nech teraz $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \neq 0$. Potom

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \frac{x^2 - x_0^2 + \mathrm{i}(xy - x_0 y_0)}{x - x_0 + \mathrm{i}(y - y_0)}.$$

Najprv vypočítajme túto limitu ak $z \to z_0$ po priamke $y = y_0$. Dostaneme

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{z\to z_0\\ y=y_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} \frac{x^2-x_0^2+\mathrm{i}y_0(x-x_0)}{x-x_0} = \lim_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} (x+x_0)+\mathrm{i}y_0 = \\ &= x_0+x_0+\mathrm{i}y_0 = \operatorname{Re} z_0 + z_0.\end{aligned}$$

Ak teraz $z \to z_0$ po priamke $x = x_0$, tak

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ x=x_0}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{y\to y_0\\ x=x_0}} \frac{\mathrm{i}x_0(y-y_0)}{\mathrm{i}(y-y_0)} = x_0 = \operatorname{Re} z_0.$$

Pre $z_0 \neq 0$ je $\operatorname{Re} z_0 + z_0 \neq \operatorname{Re} z_0$ a tak funkcia $f(z) = z \operatorname{Re} z$ nemá deriváciu v žiadnom bode $z_0 \neq 0$. □

Z príkladu vidieť, že skutočnosť, že bod z sa môže blížiť k bodu z_0 veľmi ľubovoľne, má veľké dôsledky, ktoré nemajú analógiu v reálnej analýze. V reálnej analýze je ťažko nájsť funkciu, ktorá je všade spojitá a nemá okrem jedného bodu nikde deriváciu. V komplexnom obore platí silné tvrdenie (dokážeme neskôr), ktoré nemá analógiu v reálnej analýze.

Tvrdenie 2.5.7. *Ak funkcia f má deriváciu na nejakej oblasti, potom má na tejto oblasti spojité derivácie ľubovoľného rádu.*

Definícia 2.5.8. Funkciu f nazývame **analytická (holomorfná)** v bode z_0, ak má deriváciu v každom bode nejakého okolia bodu z_0. Ďalej hovoríme, že funkcia f je analytická na oblasti G, ak je analytická v každom bode tejto oblasti.

Odtiaľ vyplýva:

- ak je funkcia f analytická v bode z_0, tak je analytická na okolí bodu z_0;
- množina bodov, na ktorej je funkcia analytická, je otvorená množina;
- ak je funkcia analytická v bode, potom je diferencovateľná v tomto bode. Naopak to neplatí. Funkcia $f(z) = z \operatorname{Re} z$ má deriváciu v bode $z_0 = 0$, ale nie je analytická v tomto bode, pretože neexistuje okolie tohto bodu, na ktorom by mala deriváciu.

Definícia 2.5.9. Bod z_0 nazývame **regulárny (singulárny)** bod funkcie f, ak funkcia f je analytická (nie je analytická) v bode z_0.

Pozrime sa teraz na vzťah medzi deriváciou komplexnej funkcie f a parciálnymi deriváciami jej zložiek $u = \operatorname{Re} f$ a $v = \operatorname{Im} f$. Aj keď funkcie u a v majú parciálne derivácie podľa x aj y, funkcia f ešte nemusí mať deriváciu. Príkladom takej funkcie je už vyšetrovaná funkcia $f(z) = z \operatorname{Re} z = x^2 + \mathrm{i}xy$. Jej zložky $u = x^2$, $v = xy$ majú parciálne derivácie podľa x a y na celom $\mathbb{R}^2$, avšak funkcia f má deriváciu len v bode 0.

Veta 2.5.10. *Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ má deriváciu v bode $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$ práve vtedy, keď funkcie u, v spĺňajú podmienky:*

1. *u, v sú diferencovateľné funkcie v bode (x_0, y_0),*
2. *v bode (x_0, y_0) vyhovujú podmienkam:*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \tag{2.4}$$

Ak sú splnené tieto podmienky, tak pre deriváciu platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - \mathrm{i}\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.$$

Dôkaz. Nutná podmienka. Predpokladajme, že funkcia f má v bode $z_0 = (x_0, y_0)$ deriváciu, t.j existuje konečná limita

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}, \quad \text{kde} \quad h = (h_1, h_2) = h_1 + \mathrm{i}h_2.$$

Zoberme teraz limity pre $h \to 0$ najprv po reálnej osi, t.j. $h_2 = 0$ a potom po imaginárnej osi, t.j. $h_1 = 0$.
V prípade $h_2 = 0$ máme

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h_1\to 0} \frac{f(z_0+h_1) - f(z_0)}{h_1} = \\
&= \lim_{h_1\to 0} \frac{u(x_0+h_1,y_0) + \mathrm{i}v(x_0+h_1,y_0) - (u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0))}{h_1} = \\
&= \lim_{h_1\to 0} \left(\frac{u(x_0+h_1,y_0) - u(x_0,y_0)}{h_1} + \mathrm{i}\,\frac{v(x_0+h_1,y_0) - v(x_0,y_0)}{h_1} \right) = \\
&= \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Pre $h_1 = 0$ dostaneme

$$\begin{aligned}
f'(z_0) &= \lim_{h_2\to 0} \frac{f(z_0+\mathrm{i}h_2) - f(z_0)}{\mathrm{i}h_2} = \\
&= \lim_{h_2\to 0} \frac{u(x_0,y_0+h_2) + \mathrm{i}v(x_0,y_0+h_2) - (u(x_0,y_0) + \mathrm{i}v(x_0,y_0))}{\mathrm{i}h_2} = \\
&= \lim_{h_2\to 0} \left(\frac{v(x_0,y_0+h_2) - v(x_0,y_0)}{h_2} - \mathrm{i}\,\frac{u(x_0,y_0+h_2) - u(x_0,y_0)}{h_2} \right) = \\
&= \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} - \mathrm{i}\,\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Z existencie derivácie $f'(z_0)$ vyplýva existencia parciálnych derivácií obidvoch zložiek u, v funkcie f podľa obidvoch premenných. Porovnaním reálnych a imaginárnych zložiek vo vyjadreniach derivácie dostaneme rovnosti (2.4).

Potrebujeme ešte dokázať diferencovateľnosť obidvoch zložiek.

Keďže derivácia funkcie v bode existuje práve vtedy, keď je funkcia diferencovateľná v tomto bode, to znamená

$$f(z_0+h)-f(z_0)=f'(z_0)h+h\omega(h), \quad \text{kde} \quad \omega(h)\to 0=\omega(0), h\to 0 \tag{2.5}$$

Nech $h=h_1+\mathrm{i}h_2$, $f'(z_0)=a+\mathrm{i}b$, $\omega=\omega_1+\mathrm{i}\omega_2$. Rozpísaním rovnosti (2.5) po zložkách dostaneme:

$$\begin{aligned} u(x_0+h_1,y_0+h_2) &- u(x_0,y_0)=ah_1-bh_2+h_1\omega_1(h_1,h_2)-h_2\omega_2(h_1,h_2)= \\ &= ah_1-bh_2+\sqrt{h_1^2+h_2^2}\frac{h_1\omega_1(h_1,h_2)-h_2\omega_2(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} v(x_0+h_1,y_0+h_2) &- v(x_0,y_0)=bh_1+ah_2+h_2\omega_1(h_1,h_2)+h_1\omega_2(h_1,h_2)= \\ &= bh_1+ah_2+\sqrt{h_1^2+h_2^2}\frac{h_2\omega_1(h_1,h_2)+h_1\omega_2(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Označme

$$\Omega_1(h_1,h_2)=\begin{cases} \dfrac{h_1\omega_1(h_1,h_2)-h_2\omega_2(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{pre } (h_1,h_2)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{pre } (h_1,h_2)=(0,0)\,, \end{cases}$$

$$\Omega_2(h_1,h_2)=\begin{cases} \dfrac{h_2\omega_1(h_1,h_2)+h_1\omega_2(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} & \text{pre } (h_1,h_2)\neq(0,0)\,, \\ 0 & \text{pre } (h_1,h_2)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Tieto funkcie sú spojité v bode $(0,0)$ (obidva sčítance majú nulové limity, lebo sú súčinom ohraničenej funkcie a funkcie s nulovou limitou) a rovnosti (2.6), (2.7) hovoria, že funkcie u, v sú diferencovateľné v bode (x_0,y_0).

Postačujúca podmienka. Predpokladajme, že u, v sú diferencovateľné v bode (x_0,y_0) a platia podmienky (2.4). To znamená, že existujú reálne funkcie ω_1, ω_2 spojité v bode $(0,0)$, $\omega_1(0,0)=0$, $\omega_2(0,0)=0$ také, že platí

$$u(x_0+h_1,y_0+h_2)-u(x_0,y_0)=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}h_1+\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}h_2+|h|\,\omega_1(h_1,h_2)\,, \tag{2.8}$$

$$v(x_0+h_1,y_0+h_2)-v(x_0,y_0)=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}h_1+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}h_2+|h|\,\omega_2(h_1,h_2)\,, \tag{2.9}$$

kde $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2}$. Ak rovnosť (2.9) vynásobíme i, pripočítame k rovnosti (2.8) a pri úprave použijeme podmienky (2.4), dostaneme

$$f(z_0+h)-f(z_0)=\left(\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}\right)h+|h|\,\omega(h),$$

kde $\omega=\omega_1+\mathrm{i}\omega_2$ je spojitá funkcia v bode $(0,0)$ a $\omega(0,0)=0$. Z tohto vzťahu vyplýva existencia konečnej limity

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}=\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x}+\mathrm{i}\,\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}=f'(z_0).$$

□

Rovnosti (2.4) sa nazývajú **Cauchyho–Riemannove podmienky**.

Pripomeňme si poznatok z reálnej analýzy, ktorý môžeme používať na overenie diferencovateľnosti funkcií u, v. Aby funkcie u, v boli diferencovateľné v bode (x_0,y_0) stačí, aby na nejakom okolí tohto bodu existovali parciálne derivácie podľa x, y týchto funkcií a boli spojité v bode (x_0,y_0).

Príklad 2.5.11. Nájdite maximálnu oblasť, na ktorej je funkcia $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z$, $z\in\mathbb{C}$, analytická.

Riešenie. Nájdeme reálnu a imaginárnu zložku funkcie $f(z)=z\,\mathrm{Im}\,z=xy+\mathrm{i}y^2$. Funkcie $u=\mathrm{Re}\,f=xy$ a $v=\mathrm{Im}\,f=y^2$ majú spojité parciálne derivácie podľa x a y na $\mathbb{R}^2$, tak sú diferencovateľné na $\mathbb{R}^2$. Avšak Cauchyho-Riemannove podmienky (2.4)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial y}\implies y=2y\quad\text{pre}\quad y=0,\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-\frac{\partial v}{\partial x}\implies x=0,\end{aligned}$$

platia iba pre bod $(0,0)$. Z toho vyplýva, že funkcia má deriváciu iba v $z_0=0$, v žiadnom bode nie je analytická. Hodnota derivácie je $f'(0)=\dfrac{\partial u(0,0)}{\partial x}+\mathrm{i}\dfrac{\partial v(0,0)}{\partial y}=0+\mathrm{i}0=0$. □

2.5.1 Harmonické funkcie

Nech funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je analytická na oblasti G. Potom funkcie u, v majú parciálne derivácie podľa x aj y. Predpokladajme, že funkcie u, v majú spojité parciálne derivácie druhého rádu na oblasti G. Z reálnej analýzy vieme, že potom je poradie derivácií zámenné, t.j.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \tag{2.10}$$

Derivovaním Cauchyho-Riemannových rovností (2.4) dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

Sčítaním týchto rovností vzhľadom na (2.10) plynie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Podobne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Obidve funkcie u, v vyhovujú tej istej rovnici

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \tag{2.11}$$

ktorú nazývame **Laplaceova diferenciálna rovnica**, kde Δ je Laplaceov operátor.

Definícia 2.5.12. Reálnu funkciu $\Phi(x, y)$ dvoch premenných nazývame **harmonická na oblasti** G, ak má na tejto oblasti spojité parciálne derivácie druhého rádu a vyhovuje na G Laplaceovej diferenciálnej rovnici (2.11).

Definícia 2.5.13. Harmonické funkcie Φ, Ψ dvoch premenných nazývame **harmonicky združené na oblasti** G, ak na tejto oblasti spĺňajú Cauchyho–Riemannove podmienky (2.4).

Nasledujúca veta dáva nutnú a postačujúcu podmienku diferencovateľnosti funkcie f na oblasti.

Veta 2.5.14. *Komplexná funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je diferencovateľná na oblasti G práve vtedy, keď jej reálna a imaginárna zložka sú harmonicky združené funkcie.*

Dôkaz. Nutná podmienka. Ak f je diferencovateľná na oblasti G, potom funkcie u, v spĺňajú Cauchyho–Riemannove podmienky (2.4). Podľa Tvrdenia 2.5.7 má funkcia f spojité derivácie ľubovoľného rádu, a tak parciálne derivácie ľubovoľného rádu funkcií u, v sú spojité. To znamená, že funkcie u, v sú harmonicky združené.

Postačujúca podmienka. Ak funkcie u, v sú harmonicky združené na oblasti G, potom vyhovujú Cauchyho–Riemannovým podmienkam (2.4) a majú spojité parciálne derivácie druhého rádu na oblasti G, čo znamená, že funkcie u, v sú diferencovateľné na oblasti G. Podľa Vety 2.5.10 je funkcia f diferencovateľná na oblasti G. □

Poznámka. Ak poznáme reálnu alebo imaginárnu časť analytickej funkcie f, tak vieme až na konštantu určiť druhú zložku tejto komplexnej funkcie.

Príklad 2.5.15. Zistite, či nasledujúce funkcie môžu byť reálnou zložkou analytickej funkcie na $\mathbb{C}$. V prípade kladnej odpovede nájdite túto funkciu.

a) $u = \operatorname{Re} f = x^2$; b) $u = \operatorname{Re} f = y^3 - 3x^2y$.

Riešenie.

a) Funkcia u má spojité parciálne derivácie druhého rádu na $\mathbb{R}^2$, lebo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 \neq 0.$$

Funkcia u nespĺňa Laplaceovu rovnicu, nie je harmonická a nemôže byť reálnou zložkou analytickej funkcie.

b) Funkcia u má spojité parciálne derivácie druhého rádu na $\mathbb{R}^2$. Pozrime sa, či vyhovuje Laplaceovej rovnici. Vypočítame prvé parciálne derivácie

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -6xy, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 - 3x^2,$$

potom druhé parciálne derivácie

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -6y\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6y + 6y = 0.$$

Funkcia u vyhovuje Laplaceovej rovnici, je harmonická, a tak môže byť reálnou zložkou analytickej funkcie na $\mathbb{C}$. Funkciu v nájdeme pomocou Cauchyho–Riemannových podmienok:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6xy, \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -3y^2 + 3x^2. \tag{2.13}$$

Integrovaním prvej rovnice (2.12) dostaneme

$$v(x,y) = -\int 6xy\mathrm{d}y = -3xy^2 + g(x), \tag{2.14}$$

kde g je nejaká diferencovateľná funkcia na $\mathbb{R}$. Po dosadení do druhej rovnice (2.13) máme

$$-3y^2 + g'(x) = -3y^2 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad g(x) = x^3 + K,$$

$K \in \mathbb{C}$. Po dosadení do (2.14) je

$$v(x,y) = -3xy^2 + x^3 + K$$

a komplexná funkcia f

$$f(z) = y^3 - 3x^2y + \mathrm{i}(-3xy^2 + x^3 + K) = \mathrm{i}(x + \mathrm{i}y)^3 + \mathrm{i}K = \mathrm{i}(z^3 + K).$$

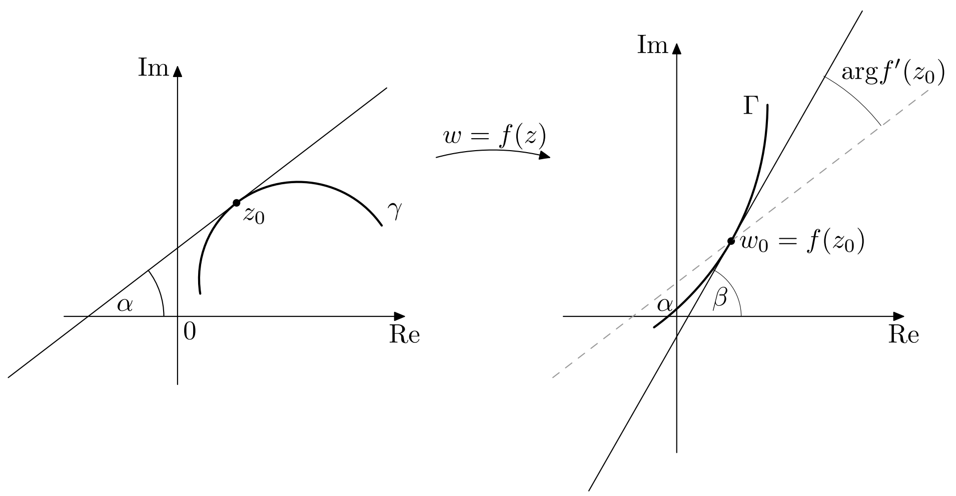
□

2.5.2 Geometrický význam derivácie

Predpokladajme, že funkcia f je analytická v bode z_0 a $f'(z_0) \neq 0$. Deriváciu môžeme písať v tvare

$$f'(z_0) = |f'(z_0)|\, e^{\mathrm{i}\alpha}, \quad \text{kde} \quad \alpha = \arg z_0.$$

Zoberme krivku γ: $z = \gamma(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$ takú, že z_0 je bodom krivky γ, t.j. $z_0 = \gamma(t_0)$, $t_0 \in (a,b)$ a $\gamma'(t_0) \neq 0$. Potom existuje dotyčnica ku krivke γ v bode t_0. Smerový vektor dotyčnice je $\gamma'(t_0)$ a $\alpha = \arg \gamma'(t_0)$ je uhol dotyčnice s kladným smerom reálnej osi.



Funkcia $w = f(z)$ priradí bodu z_0 bod $w_0 = f(z_0)$ a krivke γ krivku Γ: $\Gamma(t) = f(\gamma(t))$, $t \in \langle a, b\rangle$ a $\Gamma(t_0) = f(\gamma(t_0)) = f(z_0) = w_0$. Podľa vety o derivovaní zloženej funkcie dostaneme

$$\Gamma'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0) \neq 0. \tag{2.15}$$

Ako vieme, $\Gamma'(t_0)$ predstavuje smerový vektor dotyčnice ku krivke Γ v bode t_0. Uhol $\beta = \arg \Gamma'(t_0)$ udáva odchýlku smerového vektora dotyčnice od kladnej reálnej poloosi. Zo vzťahu (2.15) máme

$$\beta = \arg f'(z_0) + \alpha\,(-2k\pi),\ k \text{ je vhodné celé číslo} \quad \Rightarrow \quad \arg f'(z_0) = \beta - \alpha + 2k\pi$$

(k volíme tak, aby $\beta \in (-\pi, \pi\rangle$). Tým je daný geometrický význam hlavnej hodnoty argumentu nenulovej derivácie funkcie f.

Číslo $\boldsymbol{\arg f'(z_0)}$ udáva **veľkosť uhla otočenia**, o ktorý sa otočí dotyčnica ku krivke v bode z_0 pri zobrazení f (na výbere krivky nezáleží). Uhol pritom uvažujeme orientovaný, t.j. ak $\arg f'(z_0) > 0$, tak otočenie je proti smeru pohybu hodinových ručičiek, ak $\arg f'(z_0) < 0$, tak v smere tohto pohybu. Preto zobrazenie $w = f(z)$, ak f je analytická funkcia v bode z_0 a $f'(z_0) \neq 0$, zachováva uhly medzi krivkami prechádzajúcimi bodom z_0, čo do veľkosti aj orientácie.

Definícia 2.5.16. Zobrazenie sprostredkované spojitou komplexnou funkciou f sa nazýva **konformné v bode $\boldsymbol{z_0}$**, ak uhol ľubovoľných dvoch kriviek v bode z_0 sa rovná, čo do veľkosti a orientácie, uhlu ich obrazov v bode $f(z_0)$. Ak je zobrazenie f konformné v každom bode oblasti D, tak hovoríme, že je konformné na oblasti D.

Z predchádzajúcich úvah vyplýva:

Veta 2.5.17. *Nech funkcia f je diferencovateľná v bode z_0. Ak $f'(z_0) \neq 0$, potom je zobrazenie f konformné.*

Príklad 2.5.18. V ktorých bodoch je zobrazenie $f(z) = z^2$ konformné?

Riešenie. Pre deriváciu funkcie $f'(z) = 2z$ máme, že v každom bode $z \neq 0$ je $f'(z) \neq 0$, teda je splnená postačujúca podmienka pre konformnosť zobrazenia f. V bode $z = 0$ nie je zobrazenie f konformné. Zoberme dve krivky $\gamma_1(t) = te^{i\alpha}$, $\gamma_2(t) = te^{i\beta}$, $t \in \langle 0, 1\rangle$, $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, ktoré vychádzajú z bodu $z = 0$ a zvierajú uhol $\beta - \alpha$. Pri zobrazení f prejdú na krivky

$$\gamma_1 \to \Gamma_1(t) = t^2te^{2i\alpha}, \qquad \gamma_2 \to \Gamma_2(t) = t^2e^{2i\beta},$$

ktoré zvierajú uhol $2(\beta - \alpha)$. $\square$

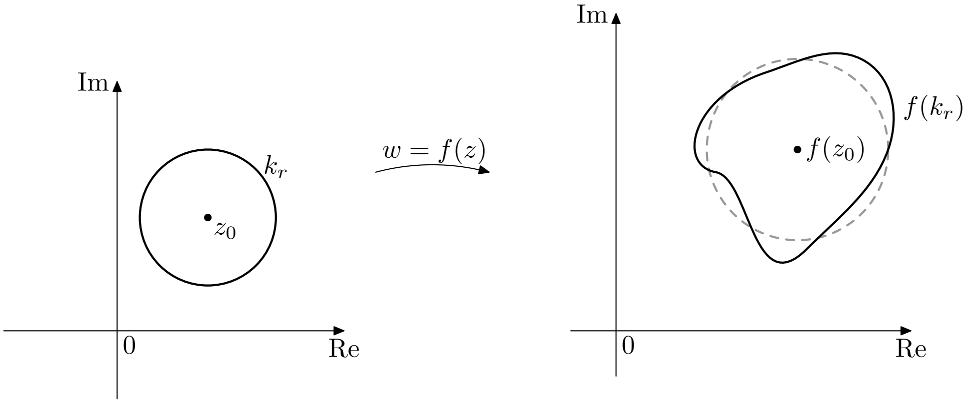
Pozrime sa ešte na geometrický význam absolútnej hodnoty $|f'(z_0)| \neq 0$. Vieme, že

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Ak z je blízko z_0 je

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0| \,.$$

Posledná rovnosť hovorí, že vzdialenosť obrazov $f(z)$, $f(z_0)$ sa rovná $|f'(z_0)|$-násobku vzdialenosti bodov z a z_0. Číslo $\boldsymbol{k = |f'(z_0)|}$ sa nazýva **koeficient rozťažnosti** alebo **lokálna deformácia** v bode z_0 pri zobrazení f. Nech $|z - z_0| = r$ je kružnica k_r s malým polomerom r a nech $f(k_r)$ je jej obraz pri zobrazení $w = f(z)$. Potom sa množina $f(k_r)$ málo líši od kružnice $|w - f(z_0)| = |f'(z_0)| \cdot r$, ktorej polomer je $|f'(z_0)|$-krát väčší ako polomer kružnice k_r.



2.6 Elemenárne funkcie komplexnej premennej

Poznáme už mocninovú funkciu $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Je definovaná, spojitá, analytická na $\mathbb{C}$ a $f'(z) = nz^n$. Pomocou nej a základných viet o operáciách so spojitými a analytickými funkciami, vieme zaviesť funkcie:

- polynomickú $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, $a_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$, ktorá je definovaná, spojitá, analytická na $\mathbb{C}$;
- racionálnu $f(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}$, kde Q, P sú polynomické funkcie. Je definovaná, spojitá a analytická na $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$;
- n–tá odmocnina, ako inverzná funkcia k mocninovej funkcii

$$\sqrt[n]{z} = \{w, w \in \mathbb{C} : \, w^n = z\}$$

je definovaná na $\mathbb{C}$. Množinu $\sqrt[n]{z}$ nazývame n–tou odmocninou čísla z a jej prvky sú hodnoty n–tej odmocniny čísla z. Je n–značnou funkciou. Pre každé $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ existuje práve n rôznych hodnôt $w_k = (\sqrt[n]{z})_k$ $(k = 1, \dots, n)$ n–tej odmocniny čísla z, ktoré sa dajú vyjadriť napríklad takto:

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} e^{\mathrm{i}\left(\arg z + (k-1)\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

pričom $\sqrt[n]{0} = 0$ a $\sqrt[n]{\infty} = \infty$. Vieme, že pre $n > 2$ môžeme geometricky interpretovať hodnoty n–tej odmocniny ako vrcholy pravidelného n–uholníka so stredom v počiatku. Pokiaľ v nejakej oblasti existuje jednoznačná vetva φ_k inverznej funkcie k funkcii $f(z) = z^n$, tak je analytická a platí

$$\varphi_k'(z) = \frac{1}{f'(\varphi_k(z))} = \frac{1}{n(\varphi_k(z))^{n-1}}.$$

2.6.1 Exponenciálna funkcia

Definícia 2.6.1. Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ definujeme **exponenciálnu funkciu** (označujeme e^z alebo $\exp z$) predpisom

$$\mathrm{e}^z = \exp z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y),$$

e^x tu značí reálnu funkciu.

Pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos 0 + \mathrm{i} \sin 0) = \mathrm{e}^x$, t.j. na množine reálnych čísel je totožná s reálnou exponenciálnou funkciou. Má vlastnosti:

Veta 2.6.2.

1. *Exponenciálna funkcia nenadobúda hodnotu* 0*, t.j.* $\mathrm{e}^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *pre každé* $z \in \mathbb{C}$ *(ak by sme pracovali v* $\mathbb{C}_\infty$ *tak nenadobúda ani hodnotu* ∞*).*
2. *Pre každé dva body* z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ *platí* $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2}$.
3. *Funkcia* e^z *je jednoznačná, spojitá na* $\mathbb{C}$.
4. *Neexistuje* $\lim\limits_{z \to \infty} \mathrm{e}^z$.
5. *Je analytická funkcia na* $\mathbb{C}$ *a pre každé* $z \in \mathbb{C}$ *a* $n \in \mathbb{N}$ *platí*

$$\frac{\mathrm{d}^n \mathrm{e}^z}{\mathrm{d}z^n} = \mathrm{e}^z.$$

6. $\mathrm{e}^z = 1$ *práve vtedy, keď* $z = 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.
7. $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ *práve vtedy, keď* $z_1 = z_2 + 2k\pi\mathrm{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

8. *Exponenciálna funkcia je periodická s periódou* $2\pi\mathrm{i}$. *To znamená, že pre každé* $z \in \mathbb{C}$ *je* $\mathrm{e}^{z+2\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^z$.

Dôkaz.

1) Pre každé $z \in \mathbb{C}$ je $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x \neq 0$.

2) Nech $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, potom

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{z_1+z_2} &= \mathrm{e}^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + \mathrm{i}\sin(y_1+y_2)) = \\
&= \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_1}\left(\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + \mathrm{i}\left(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2\right)\right) = \\
&= \mathrm{e}^{x_1}\mathrm{e}^{x_1}(\cos y_1 + \mathrm{i}\sin y_1)(\cos y_2 + \mathrm{i}\sin y_2) = \mathrm{e}^{z_1}\mathrm{e}^{z_2}.
\end{aligned}$$

3) Vyplýva z toho, že jej zložky $u = \operatorname{Re}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\cos y$, $v = \operatorname{Im}\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \sin y$ sú spojité funkcie na $\mathbb{R}^2$.

4) Bod ∞ je hromadným bodom množín
$A_1 = \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re}\ z > 0\}$, $A_2 = \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re}\ z < 0\}$. Potom

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in A_1}} \mathrm{e}^z = \lim_{x\to\infty} \mathrm{e}^x = \infty, \qquad \lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in A_2}} \mathrm{e}^z = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

To znamená, že neexistuje $\lim\limits_{z\to\infty} \mathrm{e}^z$.

5) Jej zložky u, v sú diferencovateľné na $\mathbb{R}^2$ a

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \mathrm{e}^x \sin y, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \mathrm{e}^x \cos y.$$

Vidíme, že platia Cauchyho–Riemannove podmienky. Potom

$$(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^x \cos y + \mathrm{i}\mathrm{e}^x \sin y = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = \mathrm{e}^z,$$

má deriváciu v každom $z \in \mathbb{C}$. Indukciou sa ukáže, že má deriváciu ľubovoľného rádu a $(\mathrm{e}^z)^{(n)} = \mathrm{e}^z$.

6) Nutná podmienka. Ak $z = 2k\pi\mathrm{i}$, potom $\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}} = \cos 2k\pi + \mathrm{i}\sin 2k\pi = 1$.
Postačujúca podmienka. Nech $\mathrm{e}^z = 1$, t.j. $\mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y) = 1$. To znamená, že

$$\mathrm{e}^x \cos y = 1 \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^x \sin y = 0.$$

Keďže $\mathrm{e}^x > 0$ pre každé $x \in \mathbb{R}$, tak z prvej rovnice vyplýva, že $\cos y > 0$ a z druhej rovnice $\sin y = 0$. To nastáva práve vtedy, ak $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Z prvej rovnice potom máme $\mathrm{e}^x = 1$ a to je práve vtedy, ak $x = 0$. Z toho dostávame, že $z = 2k\pi\mathrm{i}$.

7) Vyplýva z predchádzajúcej vlastnosti

$$e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{z_1} \cdot e^{-z_2} = 1 \Leftrightarrow e^{z_1 - z_2} = 1 \Leftrightarrow z_1 - z_2 = 2k\pi \mathrm{i},\ k \in \mathbb{Z}.$$

8) Pre každé $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ platí

$$e^{z+2\pi \mathrm{i}} = e^x \left[\cos(y + 2\pi) + \mathrm{i}\sin(y + 2\pi)\right] = e^x \left(\cos y + \mathrm{i}\sin y\right) = e^z.$$

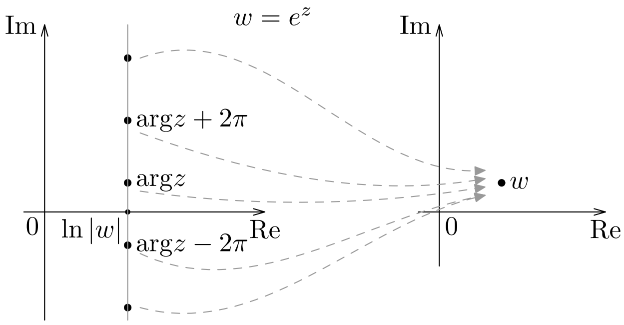
□

Geometrický pohľad na exponenciálnu funkciu.

a) Obrazom Gaussovej roviny $\mathbb{C}$ pri zobrazeni exponenciálnou funkciou $w = e^z$ je celá komplexná rovina W s výnimkou počiatku. Viem, že pre každé $z \in \mathbb{C}$ je $e^z \neq 0$. Chceme ukázať, že pre každé $w \in W$, $w \neq 0$ existuje $z \in \mathbb{C}$ také, že $e^z = w$.
Ak označíme $z = x + \mathrm{i}y$, tak w by malo byť vyjadrené v tvare $w = e^x\, e^{\mathrm{i}y}$. To znamená, že

$$|w| = e^x, \quad y \in \operatorname{Arg} w \quad \Rightarrow \quad x = \ln|w|\,.$$

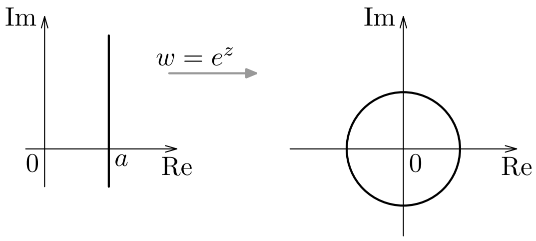
Pre každé komplexné číslo w sme tak našli komplexné číslo $z = \ln|w| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} w$ také, že $e^z = w$. Vzhľadom na mnohoznačnosť argumentu existuje nekonečne veľa hodnôt z, ktoré sa zobrazia do w. Komplexné čísla, ktoré sa zobrazia do zadaného w ležia na priamke rovnobežnej s imaginárnou osou vzdialenej od nej o $\ln|w|$.



b) Exponenciálna funkcia zobrazí priamku $z = a + \mathrm{i}t$, $t \in \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$ je konštanta (priamka rovnobežná s imaginárnou osou)

$$e^z = e^a(\cos t + \mathrm{i}\sin t)$$

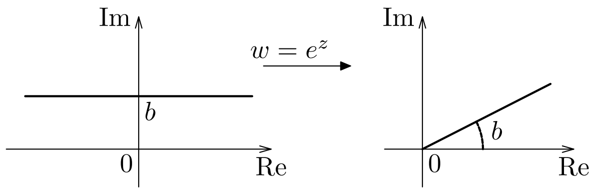
do kružnice so stredom v počiatku a polomerom e^a. Je to nekonečne krát obiehaná kružnica. Akákoľvek úsečka dĺžky 2π na tejto priamke sa zobrazí do raz obehnutej kružnice.



c) Exponenciálna funkcia zobrazí priamku $z = t + \mathrm{i}b$, $t \in \mathbb{R}$, kde $b \in \mathbb{R}$ je konštanta (priamka rovnobežná s reálnou osou)

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^t(\cos b + \mathrm{i}\sin b)$$

na polpriamku vychádzajúcu z počiatku, ktorá zviera uhol b s kladnou časťou reálnej osi.



d) Exponenciálna funkcia je pre každé $y_0 \in \mathbb{R}$ prostá a jedno–jednoznačná v každom páse P_k rovnobežnom s reálnou osou

$$P_k = \{z,\ z \in \mathbb{C}, y_0 + 2k\pi < \operatorname{Im} z \le y_0 + 2(k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ak zoberieme ľubovoľné dva body $z_1 \neq z_2$ z tohto pásu, tak $|\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| < 2\pi$. Preto $z_1 - z_2 \neq 2\pi\mathrm{i}$ a $\mathrm{e}^{z_1} \neq \mathrm{e}^{z_2}$.

2.6.2 Logaritmická funkcia

Definícia 2.6.3. Logaritmickú funkciu (označujeme Lg alebo Ln) definujeme ako inverznú funkciu k exponenciálnej funkcii.

Z definície vyplýva, že definičným oborom logaritmickej funkcie je množina nenulových komplexných čísel a oborom hodnôt je $\mathbb{C}$. Teda pre každé $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ platí

$$\operatorname{Lg} z = \{w \in \mathbb{C} :\ z = \mathrm{e}^w\}.$$

Množinu $\operatorname{Lg} z$ nazývame **logaritmus komplexného čísla z** a jej prvky **hodnoty logaritmu čísla z**. Z periodičnosti exponenciálnej funkcie vyplýva, že ak $w_0 \in \operatorname{Lg} z$, tak

$$\operatorname{Lg} z = \{w \in \mathbb{C} :\ w = w_0 + 2l\pi\mathrm{i},\ l \in \mathbb{Z}\} \tag{2.16}$$

To znamená, že v každom bode definičného oboru má logaritmická funkcia nekonečne veľa hodnôt, ktoré sa líšia celočíselnými násobkami $2\pi\mathrm{i}$. V literatúre sa bežne používa zápis logaritmickej funkcie iba $w = \operatorname{Lg} z$, ktorý znamená, že nenulovému číslu z je priradený logaritmus, t.j. množina tých čísel, pre ktoré $z = \mathrm{e}^w$.

Ak $w_0 \in \operatorname{Lg} z$, $z \neq 0$, tak platí

$$z = \mathrm{e}^{w_0} \quad \text{odkiaľ} \quad |z| = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} w_0} \quad \text{a} \quad \operatorname{Im} w_0 \in \operatorname{Arg} z.$$

Na obidvoch stranách prvej rovnosti sú kladné reálne výrazy, a tak

$\operatorname{Re} w_0 = \ln |z|$

(tu symbol ln je reálny logaritmus) a z definície $\operatorname{Arg} z$ vyplýva, že

existuje $m \in \mathbb{Z}$ také, že platí $\operatorname{Im} w_0 = \arg z + 2m\pi$.

Zo vzťahu (2.16) potom dostávame

$$w = w_0 + 2l\pi\mathrm{i} = \ln |z| + \mathrm{i}(\arg z + 2m\pi) + 2l\pi\mathrm{i} = \ln |z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i},$$

kde $k = m + l \in \mathbb{Z}$. To znamená, že logaritmus ľubovoľného nenulového čísla $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ môžeme zapísať v tvare

$$\operatorname{Lg} z = \ln |z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{Lg} z = \ln |z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z. \tag{2.17}$$

Poznámka. Tento zápis je skrátený zapis, ktorý vyjadruje rovnosť dvoch množín. S týmto spôsobom zápisu sme sa už stretli pri funkcii argumentu a takto budeme v ďalšom chápať všetky rovnosti, v ktorých budú viacznačné funkcie.

Známe vlastnosti logaritmu z reálnej analýzy platia aj v komplexnom prípade.

Veta 2.6.4. *Pre ľubovoľné* z_1, $z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *platí:*

a) *ak* $z_1 \neq z_2$, *tak* $\operatorname{Lg} z_1 \neq \operatorname{Lg} z_2$;

b) $\operatorname{Lg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Lg} z_1 + \operatorname{Lg} z_2$;

c) $\operatorname{Lg} \dfrac{z_1}{z_2} = \operatorname{Lg} z_1 - \operatorname{Lg} z_2$;

d) $\operatorname{Lg} z_1^n = n\operatorname{Lg} z_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Dôkaz. a) Stačí si vedomiť, že pre $z_1 \neq z_2$ je buď $|z_1| \neq |z_2|$ alebo $\operatorname{Arg} z_1 \cap \operatorname{Arg} z_2 = \varnothing$. Z toho vyplýva, že $\operatorname{Lg} z_1 \cap \operatorname{Lg} z_2 = \varnothing$, čo v zmysle poznámky znamená, že $\operatorname{Lg} z_1 \neq \operatorname{Lg} z_2$.

b) $\operatorname{Lg}(z_1 \cdot z_2)$ máme chápať, v zmysle poznámky, ako množinu

$$\operatorname{Lg}(z_1 \cdot z_2) = \{w \in \mathbb{C} : w = w_1 + w_2, \text{kde}\, w_1 \in \operatorname{Lg} z_1,\ w_2 \in \operatorname{Lg} z_2\}.$$

Takže, vzhľadom na vlastnosti reálneho logaritmu a argumentu máme

$$\begin{aligned}\operatorname{Lg}(z_1 \cdot z_2) &= \ln|z_1 \cdot z_2| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Lg} z_1 + \operatorname{Lg} z_2.\end{aligned}$$

Zvyšné vlastnosti sa dokážu analogicky pomocou vlastností reálneho logaritmu a argumentu komplexného čísla. □

Ak vo vzťahu (2.17) zoberieme hlavnú hodnotu argumentu dostaneme **hlavnú hodnotu logaritmu** (označujeme lg). Teda pre $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hlavná hodnota logaritmu

$$\lg z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z.$$

Príklad 2.6.5. Vypočítajte: a) $\operatorname{Lg}(-3)$; b) $\lg \mathrm{i}$; c) $\operatorname{Lg}(1-\mathrm{i})$.

Riešenie.

a) $\operatorname{Lg}(-3) = \ln|-3| + \mathrm{i}\operatorname{Arg}(-3) = \ln 3 + \mathrm{i}(\pi + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$;
hlavná hodnota $\lg(-3) = \ln 3 + \mathrm{i}\pi$;

b) $\lg \mathrm{i} = \ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(\mathrm{i}) = 0 + \mathrm{i}\frac{\pi}{2}$;

c) Pretože $|1-\mathrm{i}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\arg(1-\mathrm{i}) = -\frac{\pi}{4}$ je
$\operatorname{Lg}(1-\mathrm{i}) = \ln\sqrt{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. □

Hlavná hodnota logaritmu $w = \lg z$ je vzájomne jednoznačná funkcia na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Na množine kladných reálnych čísel je totožná s reálnou funkciou prirodzený logaritmus, pretože pre $z = x \in \mathbb{R}$, $z > 0$ platí $\arg z = 0$, $|z| = z$. Reálna a imaginárna zložka hlavnej hodnoty logaritmu sú

$$u = \operatorname{Re}\lg z = \ln|z|, \quad v = \operatorname{Im}\lg z = \arg z.$$

Vzhľadom na spojitosť funkcií u, v je hlavná hodnota logaritmu spojitá funkcia na množine $\mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0 \wedge \operatorname{Re} z \leq 0\}$, t.j. na Gaussovej rovine s vyrezanou nekladnou časťou reálnej osi. To znamená, že logaritmus je definovaný pre záporné reálne čísla, ale nie je v nich spojitý. Na tejto oblasti je hlavná vetva analytická a podľa vety o derivácií inverznej funkcie

$$\lg' z = \frac{1}{[(\mathrm{e}^{w})']_{w=\lg z}} = \frac{1}{[\mathrm{e}^{w}]_{w=\lg z}} = \frac{1}{z}.$$

Vieme, že exponenciálna funkcia zobrazí každý pás

$$P_k = \{z \in \mathbb{C} :\ (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leq (2k+1)\pi\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

jednoznačne na $\mathbb{C}\setminus\{0\}$. Zoberme teraz k nej inverznú funkciu logaritmickú. Ak komplexnú rovinu W rozdelíme na pásy P_k, tak v tomto páse bude ležať len jedna hodnota logaritmu čísla z. Hlavná vetva logaritmu zobrazí jedno–jednoznačne $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ do pásu P_0.

Pre každé $k \in \mathbb{Z}$ existuje vetva logaritmu, ktorá zobrazujú jednoznačne $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ do pásu P_k, nazýva sa ***k*–ta vetva logaritmu** a označuje sa Lg_k. Jednotlivé vetvy logaritmu sú jedno–jednoznačné funkcie.

2.6.3 Všeobecná mocninová a všeobecná exponenciálna funkcia

Z funkcie reálnej premennej vieme, že mocnina s reálnym exponentom α sa dá vyjadriť v tvare

$$x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}, \quad x > 0.$$

Pomocou tejto rovnosti definujeme mocninovú funkciu komplexnej premennej.

Definícia 2.6.6. Nech $\alpha \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné číslo. Pre $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ funkciu **α–tá všeobecná mocnina** definujeme predpisom

$$z^\alpha = \{w \in \mathbb{C} : w = \mathrm{e}^{\alpha s},\ \text{kde}\, s \in \mathrm{Lg}\, z\}.$$

Každý prvok z množiny z^α nazývame **hodnota α–tej mocniny čísla z**. Pre $\alpha \in \mathbb{R}$ je táto funkcia na kladnej reálnej osi totožná s reálnou funkciou x^α.

Vzhľadom na poznámku o zápise viacznačných funkcií môžeme písať

$$z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{Lg}\, z}.$$

Na základe vlastností exponenciálnej funkcie sa dá ukázať, že funkcia α–tá všeobecná mocnina má vlastnosti:

- je jednoznačná práve vtedy, keď α je celé číslo;
- je n–značná práve vtedy, keď α je racionálne číslo, $\alpha = \frac{m}{n}$, m, n nesúdeliteľné celé čísla, $n > 0$;
- je nekonečnoznačná práve vtedy, keď nenastali predchádzajúce prípady.

Ak zoberieme hlavnú hodnotu logaritmu, dostaneme jednoznačnú funkciu **hlavnú hodnotu α–tej všeobecnej mocniny** $z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\, \mathrm{lg}\, z}$. Ak $\alpha \in \mathbb{R}$, tak táto funkcia na množine kladných reálnych čísel je rovná reálnej mocninovej funkcii.

Definícia 2.6.7. Nech $a \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné nenulové číslo. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme všeobecnú exponenciálnu funkciu predpisom

$$a^z = \{w \in \mathbb{C} : w = \mathrm{e}^{zs},\ \text{kde}\, s \in \mathrm{Lg}\, a\}, \quad \text{resp.} \quad a^z = \mathrm{e}^{z\, \mathrm{Lg}\, a}$$

Táto funkcia je zaujímavá tým, že na množine celých čísel je jednoznačná, na niektorých množinách n–značná a existuje množina, na ktorej je nekonečnoznačná.

Príklad 2.6.8. Vypočítajte: a) i^{i}; b) hlavnú hodnotu $\sqrt[3]{-1}$.

Riešenie.
a) $\mathrm{i}^{\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Lg}\,\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\ln 1 + \mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\right)} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$
b) $\sqrt[3]{-1} = (-1)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\lg(-1)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln 1+\mathrm{i}\pi)} = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$
Ak by sme zobrali nie hlavnú vetvu logaritmu dostaneme
$\sqrt[3]{-1} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\mathrm{Lg}(-1)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}(\ln 1+\mathrm{i}(\pi+2k\pi)} = \mathrm{e}^{\frac{(2k+1)\pi \mathrm{i}}{3}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{(2k+1)\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}.$
Z periodičnosti funkcií sínus a kosínus dostáveme tri rôzne hodnoty $\sqrt[3]{-1}$, a to : $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$, -1, $\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ pre $k = 0,\ 1,\ 2$.

Porovnajte s definíciou n–tej odmocniny v kapitole 1.1 prípad 10. □

2.6.4 Goniometrické funkcie

Definícia 2.6.9. Funkcie kosínus a sínus definujeme pre každé $z \in \mathbb{C}$ predpisom

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}, \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2}.$$

Pre $z = x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} = \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x - (\cos(-x) + \mathrm{i}\sin(-x))}{2\mathrm{i}} = \sin x,$$

čo znamená, že pre reálne čísla je funkcia sínus totožná s reálnou funkciou. Analogicky to platí aj pre funkciu kosínus. Ľahko sa ukážu, pomocou vlastností exponenciálnej funkcie, nasledujúce vlastnosti funkcií sínus a kosínus:

1. $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$ pre každé $z \in \mathbb{C}$.
2. Nulové body sú totožné s nulovými bodmi reálnych funkcií, t.j. $\sin z = 0$ práve vtedy, keď $z = k\pi$; $\cos z = 0$ práve vtedy, keď $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. Sú periodické funkcie s periódou 2π.
4. Sú jednoznačné, spojité funkcie na $\mathbb{C}$.
5. Sú analytické funkcie na $\mathbb{C}$ a pre každé $z \in \mathbb{C}$ platí

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

6. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ platia Eulerove vzorce pre komplexný argument

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z, \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z.$$

7. Platia všetky súčtové vzorce ako v reálnej analýze. Na rozdiel od reálnej analýzy zo vzťahu $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$ nevyplýva ohraničenosť $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$. Komplexné funkcie **sínus a kosínus sú neohraničené funkcie**. Toto tvrdenie dokážeme neskôr. Ako ilustráciu vypočítajme $\cos \mathrm{i}$.

$$\cos \mathrm{i} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{i}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{i}}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{1}}{2} = \frac{e}{2} + \frac{1}{2e} > \frac{e}{2} > 1.$$

Poznámka. Funkcie tangens a kotangens sú definované ako v reálnej analýze

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ z \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ z \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2.6.5 Hyperbolické funkcie

Definícia 2.6.10. Pre každé $z \in \mathbb{C}$ definujeme **hyperbolický sínus** a **hyperbolický kosínus** predpisom

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

Vzhľadom na definície funkcií sínus a kosínus platí v každom $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \sinh z &= -\mathrm{i} \sin \mathrm{i}z, & \sin z &= -\mathrm{i} \sinh \mathrm{i}z \\ \cosh z &= \cos \mathrm{i}z, & \cos z &= \cosh \mathrm{i}z \\ (\sinh z)' &= \cosh z & (\cosh z)' &= \sinh z \end{aligned}$$

Funkcie hyperbolický tangens a kotangens sú definované ako v reálnej analýze

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad \operatorname{cotgh} z = \frac{\cosh z}{\sinh z}.$$

2.6.6 Cyklometrické funkcie

Cyklometrické funkcie sú inverzné funkcie ku goniometrickým.

Definícia 2.6.11. Cyklometrické funkcie arkussínus, arkuskosínus, arkustangens, arkuskotangens sú definované pre $z \in \mathbb{C}$ takto:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \sin w = z\}, \\ \operatorname{Arccos} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \cos w = z\}, \\ \operatorname{Arctg} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{tg} w = z\}, \\ \operatorname{Arccotg} z &= \{w \in \mathbb{C} :\ \operatorname{cotg} w = z\}. \end{aligned}$$

Množinu $\operatorname{Arcsin} z$ nazývame **arkussínus komplexného čísla z** a jej prvky **hodnoty arkussínusu čísla z**, podobne pre ďalšie tri množiny.

Z periodičnosti goniometrických funkcií vyplýva, že cyklometrické funkcie sú nekonečnoznačné. Ukážeme metódu na určenie prvkov týchto množín.

Nech $w = \operatorname{Arcsin} z$. Podľa definície to znamená, že

$$z = \sin w, \quad \text{a teda} \quad z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}w}}{2\mathrm{i}}.$$

Úpravou dostaneme kvadratickú rovnicu

$$\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0.$$

Jej riešením je

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}, \quad \text{odkiaľ} \quad \mathrm{i}w = \operatorname{Lg}(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}).$$

Keďže sme v komplexnej analýze, pod $\sqrt{1 - z^2}$ rozumieme všetky hodnoty a po úprave máme

$$w = \operatorname{Arcsin} z = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right).$$

Analogicky môžeme dostať:

- $\operatorname{Arccos} z = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}(z + \sqrt{z^2 - 1})$,
- $\operatorname{Arctg} z = -\frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Lg}\frac{\mathrm{i} - z}{\mathrm{i} + z}$,
- $\operatorname{Arccotg} z = \frac{\mathrm{i}}{2} \operatorname{Lg}\frac{z + \mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}$.

Príklad. Určte Arcsin 0,5.

Riešenie. Podľa definície

$$\operatorname{Arcsin} 0{,}5 = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(\frac{\mathrm{i}}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}\right) = -\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Vypočítajme $\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{0 + 2k\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{0 + 2k\pi}{2}\right), \ k \in \{0, 1\}.$$

Teda pre $k = 0$ je $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pre $k = 1$ je $\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Potom pre $k = 0$ máme

$$-\mathrm{i} \operatorname{Lg}\left(\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\mathrm{i}\left(\ln\left|\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| + \mathrm{i}\frac{\pi}{6} + 2l\pi\mathrm{i}\right) = -\mathrm{i}\ln 1 + \frac{\pi}{6} + 2l\pi = \frac{\pi}{6} + 2l\pi$$

a pre $k = 1$

$$-\mathrm{i}\,\mathrm{Lg}\,\left(\frac{\mathrm{i}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\mathrm{i}\left(\ln\left|\frac{\mathrm{i}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right| + \mathrm{i}\frac{5\pi}{6} + 2l\pi\mathrm{i}\right) = -\frac{\pi}{6} + (2l+1)\pi.$$

Spojením týchto vyjadrení dostaneme

$$\mathrm{Arcsin}\,0{,}5 = l\pi + (-1)^l\,\frac{\pi}{6},\ \ l \in \mathbb{Z}.$$

□