3 Integrál funkcie komplexnej premennej

3.1 Integrál komplexnej funkcie reálnej premennej

Uvažujme komplexnú funkciu reálnej premennej

$$f(t) = u(t) + \mathrm{i}v(t), \quad t \in \langle a, b\rangle\,,$$

ktorá je ohraničená na $\langle a, b\rangle$. Nech $n \in \mathbb{N}$. Zoberme delenie D intervalu $\langle a, b\rangle$ dané deliacimi bodmi $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ takými, že

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

a ľubovoľné body $\vartheta_j \in \langle t_{j-1}, t_j\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Potom funkcii f, deleniu D a výberu bodov $\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$ môžeme priradiť súčet

$$\mathscr{S}(f, D, \vartheta) = \sum_{j=1}^{n} f(\vartheta_j)\triangle t_j, \quad \text{kde} \quad \triangle t_j = t_j - t_{j-1},$$

ktorý nazývame **integrálny súčet funkcie** f prislúchajúci deleniu D a výberu bodov ϑ.

Ako v reálnej analýze, je definovaná norma delenia $\nu(D) = \max\{\triangle t_j, j = 1, \ldots, n\}$ a normálna postupnosť delení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$, ak $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Zoberme normálnu postupnosť delení D_n intervalu $\langle a, b\rangle$ a vytvorme postupnosť integrálnych súčtov $(\mathscr{S}_n(f, D_n, \vartheta^n)\})_{n\in\mathbb{N}}$ pre funkciu f a výber bodov $\vartheta^n = (\vartheta_1^n, \ldots, \vartheta_{p_n}^n)$, kde p_n je počet deliacich bodov delenia D_n. Teraz môžeme definovať integrál funkcie f.

Definícia 3.1.1. Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na intervale $\langle a, b\rangle$. Nech pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ intervalu $\langle a, b\rangle$ a ľubovoľnú voľbu bodov ϑ^n existuje $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \vartheta^n)$ a je stále tá istá, tak túto spoločnú hodnotu nazývame **určitý integrál funkcie *f*** a funkciu nazývame integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$. Označujeme

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \vartheta^n).$$

Rozpísaním integrálnych súčtov máme

$$\begin{aligned}
\mathscr{S}(f, D_n, \vartheta^n) &= \sum_{j=1}^{p_n} f(\vartheta_j^n)\triangle t_j^n = \sum_{j=1}^{p_n} u(\vartheta_j^n)\triangle t_j^n + \mathrm{i}\sum_{j=1}^{p_n} v(\vartheta_j^n)\triangle t_j^n = \\
&= \mathscr{S}(u, D_n, \vartheta^n) + \mathrm{i}\mathscr{S}(v, D_n, \vartheta^n).
\end{aligned}$$

Z vety o limite postupnosti komplexných čísel a z definície určitého integrálu funkcie reálnej premennej vyplýva nasledujúce tvrdenie.

Veta 3.1.2. *Funkcia $f = u + \mathrm{i}v$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ práve vtedy, keď funkcie u, v sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$.*

Príklad 3.1.3. Vypočítajte $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{i}t}$

Riešenie. Určíme reálnu a imginárnu zložku integranda.

$$\frac{1}{1+\mathrm{i}} = \frac{1-\mathrm{i}t}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} - \mathrm{i}\,\frac{t}{1+t^2}.$$

Obidve zložky sú funkcie integrovateľné na intervale $\langle 0, 1\rangle$ a tak

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{i}t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - \mathrm{i}\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = [\operatorname{arctg} t]_0^1 - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\mathrm{i}}{2}\ln 2$$

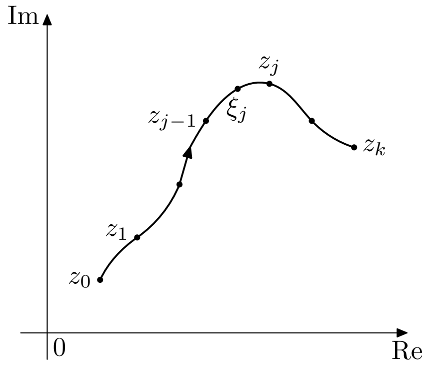
□

Táto veta dovoľuje preniesť vlastnosti určitého integrálu funkcie jednej reálnej premennej na integrál komplexnej funkcie reálnej premennej. Sú to vlastnosti: lineárnosť integrálu, aditívnosť, odhad absolútnej hodnoty integrálu a pod. Pripomeňme ich.

1. Nech funkcie f a g sú integrovateľné na intervale $\langle a, b\rangle$ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Potom funkcia $c_1 f + c_2 g$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí
   $$\int_a^b \left[c_1 f(t) + c_2 g(t)\right] \mathrm{d}t = c_1 \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + c_2 \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Nech $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, c\rangle$ práve vtedy, keď je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a $\langle b, c\rangle$. Naviac platí
   $$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Nech funkcia f je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$. Potom platí
   $$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^b \left|f(t)\right| \mathrm{d}t.$$
4. Nech funkcia f je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a funkcia F je diferencovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ taká, že $F'(t) = f(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Potom
   $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) \ \left(= [F(t)]_a^b\right).$$

3.2 Integrál komplexnej funkcie komplexnej premennej

Nech γ je jednoduchá, orientovaná, po častiach hladká krivka, resp. cyklicky orientovaná uzavretá krivka, s parametrickým vyjadrením $\lambda(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$.



Nech k je prirodzené číslo a

$$z_0 = \lambda(a),\ z_1,\ z_2, \dots, z_k = \lambda(b)$$

sú body krivky γ, pričom

buď $z_{j-1} \prec z_j$ alebo $z_j \prec z_{j-1}$

pre každé $j = 1, 2, \dots, k$. Označme $\widehat{z_{j-1}, z_j}$ oblúk, časť krivky γ s koncovými bodmi z_{j-1}, z_j. Systém oblúkov $\widehat{z_0, z_1}, \widehat{z_1, z_2}, \dots, \widehat{z_{k-1}, z_k}$ nazývame **delenie krivky γ**. Nech ξ_j je ľubovoľný bod oblúka $\widehat{z_{j-1}, z_j}$ a buď $z_{j-1} \prec \xi_j \prec z_j$ alebo $z_j \prec \xi_j \prec z_{j-1}$ pre každé $j = 1, 2, \dots, k$. Označme $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k)$. Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ. Potom súčet

$$\mathscr{S}(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}), \quad \text{ak} \quad z_{j-1} \prec z_j$$

alebo

$$\mathscr{S}(f, D, \xi) = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)(z_{j-1} - z_j), \quad \text{ak} \quad z_j \prec z_{j-1}$$

nazývame **integrálny súčet funkcie f pre delenie D a výber bodov ξ**.
Číslo

$$\nu(D) = \max\{|z_j - z_{j-1}|\,,\ j = 1, \dots, k\}$$

nazývame **norma delenia D**. Postupnosť delení $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva **normálna**, ak $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$.

Po týchto úvodných pojmoch môžeme definovať integrál funkcie komplexnej premennej na krivke.

Definícia 3.2.1. Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, orientovaná krivka a funkcia f je definovaná a ohraničená na krivke γ. **Integrálom funkcie f na krivke γ** nazývame číslo I také, že pre každú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ krivky γ a pre každý výber bodov ξ^n je

$$I = \lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \xi^n).$$

Ak tento integrál existuje, tak funkciu f nazývame **integrovateľná na krivke γ**. Integrál funkcie f po krivke γ označujeme $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

Príklad 3.2.2. Dokážte, že funkcia $f(z) = 1$ je integrovateľná na ľubovoľnej krivke γ a vypočítajte $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

Riešenie. Označme A počiatočný bod krivky γ a B koncový bod. Nech $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je ľubovoľná normálna postupnosť delení krivky γ. Nech $z_0^n = A$ je jej počiatočný bod a $z_{p_n}^n = B$ koncový bod. Potom pre každý výber bodov $\xi^n = (\xi_1^n, \xi_2^n, \dots, \xi_{p_n}^n)$ je

$$\mathscr{S}(f, D_n, \xi^n) = \sum_{j=1}^{p_n} f(\xi_j^n)(z_j^n - z_{j-1}^n) = \sum_{j=1}^{p_n} 1 \cdot (z_j^n - z_{j-1}^n) = z_{p_n}^n - z_0^n = B - A,$$

a teda

$$\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \xi^n) = \lim_{n\to\infty} (B - A) = B - A.$$

To znamená, že funkcia $f(z) = 1$ je integrovateľná na krivke γ a $\int_\gamma \mathrm{d}z = B - A$.

Ak krivka γ je uzavretá, t.j. $A = B$, tak $\int_\gamma \mathrm{d}z = 0$. □

Z definície integrálu vyplývajú nasledujúce jeho vlastnosti. Poznamenajme, že pod krivkou budeme vždy rozumieť jednoduchú, po častiach hladkú, orientovanú krivku.

Veta 3.2.3.

1. *Nech funkcie f, g sú integrovateľné na krivke γ a $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Potom aj funkcia $c_1 f + c_2 g$ je integrovateľná na krivke γ a platí*
$$\int_\gamma [c_1 f(z) + c_2 g(z)]\,\mathrm{d}z = c_1 \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z + c_2 \int_\gamma g(z)\mathrm{d}z.$$
2. *Nech krivka γ^* je opačne orientovaná krivka ku krivke γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď je integrovateľná na γ^* a platí*
$$\int_{\gamma^*} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z.$$
3. *Nech krivka γ je orientovaný súčet kriviek γ_1, γ_2, t.j. koncový bod krivky γ_1 je začiatočný bod krivky γ_2. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď je integrovateľná na krivke γ_1 aj γ_2 a platí*
$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z.$$
4. *Nech funkcia f je integrovateľná na krivke γ a ohraničená konštantou M (pre všetky $z \in \gamma$ je $|f(z)| \le M$). Nech krivka γ má dĺžku L. Potom*
$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML.$$

Dôkaz. Dôkazy týchto tvrdení sú podobné dôkazom viet o lineárnosti, aditívnosti reálnych integrálov a tretia vlastnosť vyplýva priamo z definície. Uvedieme len dôkaz štvrtého tvrdenia.

Pre ľubovoľnú normálnu postupnosť delení $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ krivky γ a každý výber bodov ξ^n platí

$$|\mathscr{S}(f, D_n, \xi^n)| = \left|\sum_{j=1}^{p_n} f(\xi_j^n)(z_j^n - z_{j-1}^n)\right| \le \sum_{j=1}^{p_n} \left|f(\xi_j^n)\right| \cdot \left|z_j^n - z_{j-1}^n\right| \le ML,$$

pretože $\left|z_j^n - z_{j-1}^n\right|$ je dĺžka úsečky s koncovými bodmi z_{j-1}^n, z_j^n, čo je číslo menšie ako dĺžka oblúka $\widehat{z_{j-1}^n, z_j^n}$ krivky γ. Potom

$$\left|\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \xi^n)\right| = \lim_{n\to\infty} |\mathscr{S}(f, D_n, \xi^n)| \le ML.$$

□

Príklad 3.2.4. Odhadnite $\int_\gamma \mathrm{e}^{z-1}\mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z-2| = 1$.

Riešenie. Pretože odhadujeme absolútnu hodnotu integrálu, tak nezáleží na orientácii krivky. Za predpokladu, že funkcia $f(z) = \mathrm{e}^{z-1}$ je integrovateľná na krivke (ukážeme neskôr), odhadnime $|\mathrm{e}^{z-1}|$. Ak $z = x + \mathrm{i}y$, tak

$$\left|\mathrm{e}^{z-1}\right| = \left|\mathrm{e}^{x-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\right| = \mathrm{e}^{x-1}.$$

Keďže krivka γ je kružnica so stredom v bode $z_0 = 2$ a polomerom $r = 1$, tak $1 \le x \le 3$ a z monotónnosti exponenciálnej funkcie vyplýva $\mathrm{e}^0 \le \mathrm{e}^{x-1} \le \mathrm{e}^{3-1} = e^2$. Dĺžka kružnice γ je 2π, a tak

$$\left|\int_\gamma \mathrm{e}^{z-1}\mathrm{d}z\right| \le 2\pi\mathrm{e}^2.$$

□

Nasledujúca veta dáva metódu výpočtu integrálu komplexnej funkcie na krivke. K jej dôkazu budeme potrebovať pomocnú lemu.

Lema 3.2.5. *Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, orientovaná krivka (cyklicky orientovaná uzavretá krivka) daná parametricky rovnicou $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Nech $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $d_n = \{a = t_0, t_1, \dots, t_{p_n} = b\}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$ a*

$(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $D_n = \{z_0, z_1, \dots, z_{p_n}\}$ je postupnosť delení krivky γ.
Nech pre každé $n \in \mathbb{N}$ je delenie D_n vytvorené delením d_n prostredníctvom parametrického vyjadrenia, t.j. $z_j = \lambda(t_j)$, $j = 1, \dots, p_n$. Potom postupnosť $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je normálna práve vtedy, keď postupnosť $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je normálna.

Dôkaz. Nebudeme robiť presný dôkaz. Využíva sa hladkosť krivky. To znamená, že v jej parametrickom vyjadrení $z = \lambda(t)$ sú funkcie λ, λ' spojité na príslušnom uzavretom intervale a $\lambda' \neq 0$. Potom je λ rovnomerne spojitá a prostá funkcia. Má teda inverznú funkciu, ktorá je tiež rovnomerne spojitá. Tvrdenie potom vyplýva z definície rovnomernej spojitosti týchto funkcií. □

Veta 3.2.6. *Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, orientovaná (uzavretá, cyklicky orientovaná) krivka s parametrickým vyjadrením $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Nech funkcia f je definovaná a ohraničená na γ. Funkcia f je integrovateľná na krivke γ práve vtedy, keď funkcia $f(\lambda(t))\lambda'(t)$ je integrovateľná na intervale $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \pm \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t,$$

kde znamienko $+$ platí v prípade, ak je krivka orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením, znamienko $-$ platí v prípade krivky orientovanej nesúhlasne s parametrickým vyjadrením.

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre krivku γ hladkú a súhlasne orientovanú s parametrickým vyjadrením $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. To znamená, že λ, λ' sú spojité na $\langle a, b\rangle$ a $\lambda'(t) \neq 0$ (až na konečný počet bodov).

Nech $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť delení intervalu $\langle a, b\rangle$, presnejšie

$$d_n = \{a = t_0^n, t_1^n, \dots t_{p_n}^n = b\}, \quad a = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = b.$$

Zoberme ľubovoľný výber bodov $\tau^n = (\tau_1^n, \dots, \tau_{p_n}^n)$, kde $\tau_j^n \in \left\langle t_{j-1}^n, t_j^n \right\rangle$, $j = 1, \dots, p_n$ a urobme integrálny súčet funkcie $\varphi(t) = f(\lambda(t))\lambda'(t)$ pre delenie d_n a výber bodov τ^n

$$\mathscr{S}(\varphi, d_n, \tau^n) = \sum_{j=1}^{p_n} f(\lambda(\tau_j^n))\lambda'(\tau_j^n)(t_j^n - t_{j-1}^n). \tag{3.1}$$

Nech teraz $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je postupnosť delení krivky γ pričom D_n vytvorená delením d_n cez parametrické vyjadrenie, t.j.

$$D_n = \{z_0^n, z_1^n, \dots z_{p_n}^n\}, \quad \text{a} \quad z_0^n \prec z_1^n \prec \dots \prec z_{p_n}^n,$$

pričom $z_j^n = \lambda(t_j^n)$, $j = 1, \dots, p_n$. Nech $\xi_j^n = \lambda(\tau_j^n)$. Potom ξ_j^n je bod oblúka $\widehat{z_{j-1}^n, z_j^n}$, $j = 1, \dots, p_n$. Integrálny súčet prislúchajúci funkcii f, deleniu D_n a výberu bodov $\xi^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_{p_n}^n)$ je

$$\mathscr{S}(f, D_n, \xi^n) = \sum_{j=1}^{p_n} f(\xi_j^n)(z_j^n - z_{j-1}^n). \tag{3.2}$$

Chceme ukázať, že postupnosti integrálnych súčtov (3.1), (3.2) funkcií φ, f sú súčasne konvergentné pre normálne postupnosti delení a $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(\varphi, d_n, \tau^n) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{S}(f, D_n, \xi^n)$. To znamená, že potrebujeme ukázať:

> pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre každé delenie d intervalu $\langle a, b\rangle$, ktorého norma $\nu(d) < \delta$ (resp. delenie D krivky γ, $\nu(D) < \delta$) a ľubovoľný výber bodov $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_p)$ (resp. $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p)$) platí
>
> $$|\mathscr{S}(f, D, \xi) - \mathscr{S}(\varphi, d, \tau)| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Z Lemy 3.2.5 vieme, že ak norma $\nu(D_n)$ je dostatočne malá, tak aj norma $\nu(d_n)$ je dostatočne malá. Upravme ľavú stranu (3.3)

$$\begin{aligned} |\mathscr{S}(f, D, \xi) - \mathscr{S}(\varphi, d, \tau)| &= \left| \sum_{j=1}^{p} f(\xi_j)(z_j - z_{j-1}) - \sum_{j=1}^{p} f(\lambda(\tau_j))\lambda'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) \right| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} |f(\xi_j)|\, |z_j - z_{j-1} - \lambda'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})| \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{p} M \left|\lambda(t_j) - \lambda(t_{j-1}) - \lambda'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})\right|, \end{aligned} \tag{3.4}$$

kde M je kladná konštanta ohraničujúca funkciu f, t.j. $|f(z)| < M$, $z \in \gamma$.
Označme $\lambda(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$. Pretože krivka γ je hladká, sú funkcie x, y spojité a spojite diferencovateľné na $\langle a, b\rangle$. Odhadnime j–tý sčítanec ($j = 1, 2, \dots, p$) vo vzťahu (3.4) :

$$\begin{aligned} & |\lambda(t_j) - \lambda(t_{j-1}) - \lambda'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})| = \\ = \; & |[x(t_j) + \mathrm{i}y(t_j)] - [x(t_{j-1}) + \mathrm{i}y(t_{j-1})] - [x'(\tau_j) + \mathrm{i}y'(\tau_j)]\,(t_j - t_{j-1})| = \\ = \; & \left|x(t_j) - x(t_{j-1}) - x'(\tau_j)(t_j - t_{j-1}) + \mathrm{i}\,[y(t_j) - y(t_{j-1}) - y'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})]\right|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Na funkcie x, y a interval $\langle t_{j-1}, t_j\rangle$ môžeme použiť Lagrangeovu vetu, podľa ktorej existujú body η_j, ϑ_j z intervalu (t_{j-1}, t_j) také, že

$$x(t_j) - x(t_{j-1}) = x'(\eta_j)(t_j - t_{j-1}) \quad \text{a} \quad y(t_j) - y(t_{j-1}) = y'(\vartheta_j)(t_j - t_{j-1}).$$

Dosadením do vzťahu (3.5) po úprave máme

$$\begin{aligned} &|\lambda(t_j) - \lambda(t_{j-1}) - \lambda'(\tau_j)(t_j - t_{j-1})| = \\ = \ &|[(x'(\eta_j) - x'(\tau_j)) + \mathrm{i}\,(y'(\vartheta_j) - y'(\tau_j))]\,(t_j - t_{j-1})| \le \\ \le \ &(|x'(\eta_j) - x'(\tau_j)| + |y'(\vartheta_j) - y'(\tau_j)|)\,(t_j - t_{j-1}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Funkcie x', y' sú spojité na uzavretom intervale $\langle a, b\rangle$, z čoho vyplýva, že sú rovnomerne spojité na $\langle a, b\rangle$, t.j.

$$\forall \varepsilon_1 > 0\, \exists \delta > 0 : \forall t',\, t'' \in \langle a, b\rangle\,,\, |t' - t''| < \delta \Rightarrow |x'(t') - x'(t'')| < \varepsilon_1 \wedge |y'(t') - y'(t'')| < \varepsilon_1.$$

Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Položme $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$. K nemu potom existuje $\delta > 0$ také, že pre delenie d intervalu $\langle a, b\rangle$, ktorého $\nu(d) < \delta$, platí

$$|\eta_j - \tau_j| \le |t_j - t_{j-1}| < \delta \ \wedge \ |\vartheta_j - \tau_j| \le |t_j - t_{j-1}| < \delta$$

a zo vzťahu (3.4) pomocou (3.6) máme

$$|\mathscr{S}(f, D, \xi) - \mathscr{S}(\varphi, d, \tau)| \le M \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\varepsilon}{2M(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \right) (t_j - t_{j-1}) = \varepsilon,$$

čo sme chceli ukázať. V prípade krivky po častiach hladkej, rozdelíme ju na hladké oblúky a použijeme Vetu 3.2.3. □

Z tejto vety vyplýva:

Dôsledok 3.2.7. *Ak funkcia f je spojitá na jednoduchej, po častiach hladkej krivke γ, potom je integrovateľná na krivke γ.*

Príklad 3.2.8. Vypočítajte:

a) $\int\limits_\gamma \overline{z}^2 \mathrm{d}z$, kde γ je krivka súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením $z = t + \mathrm{i}\frac{t}{3}$, $t \in \langle 0, 3\rangle$.

b) $\int\limits_\gamma |z|\, \mathrm{d}z$, kde krivka γ je polkružnica $|z| = 1$, $\operatorname{Re} z \le 0$ s počiatočným bodom $-\mathrm{i}$ a koncovým i.

c) $\int\limits_\gamma z^2 \mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná uzavretá krivka, ktorá je vytvorená z kriviek γ_1, γ_2, γ_3. Krivka γ_1 je úsečka s koncovými bodmi $(0, 0)$ a $(R, 0)$, γ_2 je časť kružnice $|z| = R$, $\operatorname{Re} z \ge 0$, $\operatorname{Im} z \ge 0$ a γ_3 je úsečka s koncovými bodmi $(0, R)$ a $(0, 0)$.

Riešenie.

a) Funkcia $z = t + \mathrm{i}\frac{t}{3}$ je spojitá a $z' = 1 + \frac{\mathrm{i}}{3} \neq 0$ na intervale $\langle 0, 3\rangle$. To znamená, že krivka γ je hladká a orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením. Funkcia $f(z) = \overline{z}^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$, tak aj na krivke γ. Preto existuje integrál funkcie f na krivke γ a na jeho výpočet použijeme Vetu 3.2.6

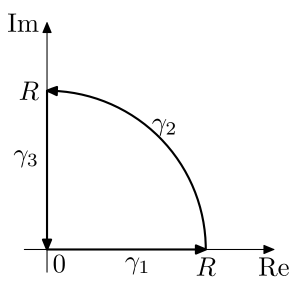
$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma \overline{z}^2 \mathrm{d}z &= \int\limits_0^3 \left(\overline{t + \mathrm{i}\frac{t}{3}}\right)^2 \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{3}\right) \mathrm{d}t = \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{3}\right) \int\limits_0^3 \left(t - \mathrm{i}\frac{t}{3}\right)^2 \mathrm{d}t = \\ &= \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{3}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{3}\right)^2 \int\limits_0^3 t^2 \mathrm{d}t = \left(1 + \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{3}\right)\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 = 10\left(1 - \frac{\mathrm{i}}{3}\right).\end{aligned}$$

b) Parametrická rovnica krivky γ môže byť $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ pre $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$. Je to spojitá funkcia a $z' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 0$ pre $t \in \left\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\rangle$. To znamená, že krivka γ je hladká a nesúhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením. Funkcia $f(z) = |z|$ je spojitá, a tak integrovateľná na krivke γ. Použijeme Vetu 3.2.6 o výpočte integrálu

$$\begin{aligned}\int\limits_\gamma |z|\,\mathrm{d}z &= -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = -\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{\mathrm{i}}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = \mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{3\pi\mathrm{i}}{2}} = \\ &= \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} - \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) = \mathrm{i} + \mathrm{i} = 2\mathrm{i}.\end{aligned}$$

c) Nájdime parametrické rovnice kriviek γ_1, γ_2, γ_3.

- γ_1: $z = t$, $t \in \langle 0, R\rangle$. Pre $t \in \langle 0, R\rangle$ je $z' = 1 \neq 0$. To znamená, že je to hladká krivka.
- γ_2: $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ a $z' = z = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \neq 0$ pre $t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$. To znamená, že je to hladká krivka.
- γ_3: $z = \mathrm{i}t$, $t \in \langle 0, R\rangle$ a $z' = \mathrm{i} \neq 0$ pre $t \in \langle 0, R\rangle$, teda γ_3 je hladká krivka.



Krivka γ je kladne orientovaná, po častiach hladká. Je orientovaným súčtom kriviek γ_1, γ_2, γ_3, $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$. To znamená:

- pre krivku γ_1 je bod $(0,0)$ počiatočný bod a $(R,0)$ koncový bod a je orientovaná súhlasne so svojím parametrickým vyjadrením;
- bod $(R,0)$ je počiatočný bod a $(0,R)$ koncový bod krivky γ_2 a je orientovaná súhlasne s parametrickým vyjadrením;
- bod $(0,R)$ je počiatočný bod a $(0,0)$ koncový bod krivky γ_3 a je orientovaná nesúhlasne s parametrickým vyjadrením.

Funkcia $f(z) = z^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$, teda aj na danej krivke, a tak je na nej integrovateľná. Potom

$$\int\limits_{\gamma} z^2 \mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} z^2 \mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} z^2 \mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_3} z^2 \mathrm{d}z = \int\limits_0^R t^2 \mathrm{d}t + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \mathrm{d}t - \int\limits_0^R (\mathrm{i}t)^2 \mathrm{i}\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^R + \mathrm{i}R^3 \left[\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}}{3\mathrm{i}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \mathrm{i}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{R^3}{3} + \mathrm{i}\frac{R^3}{3} = 0.$$

□

Tak ako v reálnej analýze, funkciu F nazývame **primitívna funkcia** k funkcii f na oblasti G, ak $F'(z) = f(z)$ pre každé $z \in G$.

Za určitých predpokladov aj v komplexnom obore môžeme vypočítať integrál funkcie na krivke pomocou primitívnej funkcie. O tom hovorí nasledujúca veta.

Veta 3.2.9. *Nech funkcia f je spojitá na oblasti G a má tam primitívnu funkciu F. Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká krivka, súhlasne orientovaná so svojím parametrickým vyjadrením, ktorá leží v oblasti G. Potom integrál funkcie f na krivke γ nezávisí od tvaru krivky, ale len od jej začiatočného bodu A a koncového bodu B a platí*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = F(B) - F(A).$$

Dôkaz. Nech krivka γ má parametrické vyjadrenie $z = \lambda(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$. Podľa dôsledku Vety 3.2.7 máme

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t.$$

Pretože funkcia F je primitívna k f, tak podľa vety o derivácii zloženej funkcie

$$[F(\lambda(t))]' = F'(\lambda(t))\lambda'(t) = f(\lambda(t))\lambda'(t).$$

To znamená, že funkcia $F(\lambda(t))$ je primitívna funkcia k funkcii $f(\lambda(t))\lambda'(t)$, a tak

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\lambda(t))\lambda'(t)\mathrm{d}t = F(\lambda(b)) - F(\lambda(a)) = F(B) - F(A).$$

□

Príklad 3.2.10. Vypočítajte $\int_0^{1+\mathrm{i}} z^2 \mathrm{d}z$.

Riešenie. Zadanie príkladu naznačuje, že integrál nezávisí od tvaru krivky. Keďže funkcia $f(z) = z^2$ je spojitá na $\mathbb{C}$ a má primitívnu funkciu $F(z) = \frac{z^3}{3}$, podľa predchádzajúcej vety je pravda, že integrál nie je závislý na tvare integračnej krivky, a tak

$$\int_0^{1+\mathrm{i}} z^2 \mathrm{d}z = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{1+\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^3}{3}.$$

□

3.3 Cauchyho integrálna veta

V teórii analytických funkcií patrí Cauchyho integrálna veta medzi najdôležitejšie. Cauchy ju dokázal v roku 1814 za prepokladu, že funkcia f má spojitú deriváciu f'. Celá ďalšia teória analytických funkcií je jednoduchším alebo zložitejším dôsledkom tejto vety. Uvedieme dve verzie tejto vety: Cauchyho a všeobecnejšiu vetu. Jej dôkaz je pomerne zložitý, a preto ho nebudeme robiť. Dá sa nájsť napr. v [1].

Veta 3.3.1. [Cauchyho integrálna veta] Nech funkcia f je analytická na jednoducho súvislej oblasti G. Nech γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka, ktorá aj so svojím vnútrom leží v G. Potom $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Všeobecnejšia verzia Cauchyho integrálnej vety má nasledujúce znenie.

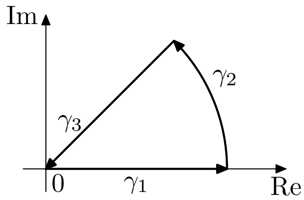
Veta 3.3.2. *Nech γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na uzávere oblasti G, $\overline{G} = G \cup \gamma$. Potom* $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$

Ukážeme jedno použitie Cauchyho integrálnej vety.

Príklad 3.3.3. Nájdime hodnoty Fresnelových integrálov $\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$, $\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$ za predpokladu, že poznáme hodnotu Laplaceovho integrálu $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Riešenie. Zoberme funkciu $f(z) = \mathrm{e}^{-z^2}$ a kladne orientovanú krivku $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3$, kde krivky γ_1, γ_2, γ_3 sú dané takto:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &: \quad z = t,\ t \in \langle 0, r\rangle\,,\ r > 0,\\
\gamma_2 &: \quad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\ t \in \left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle,\\
\gamma_3 &: \quad y = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},\ t \in \langle 0, r\rangle\,.
\end{aligned}$$



Funkcia f je analytická na $\mathbb{C}$ a podľa Cauchyho integrálnej vety je $\int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 0$. Na druhej strane, vzhľadom na vlastnosti inegrálu, je

$$0 = \int_\gamma \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z. \tag{3.7}$$

Pozrime sa na jednotlivé integrály.

Krivka γ_1 je hladká, $z' = 1$, súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením, a tak

$$\int_{\gamma_1} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{pre} \quad r \to \infty. \tag{3.8}$$

Krivka γ_2 je hladká, $z' = r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením, a tak

$$\int_{\gamma_2} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}} r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = r\mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2(\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t. \tag{3.9}$$

Krivka γ_3 je hladká, $z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, nesúhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením, a tak

$$\int_{\gamma_3} \mathrm{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = -\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\,\mathrm{d}t = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2\left(\cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)}\,\mathrm{d}t =$$

$$= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^r \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^r \left(\cos t^2 - \mathrm{i}\sin t^2\right)\,\mathrm{d}t. \tag{3.10}$$

Dosadením (3.8), (3.9), (3.10) do rovnice (3.7) dostaneme

$$\int_0^r \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + r\mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\int_0^r \left(\cos t^2 - \mathrm{i}\sin t^2\right)\,\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

Ukážeme, že $\lim\limits_{r\to\infty} r\mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 0$. Urobme nasledujúce úpravy a odhady:

$$\left| r\mathrm{i}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2(\cos 2t+\mathrm{i}\sin 2t)}e^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t\right| \leq r\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^{-r^2\cos 2t}\,\mathrm{d}t = \frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2\cos u}\,\mathrm{d}u \leq$$

$$\leq \frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-r^2\left(1-\frac{2}{\pi}u\right)}\,\mathrm{d}u = \frac{r}{2}\mathrm{e}^{-r^2}\left[\frac{\pi}{2r^2}\mathrm{e}^{r^2\frac{2}{\pi}u}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4r}\left(1-\mathrm{e}^{-r^2}\right) \to 0, \quad r\to\infty.$$

Z rovnice (3.11) potom máme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\int_0^\infty \left(\cos t^2 - \mathrm{i}\sin t^2\right)\,\mathrm{d}t,$$

resp.

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t + \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t\right) + \mathrm{i}\left(\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t\right)\right].$$

Ak označíme $a = \int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t$, $b = \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t$, z poslednej rovnosti dostaneme systém

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ a-b &= 0 \end{aligned}$$

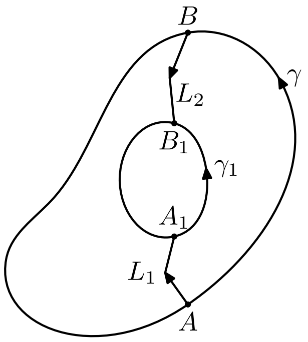
ktorého riešením je $a = b = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, a tak $\int_0^\infty \cos t^2\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin t^2\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$. □

Nasledujúca veta hovorí o podmienkach, kedy nie je rozhodujúci tvar krivky.

Veta 3.3.4. [Veta o deformácii integrálnej krivky] Nech γ, γ_1 sú jednoduché, uzavreté, po častiach hladké krivky, obidve buď kladne alebo záporne orientované a $\gamma_1 \subset \operatorname{Int}\gamma$. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma \cap \operatorname{Ext}\gamma_1$ a spojitá na uzávere oblasti G. Potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Nech γ, γ_1 sú kladne orientované. Zvoľme na krivke γ dva body $A \neq B$ a na krivke γ_1 dva body $A_1 \neq B_1$. Spojme lomenou čiarou L_1 body A, A_1 a lomenou čiarou L_2 body B, B_1 tak, aby sa L_1, L_2 nepretínali a ležali v oblasti G ohraničenej krivkami γ, γ_1.



Nech A, B sú začiatočné body kriviek L_1, L_2. Pomocou nich utvorme dve uzavreté cyklicky orientované krivky

$$\begin{aligned} K_1 &= \gamma(AB) \oplus L_2 \oplus \gamma_1^*(B_1A_1) \oplus L_1^* \\ K_2 &= \gamma(BA) \oplus L_1 \oplus \gamma_1^*(A_1B_1) \oplus L_2^*. \end{aligned}$$

Funkcia f je analytická vo vnútri kriviek K_1, K_2 a spojitá na týchto krivkách. Podľa Cauchyho integrálnej vety máme

$$\int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{K_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{K_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{K_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Potom

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma(AB)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_2} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^*(B_1A_1)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_1^*} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &+ \int_{\gamma(BA)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^*(A_1B_1)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{L_2^*} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \left(\int_{\gamma(AB)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma(BA)} f(z)\,\mathrm{d}z\right) + \left(\int_{\gamma_1^*(B_1A_1)} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^*(A_1B_1)} f(z)\,\mathrm{d}z\right) \\ &= \int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_1^*} f(z)\,\mathrm{d}z, \end{aligned}$$

odkiaľ vyplýva

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

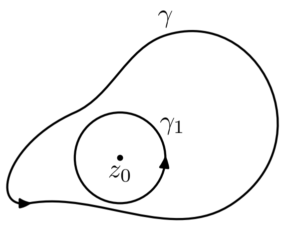
□

Príklad 3.3.5. Vypočítajte $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$, kde z_0 je pevný bod, $n \in \mathbb{Z}$ a γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka a $z_0 \notin \gamma$.

Riešenie. Pre $n \leq 0$ alebo $z_0 \in \operatorname{Ext}\gamma$ je funkcia $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^n}$ analytická vo vnútri krivky γ, spojitá na nej a podľa Cauchyho integrálnej vety je

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = 0.$$

Nech $n > 0$ a $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$. Jediný singulárny bod funkcie f je bod z_0. Vnútro krivky je oblasť, preto existuje reálne číslo $r > 0$ také, že okolie $U_r(z_0) \subset \operatorname{Int}\gamma$. Zvoľme krivku γ_1 kladne orientovnú kružnicu $z = z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.



Funkcia f a krivky γ, γ_1 spĺňajú predpoklady Vety o deformácii integrálnej krivky, a tak

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{r\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\mathrm{d}t.$$

Ak $n \neq 1$, potom

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n} = \frac{\mathrm{i}}{r^{n-1}} \left[\frac{1}{\mathrm{i}(1-n)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)t}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Pre $n = 1$ je

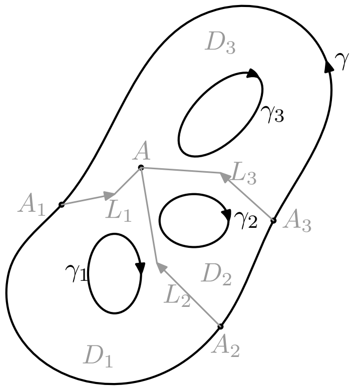
$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

□

Veta 3.3.6. [Cauchyho integrálna veta pre viacnásobne súvislú oblasť] Nech oblasť G je $(n+1)$-násobne súvislá s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria po častiach hladké, kladne orientované krivky γ, $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^*$. Nech funkcia f je analytická na G a spojitá na uzávere $\overline{G}$. Potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \text{resp.} \quad \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j^*} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{3.12}$$

Dôkaz. V oblasti G zvoľme bod A a na krivke γ body $A_1,\ A_2,\ \ldots,A_n,\ A_{n+1}=A_1$, v zmysle jej orientácie. Pospájajme postupne body A_j s bodom A lomenými čiarami L_j, ktoré ležia v oblasti G, $j=1,\ldots,n$. Tým sa oblasť G rozpadne na n oblastí D_j. Lomené čiary L_j zvoľme tak, aby v oblasti D_j ležala len jedna z kriviek $\gamma_1,\ldots\gamma_n$. Číslovanie urobme tak, aby v oblasti D_j ležala krivka γ_j a aby oblasť D_j bola tá, ktorá je ohraničená lomenými čiarami L_{j+1}, L_j a časťou krivky $\gamma(A_j,A_{j+1})$. Označme túto krivku K_j. Jej orientácia je určená orientáciou oblúka $\gamma(A_j,A_{j+1})$. Potom



$$\int_{K_j} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma(A_j,A_{j+1})} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_{j+1}} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_j^*} f(z)\,\mathrm{d}z,\quad j=1,\ldots,n$$

Sčítajme tieto integrály

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{K_j} f(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma(A_j,A_{j+1})} f(z)\,\mathrm{d}z+\sum_{j=1}^{n}\int_{L_{j+1}} f(z)\,\mathrm{d}z+\sum_{j=1}^{n}\int_{L_j^*} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pretože

- $\displaystyle\int_{L_j} f(z)\,\mathrm{d}z+\int_{L_j^*} f(z)\,\mathrm{d}z=0$ pre každé $j=1,\ldots,n$
- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma(A_j,A_{j+1})} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z,$

dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n}\int_{K_j} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Podľa Vety o deformácií integrálnej krivky je $\displaystyle\int_{K_j} f(z)\,\mathrm{d}z=\int_{\gamma_j^*} f(z)q,\mathrm{d}z$, $j=1,\ldots,n$, a tak poslednú rovnosť môžeme zapísať

$$\int_{\gamma} f(z)\mathrm{d}z=\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j^*} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

3.4 Dôsledky Cauchyho integrálnej vety

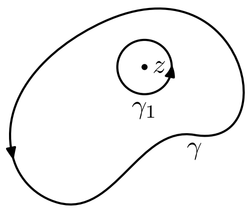
3.4.1 Cauchyho integrálny vzorec

Jeden z najdôležitejších dôsledkov Cauchyho integrálnej vety je Cauchyho integrálny vzorec (formula), podľa ktorého určíme hodnoty analytickej funkcie vo vnútri orientovanej uzavretej krivky pomocou jej hodnôt na tejto krivke. Budeme formulovať vety pre všeobecnejšiu verziu Cauchyho integrálnej vety.

Veta 3.4.1. [Cauchyho integrálny vzorec] Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech funkcia f je analytická na oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na uzávere oblasti $\overline{G}$. Potom v každom bode $z \in G$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\, \mathrm{d}s.$$

Dôkaz. Nech z je ľubovoľný bod z oblasti G. Definujme funkciu $g(s) = \dfrac{f(s)}{s-z}$, $s \in G$. Funkcia g je v oblasti $G \setminus \{z\}$ analytická. Zoberme okolie $U_r(z)$ bodu z, také že $U_r(z) \subset G$ a jeho hranica je kladne orientovaná kružnica γ_1: $s = z + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Funkcia g a krivky γ, γ_1 spĺňajú predpoklady Vety o deformácii integrálnej krivky a platí



$$\int_\gamma g(s)\, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} g(s)\, \mathrm{d}s.$$

Upravme integrál na pravej strane a použime výsledok Príkladu 3.3.5.

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \frac{f(s)}{s-z}\, \mathrm{d}s &= \int_{\gamma_1} \frac{f(s)-f(z)+f(z)}{s-z}\, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\, \mathrm{d}s + f(z)\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}s}{s-z} \\
&= \int_{\gamma_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\, \mathrm{d}s + f(z)\, 2\pi\mathrm{i}.
\end{aligned}$$

Stačí ukázať, že integrál na pravej strane je rovný 0. Nech $\varepsilon > 0$ je ľubovoľné. Funkcia f je analytická, a teda aj spojitá v bode $z \in G$. To znamená, že k $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ také, že pre všetky $s \in G$, pre ktoré $|s-z| < \delta$, platí $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$. Ak zoberieme $r < \delta$, tak pre každý bod $s \in \gamma_1$ platí $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$ a $|s - z| = r$. Potom

$$\left| \int_{\gamma_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\, \mathrm{d}s \right| < \frac{\varepsilon}{r} \int_{\gamma_1} \mathrm{d}s = 2\pi\varepsilon.$$

Táto nerovnosť má platiť pre každé $\varepsilon > 0$, preto musí byť

$$\int_{\gamma_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\, \mathrm{d}s = 0.$$

□

Poznámka. Ak sú splnené predpoklady poslednej vety, tak podľa Cauchyho integrálnej vety pre každý bod $z \in \operatorname{Ext}\gamma$ platí

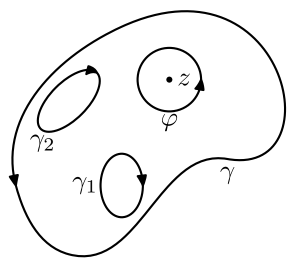
$$\int_{\gamma_1} \frac{f(s)-f(z)}{s-z}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Cauchyho integrálny vzorec platí aj pre viacnásobne súvislú oblasť.

Veta 3.4.2. *Nech G je $(n+1)$-násobne súvislá oblasť s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria po častiach hladké, kladne orientované krivky $\gamma, \gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*$. Nech funkcia f je analytická na G a spojitá na uzávere oblasti $\overline{G}$. Potom pre každý bod $z \in G$ platí*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s\right].$$

Dôkaz. Zoberme ľubovoľný bod $z \in G$ a krivku $\varphi:\ s = z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, kladne orientovanú, kde r je také, aby $\varphi \subset G$.



Uvažujme teraz $(n+2)$-násobne súvislú oblasť $G' = G \cap \operatorname{Ext}\varphi$. Je zrejmé, že funkcia $g(s) = \dfrac{f(s)}{s-z}$, $s \in G'$ je analytická na G' a podľa Cauchyho integrálnej vety pre viacnásobne súvislú oblasť dostaneme

$$\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s - \int_\varphi \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Avšak, podľa Cauchyho integrálneho vzorca je

$$\int_\varphi \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = 2\pi\mathrm{i} f(z)$$

Dosadením do poslednej rovnosti úpravou dostaneme

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left[\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma_j}\frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s\right].$$

□

Cauchyho integrálny vzorec môžeme použiť na výpočet niektorých typov integrálov.

Príklad 3.4.3. Vypočítajte $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z+1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z+\mathrm{i}|=2$.

Riešenie. Funkcia $f(z)=\mathrm{e}^z+1$ je analytická na $\mathbb{C}$, $-\mathrm{i}\in\operatorname{Int}\gamma$ a podľa Cauchyho integrálneho vzorca máme

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z+1}{z+\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\mathrm{e}^z+1\right]_{z=-\mathrm{i}} = 2\pi\mathrm{i}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}}+1).$$

□

Príklad 3.4.4. Vypočítajte $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z|=1$.

Riešenie. Funkcia $\dfrac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z^2+2z}$ je analytická na $\mathbb{C}\setminus\{0,-2\}$. Pre jej singulárne body platí: $z=0\in\operatorname{Int}\gamma$ a $z=-2\notin\operatorname{Int}\gamma$. Upravme daný integrál takto

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z(z+2)}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\frac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z+2}}{z}\,\mathrm{d}z$$

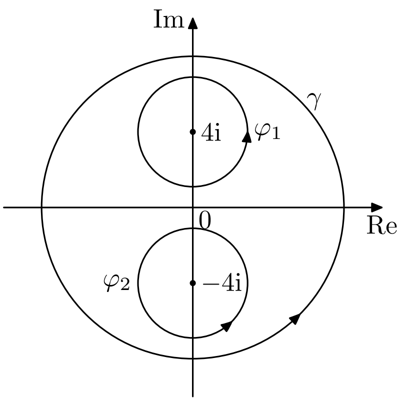
Funkcia $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z+2}$ je analytická na oblasti, ktorá obsahuje krivku γ a podľa Cauchyho integrálneho vzorca

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z^2+2z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z\cos\pi z}{z+2}\right]_{z=0} = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2} = \pi\mathrm{i}.$$

□

Príklad 3.4.5. Vypočítajte $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z|=8$.

Riešenie.



Funkcia $\dfrac{1}{z^2+16}$ má singulárne body $z=4\mathrm{i}\in\operatorname{Int}\gamma$ a $z=-4\mathrm{i}\in\operatorname{Int}\gamma$. Zoberme dve kladne orientované, nepretínajúce sa kružnice φ_1, φ_2 so stredmi v bodoch $4\mathrm{i}$, $-4\mathrm{i}$ a ležiace vo vnútri krivky γ. Podľa Cauchyho integrálnej vety pre viacnásobne súvislú oblasť platí

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z + \int_{\varphi_2} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z.$$

Na výpočet obidvoch integrálov použijeme Cauchyho integrálny vzorec a dostávame

$$\int_{\varphi_1} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} \frac{\frac{1}{z+4\mathrm{i}}}{z-4\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z+4\mathrm{i}}\right]_{z=4\mathrm{i}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\varphi_2} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} \frac{\frac{1}{z-4\mathrm{i}}}{z+4\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z-4\mathrm{i}}\right]_{z=-4\mathrm{i}} = -\frac{\pi}{4}.$$

Potom

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

□

Príklad 3.4.6. Vypočítajte $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z$, kde γ je krivka súhlasne orientovaná s parametrickým vyjadrením $z = \mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 4\pi\rangle$

Riešenie. Krivka je kružnica so stredom v bode i, polomerom 4, záporne orientovaná a 6-krát obehnutá. Označme γ_1 jednu kružnicu $z = \mathrm{i} + 4\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}t}$, $t \in \left\langle 0, \frac{2\pi}{3}\right\rangle$. Funkcia $\dfrac{1}{z^2+16}$ má singulárne body $z = 4\mathrm{i} \in \operatorname{Int}\gamma_1$ a $z = -4\mathrm{i} \notin \operatorname{Int}\gamma_1$. Potom

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = -6\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2+16}\,\mathrm{d}z = -6\int_{\gamma_1} \frac{\frac{1}{z+4\mathrm{i}}}{z-4\mathrm{i}}\,\mathrm{d}z = -12\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{z+4\mathrm{i}}\right]_{z=4\mathrm{i}} = -\frac{3\pi}{2}.$$

□

3.4.2 Zovšeobecnený Cauchyho integrálny vzorec

Z Cauchyho integrálneho vzorca odvodíme vzorec pre deriváciu analytickej funkcie a odpovieme na otázku existencie derivácií vyšších rádov analytických funkcií.

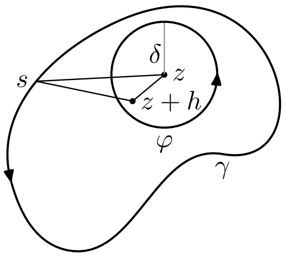
Veta 3.4.7. [Zovšeobecnený Cauchyho integrálny vzorec] Nech γ je jednoduchá, po častiach hladká, uzavretá, kladne orientovaná krivka. Nech f je analytická na jednoducho súvislej oblasti $G = \operatorname{Int}\gamma$ a spojitá na uzávere oblasti $\overline{G}$. Potom v každom bode $z \in G$ existuje derivácia ľubovoľného rádu a platí

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dôkaz. Dôkaz urobíme pre $n = 1$. Pre $n > 1$ sa dôkaz urobí matematickou indukciou, čo prenechávame čitateľovi. Máme teda dokázať, že

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s.$$

Nech z je ľubovoľný pevný bod oblasti G a zvoľme $\delta > 0$ tak, aby $U_\delta(z) \subset G$. Pre h také, že $|h| < \delta$, je $z + h \in U_\delta(z)$.



Z definície derivácie vieme, že $f'(z) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(z+h) - f(z)}{h}$.
Podľa Cauchyho integrálneho vzorca je

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s; \quad f(z+h) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-(z+h)}\,\mathrm{d}s.$$

Potom

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}\, h} \int_\gamma \left[\frac{f(s)}{s-(z+h)} - \frac{f(s)}{s-z} \right] \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}\, h} \int_\gamma \left(\frac{f(s)(s-z) - f(s)(s-z) + f(s)h}{(s-z-h)(s-z)} \right) \mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

a limitou pre $h \to 0$ máme

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)}\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)} \right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

čo sme chceli ukázať. Potrebujeme však ukázať, že „prechod“ s limitou pod znak integrálu je možný, t.j., že

$$\lim_{h\to 0} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)}\,\mathrm{d}s = \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s.$$

Posledná rovnosť bude platiť práve vtedy, keď

$$\lim_{h\to 0} \left[\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)}\,\mathrm{d}s - \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s \right] = \lim_{h\to 0} \left[\int_\gamma \frac{f(s)h}{(s-z-h)(s-z)^2}\,\mathrm{d}s \right] = 0.$$

Funkcia f je spojitá na krivke γ, preto existuje číslo $M > 0$ také, že pre všetky $s \in \gamma$ je $|f(s)| \le M$. Ak označíme $d = \inf\{|s-z|,\ s \in \gamma\}$ vzdialenosť bodu z od krivky γ, tak pre každé $s \in \gamma$ je

$$|s-z| \ge d \quad \text{a} \quad |s-z-h| \ge |s-z| - |h| \ge d - |h|.$$

Ak označíme L dĺžku krivky γ, tak

$$\left|\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z-h)(s-z)}\,\mathrm{d}s - \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s\right| = \left|\int_\gamma \frac{f(s)h}{(s-z-h)(s-z)^2}\,\mathrm{d}s\right| \leq$$
$$\leq \frac{ML|h|}{(d-|h|)d^2} \longrightarrow 0, \quad \text{pre } h \to 0.$$

To znamená, že urobená zámena limity a integrálu bola možná. □

V prípade, že krivka γ nie je uzavretá, môžeme definovať novú funkciu a podobne ako Cauchyho integrálna veta a jej zovšeobecnená veta sa dokáže nasledujúca veta.

Veta 3.4.8. *Nech $\gamma : \langle t_0, T\rangle \to \mathbb{C}$ je po častiach hladká krivka a funkcia f je spojitá na krivke γ. Potom funkcia F definovaná pre každé $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma$ predpisom*

$$F(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s$$

je analytická na $\mathbb{C}\setminus\gamma$ a na tejto množine platí

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^2}\,\mathrm{d}s.$$

Navyše pre ľubovoľné $n \in \mathbb{N}$ je n–tá derivácia $F^{(n)}$ analytická funkcia na $\mathbb{C}\setminus\gamma$ a

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}}\,\mathrm{d}s.$$

Poznámka. Integrál v definícii funkcie F sa nazýva **integrál Cauchyho typu**.

Príklad 3.4.9. Vypočítajte $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z$, kde krivka γ je kladne orientovaná kružnica:

a) $|z| = \frac{1}{2}$; b) $|z-1| = \frac{1}{2}$; c) $|z| = \frac{3}{2}$.

Riešenie. Funkcia $g(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}$ má singulárne body $z_0 = 0$, $z_1 = 1$.

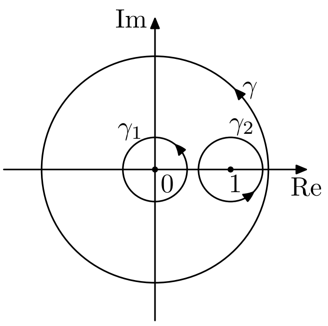
a) V tomto prípade je $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$, $z_1 \notin \operatorname{Int}\gamma$. Použijeme Cauchyho integrálny vzorec na funkciu $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}$, teda

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}\right]_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}.$$

b) V tomto prípade je $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$, $z_0 \notin \operatorname{Int}\gamma$. Použijeme zovšeobecnený Cauchyho integrálny vzorec pre $n = 2$ na funkciu $f(z) = -\frac{e^z}{z}$, čím dostávame

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z &= \int_\gamma \frac{-\frac{\mathrm{e}^z}{z}}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{2!}\left[\left(-\frac{\mathrm{e}^z}{z}\right)''\right]_{z=1} = \\ &= \pi\mathrm{i}\left[\frac{(-z^2+2z-2)\mathrm{e}^z}{z^3}\right]_{z=1} = -\pi\mathrm{e}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

c) V tomto prípade je $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma$, $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$. Zvoľme dve uzavreté, hladké, kladne orientované krivky γ_1 a γ_2, ktoré ležia vo vnútri krivky γ, každá leží vo vonkajšku druhej a také, že $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma_1$ a $z_1 \in \operatorname{Int}\gamma_2$ (napr. kružnice γ_1 : $|z - z_0| = 0{,}2$, γ_2 : $|z - z_1| = 0{,}2$. Funkcia $f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}$ a krivky γ, γ_1, γ_2 spĺňajú predpoklady Cauchyho integrálnej vety pre viacnásobne súvislú oblasť, a tak



$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z.$$

Na vypočet jednotlivých integrálov použijeme postup z prípadov a), b), t.j.

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)^3}\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(1-z)^3}}{z}\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2} \frac{-\frac{\mathrm{e}^z}{z}}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z = \pi(2-\mathrm{e})\mathrm{i}.$$

□

Zo zovšeobecneného Cauchyho integrálneho vzorca vyplýva dôležitá vlastnosť analytických funkcií, ktorá nemá v reálnej analýze analógiu. Túto vetu sme už uviedli v druhej kapitole bez dôkazu. (Tvrdenie 2.5.7)

Dôsledok 3.4.10. *Nech funkcia f je analytická na oblasti G, potom má na G všetky derivácie a každá jej derivácia je analytická funkcia na G.*

Dôkaz. Ak funkcia f je analytická v bode $z_0 \in G$, tak existuje okolie $U_\delta(z_0)$ tohto bodu také, že f má na ňom deriváciu. Ak zoberieme napr. krivku $\gamma : z = z_0 + \frac{\delta}{2}e^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, tak krivka γ a funkcia f spĺňajú predpoklady Vety 3.4.7, a preto v ľubovoľnom bode $z \in U_{\frac{\delta}{2}} \subset \operatorname{Int}\gamma$ existuje derivácia ľubovoľného rádu funkcie f. To znamená, že funkcia $f^{(n)}$ je analytická v bode z_0. □

Uvedieme niekoľko ďalších dôsledkov Cauchyho integrálneho vzorca.

Veta 3.4.11 (Liouvillova veta)**.** *Nech funkcia f je analytická a ohraničená na celej komplexnej rovine. Potom f je konštantná funkcia.*

Dôkaz. Funkcia f je ohraničená na $\mathbb{C}$, to znamená, že existuje $M > 0$ také, že pre všetky $z \in \mathbb{C}$ je $|f(z)| < M$. Nech z_0 je ľubovoľné číslo. Opíšme okolo z_0 kružnicu γ s polomerom R. Podľa Vety 3.4.7 dostaneme

$$|f'(z_0)| = \left|\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\right| \left|\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{2\pi}\frac{M}{R^2}2\pi R = \frac{M}{R}.$$

Keďže R môžeme voliť ľubovoľne veľké, dostaneme $|f'(z_0)| = 0$. Potom však $f'(z_0) = 0$. Pretože z_0 bol ľubovoľný bod, je $f'(z) = 0$, a teda $f(z)$=konšt. □

Poznámka. Na základe tejto vety sú funkcie $\sin z$, $\cos z$ neohraničené.

Veta 3.4.12 (Základná veta algebry)**.** *Algebrická rovnica*

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

stupňa $n \ge 1$, kde $a_0 \ne 0$, a_1, a_2, $\ldots$, a_n sú komplexné čísla, má aspoň jeden koreň.

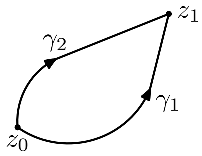
Dôkaz. Dôkaz urobíme sporom. Predpokladajme, že neexistuje číslo z, pre ktoré platí $P(z) = 0$. Potom funkcia

$$f(z) = \frac{1}{P(z)} = \frac{1}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n}$$

je analytická na celej komplexnej rovine. Pretože $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$, k ľubovoľnému $\varepsilon > 0$ existuje čislo $K > 0$ také, že pre všetky z také, že $|z| > K$, je $|f(z)| < \varepsilon$. V kruhu $|z| \le K$ je funkcia f spojitá, preto tiež ohraničená. Dostali sme, že funkcia f je analytická a ohraničená na celej komplexnej rovine. Podľa Liouvillovej vety je potom f konštantná funkcia, čo nie je možné, pretože $a_0 \ne 0$ a v menovateli je člen $a_0 z^n$. □

3.5 Nezávislosť integrálu od integračnej cesty. Neurčitý integrál

Z Cauchyho integrálnej vety vyplýva, že integrály analytickej funkcie f v jednoducho súvislej oblasti G po ľubovoľných dvoch krivkách, ktoré majú spoločný začiatočný bod z_0 a koncový bod z, sú rovnaké.



Skutočne, ak krivky γ_1, γ_2 majú spoločný začiatočný bod z_0 a koncový bod z, potom krivka $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2^*$ je uzavretá, orientovaná krivka a platí

$$0 = \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_2^*} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z - \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Odkiaľ potom plynie, že

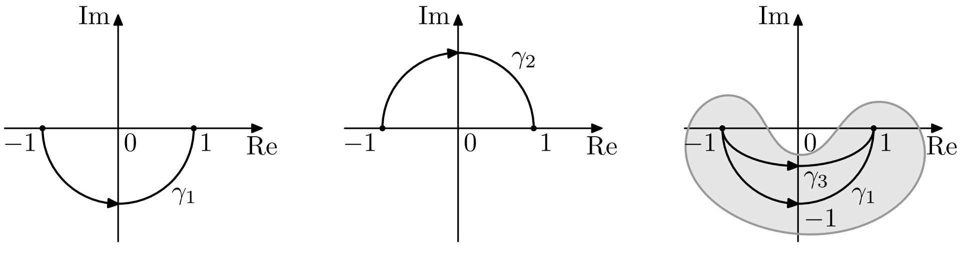
$$\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Túto úvahu môžeme zhrnúť do tvrdenia:

Veta 3.5.1. *Nech funkcia f je analytická v jednoducho súvislej oblasti G, potom integrál funkcie f nezávisí v oblasti G od tvaru integračnej krivky.*

Táto vlastnosť neplatí pre viacnásobne súvislú oblasť. Zoberme funkciu $f(z) = \dfrac{1}{z}$ a dve krivky s počiatočným bodom $z_0 = -1$ a koncovým $z = 1$ a vypočítajme príslušné integrály. Napríklad pre krivku γ_1: $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle -\pi, 0\rangle$ je

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{-\pi}^{0} \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}} = \mathrm{i}\,[t]_{-\pi}^{0} = \pi\mathrm{i},$$



ale pre krivku γ_2: $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$, $t \in \langle -\pi, 0\rangle$ je

$$\int_{\gamma_2} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{-\pi}^{0} \frac{-\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}} = -\mathrm{i}\,[t]_{-\pi}^{0} = -\pi\mathrm{i}.$$

Nula je jediný singulárny bod funkcie $f(z) = \dfrac{1}{z}$ a ľubovoľná oblasť G, v ktorej ležia krivky γ_1, γ_2, je dvojnásobne súvislá.

Ak zoberieme krivku γ_3: $z = \cos t + \frac{\mathrm{i}}{2}\sin t$, $t \in \langle -\pi, 0\rangle$, tak pre krivky γ_1, γ_3 existuje jednoducho súvislá oblasť, ktorá obsahuje tieto krivky a na ktorej je funkcia f analytická. Potom

$$\int_{\gamma_1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_{\gamma_3} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \pi\mathrm{i}.$$

Je zrejmé, že platí nasledujúca veta.

Veta 3.5.2. *Integrál funkcie f nezávisí v oblasti G od integračnej cesty práve vtedy, keď pre každú uzavretú krivku γ v oblasti G platí $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.*

Ak integrál funkcie f nezávisí v oblasti G od tvaru integračnej krivky, len od počiatočného bodu z_0 a koncového bodu z, tak pre tento integrál môžeme použiť označenie

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Ak z_0 je pevný bod a z ľubovoľný bod jednoducho súvislej oblasti, potom je tento integrál funkciou hornej hranice. Pre túto funkciu platí nasledujúca veta.

Veta 3.5.3. *Nech funkcia f je spojitá v jednoducho súvislej oblasti G a nech pre ľubovoľnú uzavretú krivku γ platí $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Potom funkcia F definovaná pre každé $z \in G$ predpisom*

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s,$$

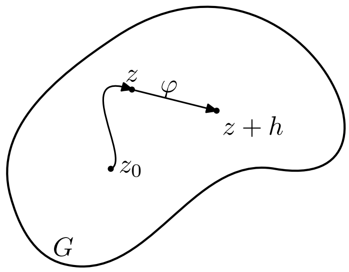
kde z_0 je ľubovoľný bod oblasti G, je analytická na G a platí $F'(z) = f(z)$.

Dôkaz. Predpoklady vety zaručujú, že integrál funkcie f v oblasti G nezávisí od tvaru integračnej krivky. Preto je funkcia F jednoznačne daná.

Ukážeme, že funkcia F má v každom bode oblasti G deriváciu, t. j.

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Nech $z \in G$ je ľubovoľný bod a $0 \neq h \in \mathbb{C}$ je ľubovoľné také, že bod $z + h \in G$. Upravme rozdiel $F(z+h) - F(z)$:



$$\begin{aligned}
F(z+h)-F(z) &= \int\limits_{z_0}^{z+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s + \int\limits_{z}^{z+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_{z}^{z+h} f(s)\,\mathrm{d}s = \int\limits_{z}^{z+h} [f(z)+f(s)-f(z)]\;\mathrm{d}s \\
&= f(z)\int\limits_{z}^{z+h} \mathrm{d}s + \int\limits_{z}^{z+h} [f(s)-f(z)]\;\mathrm{d}s = f(z)h + \int\limits_{z}^{z+h} [f(s)-f(z)]\;\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Odtiaľ

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} [f(s)-f(z)]\;\mathrm{d}s.$$

Integrál na pravej strane nezávisí od integračnej cesty, a preto môžeme za integračnú cestu zvoliť úsečku φ: $s = z + ht$, $t \in \langle 0,1\rangle$. Funkcia f je spojitá v ľubovoľnom bode $z \in G$, to znamená

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall s \in G\ : |s-z| < \delta \to |f(s)-f(z)| < \varepsilon.$$

Ak zoberieme h také, že $|h| < \delta$, tak pre ľubovoľný bod $s \in \varphi$ je $|s-z| < |h| < \delta$ a môžeme urobiť odhad

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{|h|}\left|\int\limits_{z}^{z+h} \mathrm{d}s\right| = \frac{\varepsilon}{|h|}\,|h| = \varepsilon.$$

To znamená, že pre každý bod $z \in G$ platí

$$F'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z).$$

$\square$

Uvedieme vetu, ktorá je v istom zmysle obrátená veta ku Cauchyho vete.

Veta 3.5.4. [Morerova veta] Nech funkcia f je spojitá v jednoducho súvislej oblasti G a nech pre ľubovoľnú uzavretú krivku γ platí $\int\limits_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$. Potom je funkcia f analytická v oblasti G.

Dôkaz. Podľa Vety 3.5.3 platí, že v nej definovaná funkcia $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\mathrm{d}s$ je analytická v G, pričom $F'(z) = f(z)$. Keďže F je analytická na G, tak aj jej derivácie ľubovoľného rádu sú analytické na G (Dôsledok 3.4.10), čo znamená, že f je analytická na G. □

Nech G je oblasť. Vieme, že analytickú funkciu F, pre ktorú platí $F'(z) = f(z)$, $z \in G$, nazývame primitívna funkcia k funkcii f na oblasti G. Ako v reálnej analýze platí, že ak funkcia F je primitívna k funkcii f, potom každá primitívna funkcia k funkcii f sa líši od F o konštantu. Potom množina všetkých primitívnych funkcií k funkcii f sa nazýva **neurčitý integrál** z funkcie f a označuje sa

$$\int f(z)\,\mathrm{d}z = F(z) + k,\;\; k \in \mathbb{C}.$$

Vzhľadom na derivácie elementárnych funkcií platia pre neurčité integrály tie isté vzorce ako pri funkciách reálnej premennej. Napr.

$$\int \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z = \mathrm{e}^z + k; \qquad \int \sin z\,\mathrm{d}z = \cos z + k.$$

Nasledujúca veta odpovedá na otázku existencie primitívnej funkcie.

Veta 3.5.5. *Nech funkcia f je spojitá v jednoducho súvislej oblasti G. Funkcia f má v oblasti G primitívnu funkciu práve vtedy, keď krivkový integrál funkcie f nezávisí v oblasti G od tvaru integračnej krivky.*

Dôkaz. Nech funkcia F je primitívna k funkcii f na oblasti G, t.j $F'(z) = f(z)$, $z \in G$. Podľa Dôsledoku 3.4.10 je funkcia f analytická na G a podľa Vety 3.5.1 integrál funkcie f nezávisí v oblasti G od tvaru integračnej krivky.

Nech teraz integrál funkcie f nezávisí v oblasti G od tvaru integračnej krivky. Podľa Vety 3.5.2 pre ľubovoľnú uzavretú krivku γ, ktorá leží v oblasti G, je $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ a podľa Vety 3.5.3 je tam definovaná funkcia F vzťahom $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\mathrm{d}s$ primitívna funkcia k funkcii f na oblasti G. □

Z predchádzajúcich viet vyplýva:

Veta 3.5.6. *Ak je funkcia f analytická v jednoducho súvislej oblasti, potom k nej existuje primitívna funkcia.*

Podľa Vety 3.5.3 jednou z primitívnych funkcií k funkcii f je funkcia daná vzťahom $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\mathrm{d}s$. Potom pre ľubovoľnú primitívnu funkciu Φ k funkcii f platí

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(z) + k.$$

Ak v poslednej rovnosti položíme $z = z_0$, dostaneme $k = -\Phi(z_0)$, a teda

$$\int\limits_{z_0}^{z} f(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(z) - \Phi(z_0) = [\Phi(z)]_{z_0}^{z}\,.$$

Vzorec, ktorý sme dostali, sa nazýva, v zhode s reálnou analýzou, Newtonov–Leibnizov vzorec.

Príklad 3.5.7. Vypočítajte $\int\limits_{0}^{\mathrm{i}} z\sin z\mathrm{d}z$.

Riešenie. Funkcia $f(z) = z\sin z$ je analytická v celej komplexnej rovine, preto integrál nezávisí od tvaru integračnej krivky. Závisí len od začiatočného bodu $z = 0$ a koncového $z = \mathrm{i}$. Funkcia $F(z) = -z\cos z + \sin z$ je primitívna funkcia k funkcii f. Podľa Newtonovho–Leibnizovho vzorca je

$$\int\limits_{0}^{\mathrm{i}} z\sin z\mathrm{d}z = [-z\cos z + \sin z]_0^{\mathrm{i}} = \sin\mathrm{i} - \mathrm{i}\cos\mathrm{i}.$$

□

Pozrime sa ešte na existenciu primitívnej funkcie k funkcii $f(z) = \frac{1}{z}$. Vypočítajme $\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$, kde krivka γ je kladne orientovná kružnica $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}.$$

Integrál funkcie $f(z) = \frac{1}{z}$ po uzavretej krivke γ sa nerovná nule. To znamená, že funkcia f nemá primitívnu funkciu v oblasti, ktorá obsahuje krivku γ. Vieme však, že v oblasti, ktorá neobsahuje 0, je $\lg' z = \frac{1}{z}$. Z definície logaritmu ďalej vieme, že existuje nekonečne veľa jednoznačných vetiev logaritmu $\mathrm{Lg} z = \ln|z| + \mathrm{i}\,(\arg z + 2k\pi)$. Zvykne sa označovať jednoznačná k-ta vetva logaritmu

$$\mathrm{Lg}_{\,k} z = \ln|z| + \mathrm{i}\,(\arg z + 2k\pi)\,.$$

Vyjadrime teraz logaritmickú funkciu cez integrál. Uvedieme vetu o existencii jednoznačnej vetvy logaritmu.

Veta 3.5.8. *Nech G je jednoducho súvislá oblasť neobsahujúca bod $z = 0$. Potom v G existuje jednoznačná vetva logaritmu a každá takáto vetva sa dá vyjadriť pomocou integrálu*

$$\mathrm{Lg}_k z = \int_a^z \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s + \mathrm{Lg}_k a,$$

kde a je ľubovoľný pevný bod oblasti G, z je ľubovoľný bod G a $k \in \mathbb{Z}$. Potom pre každú vetvu logaritmu platí

$$(\mathrm{Lg}_k z)' = \frac{1}{z}.$$

Dôkaz. Funkcia $f(z) = \frac{1}{z}$ je analytická na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a preto má v oblasti G primitívnu funkciu. Hodnota integrálu $\int_a^z \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s$ nezávisí od tvaru krivky a je v oblasti G analytickou funkciou hornej hranice z. Potom aj funkcia

$$l(z) = \int_a^z \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s + \mathrm{Lg}_k a$$

je analytická v oblasti G, pretože $\mathrm{Lg}_k a$ je konštanta. Pre túto funkciu platí: $l(a) = \mathrm{Lg}_k a$, $l'(z) = \frac{1}{z}$, $z \in G$.

Ukážeme, že funkcia l je inverzná funkcia k exponenciálnej funkcii, t.j.

$$\mathrm{e}^{l(z)} = z, \qquad \text{resp.} \quad \frac{\mathrm{e}^{l(z)}}{z} = 1 \ \text{ pre každé } z \in G.$$

Ale

$$\left[\frac{\mathrm{e}^{l(z)}}{z}\right]' = \frac{z\mathrm{e}^{l(z)} l'(z) - \mathrm{e}^{l(z)}}{z^2} = \frac{\mathrm{e}^{l(z)} - \mathrm{e}^{l(z)}}{z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{e}^{l(z)}}{z} = \text{konšt.}$$

Konštantu určíme dosadením $z = a$

$$\frac{e^{l(a)}}{a} = \frac{e^{\mathrm{Lg}_k(a)}}{a} = \frac{a}{a} = 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ukázali sme, že existuje nekonečne veľa vetiev logaritmickej funkcie, inverznej k exponenciálnej, odpovedajúcich všetkým hodnotám $\mathrm{Lg}_k(a)$. □

Špeciálne pre hlavnú hodnotu logaritmu máme

$$\ln z = \int_a^z \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s + \ln a.$$