4 Postupnosti a rady funkcií komplexnej premennej

Z reálnej analýzy je možné preniesť do oblasti postupnosti a radov funkcií komplexnej premennej definície základných pojmov, ako sú konvergencia, obor konvergencie, rovnomerná konvergencia. Teraz ich v krátkosti pripomenieme.

Nech funkcie komplexnej premennej f_n, $n \in \mathbb{N}$ sú definované na množine $M \subset \mathbb{C}$.

- Hovoríme, že postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje v bode $z_0 \in M$, ak je konvergentná číselná postupnosť $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Množinu všetkých $z \in M$, v ktorých postupnosť $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konverguje, nazývame obor konvergencie postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
- Nech D je obor konvergencie postupnosti funkcií $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Funkciu f definovanú na D tak, že pre každé $z \in D$ je $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$, nazývame limitná funkcia.
- Postupnosť funkcií $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ rovnomerne konverguje k funkcii f na množine D, ak

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0 \ \forall z \in D \to |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

- Hovoríme, že funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje v bode z_0, ak v tomto bode konverguje číselný rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Oborom konvergencie D funkcionálneho radu je množina všetkých komplexných čísel, v ktorých funkcionálny rad konverguje. Funkciu s definovanú na D rovnosťou $s(z) = \lim\limits_{n\to\infty} s_n(z)$, kde $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ je postupnosť čiastočných súčtov funkcionálneho radu, nazývame súčet radu.
- Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D, ak rovnomerne konverguje na D jeho postupnosť čiastočných súčtov $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Pre rovnomernú konvergenciu radov platí Cauchyho-Bolzanovo kritérium a Weierstrassovo kritérium. Ich dôkazy sa zhodujú s dôkazmi v reálnom obore.

Veta 4.0.9. [C-B podmienka pre rovnomernú konvergenciu radov funkcií] Rad funkcií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D práve vtedy, keď pre každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ také, že pre všetky $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, ľubovoľné $m \in \mathbb{N}$ a každé $z \in D$ platí

$$\left|\sum_{k=1}^{m} f_{n+k}(z)\right| = |f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \ldots f_{n+m}(z)| < \varepsilon.$$

Veta 4.0.10. [Weierstrassovo kritérium] Nech pre každé $z \in D$ a všetky $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|f_n(z)| \leq a_n.$$

Ak číselný rad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, potom rad funkcií $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ rovnomerne konverguje na množine D.

Pomocou Cauchyho–Bolzanovho kritéria sa ľahko ukáže, že násobenie radu ohraničenou funkciou neporuší jeho rovnomernú konvergenciu (urobte to!).

Veta 4.0.11. *Nech rad funkcií* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje na množine* D *a funkcia* g *je definovaná a ohraničená na* D. *Potom rad* $\sum_{n=1}^{\infty} (g \cdot f_n)$ *rovnomerne konverguje na* D.

Pre vlastnosti súčtu funkcionálneho radu sú dôležité nasledujúce vety. Pokiaľ je dôkaz vety analogický ako v reálnom obore, tak ho vynecháme.

Veta 4.0.12. *Nech funkcie* f_n *sú spojité na množine* D *a rad* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje k funkcii* f *na množine* D. *Potom funkcia* f *je spojitá na množine* D.

Veta 4.0.13. *Nech* γ *je jednoduchá krivka konečnej dĺžky. Nech funkcie* f_n *sú spojité na krivke* γ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *rovnomerne konverguje k funkcii* f *na krivke* γ. *Potom môžeme rad integrovať člen po člene, t.j. platí*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) \mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Dôkaz. Podľa Vety 4.0.12 je súčet radu, funkcia f, spojitá na krivke γ, a tak existuje integrál funkcie f na krivke γ. Označme $R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z)$, $s_n(z) = \sum_{k=1}^{n} f_k(z)$ a upravme

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\,\mathrm{d}z = \int_\gamma (f(z) - s_n(z))\,\mathrm{d}z = \int_\gamma R_n(z)\,\mathrm{d}z. \tag{4.1}$$

Keďže rad rovnomerne konverguje na krivke γ, tak

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\, \forall z \in \gamma \to |R_n(z)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Ak l je dĺžka krivky γ, tak $\left|\int_\gamma R_n(z)\,\mathrm{d}z\right| < \varepsilon l$. Zo vzťahu (4.1) potom máme

$$\left| \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=1}^{n} \int_\gamma f_k(z)\,\mathrm{d}z \right| < \varepsilon l.$$

Pretože ε je ľubovoľne malé číslo, posledná nerovnosť znamená, že

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_\gamma f_k(z)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty}\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z=\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z.$$

□

Veta o derivácií komplexného funkcionálneho radu je odlišná od reálneho prípadu. Dôkaz vety nebudeme robiť, dá sa nájsť napr. v [1].

Veta 4.0.14. *Nech funkcie f_n, $n\in\mathbb{N}$, sú analytické v oblasti G, funkcionálny rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ konverguje na G a rovnomerne konverguje na ľubovoľnej uzavretej množine $\overline{G_1}\subset G$, kde $\overline{G_1}=G_1\cup\gamma_1$, G_1 je jednoducho súvislá oblasť a γ_1 je hranica oblasti G_1. Potom:*

1. *súčet radu $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ je analytická funkcia v oblasti G;*
2. *funkcionálny rad môžeme derivovať v oblasti G člen po člene, t.j.*

$$\forall z\in G\ \ f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z),$$

pričom rad derivácií $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ rovnomerne konverguje k funkcii f' na $\overline{G_1}$.

4.1 Mocninové rady

Funkcionálny rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \tag{4.3}$$

kde c_n, $n=0,1,2,\dots$ a z_0, z sú komplexné čísla, sa nazýva **mocninový rad** komplexnej premennej. Číslo z_0 sa nazýva **stred** a c_n, $n=0,1,2,\dots$, **koeficienty** mocninového radu.

Obor konvergencie každého mocninového radu je neprázdna množina (konverguje aspoň vo svojom strede). Mocninové rady komplexnej premennej majú vlastnosti, ktoré sa dokazujú rovnako ako v reálnej analýze, preto ich len vyslovíme.

Veta 4.1.1. *Ak rad* (4.3) *konverguje v komplexnom čísle $z_1\neq z_0$, potom konverguje v každom komplexnom čísle z, pre ktoré platí $|z-z_0|<|z_1-z_0|$. Naviac tento rad konverguje absolútne.*

Dôsledok 4.1.2. *Ak rad* (4.3) *diverguje v komplexnom čísle z_2, potom diverguje v každom z, pre ktoré platí $|z-z_0|>|z_2-z_0|$.*

Z týchto vlastností vyplýva, že ku každému mocninovému radu (4.3) existuje číslo R ($0 \leq R \leq +\infty$) také, že tento rad absolútne konverguje vo vnútri kruhu $K(z_0, R)$ s polomerom R a stredom z_0 a diverguje v každom čísle, ktoré leží vo vonkajšku tohto kruhu. Číslo R sa nazýva **polomer konvergencie** radu (4.3) a kruh $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| < R\}$ sa nazýva **kruh konvergencie** mocninového radu. Ak $R = 0$, tak $K(z_0, R) = \{z_0\}$. Kružnica $|z - z_0| = R > 0$ sa nazýva **konvergenčná kružnica** a vo všeobecnosti do oboru konvergencie nepatrí.

Polomer konvergencie môžeme vypočítať pomocou nasledujúcej vety.

Veta 4.1.3. *Nech* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = L$, *resp.* $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L$. *Potom polomer konvergencie radu* (4.3) *je* $R = \dfrac{1}{L}$, *ak* $L \neq 0$ *a* $R = +\infty$, *ak* $L = 0$. *Ak* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$, *potom* $R = 0$.

Príklad 4.1.4. Určte polomer konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{(n+1)(n+2)}(z-2)^n$.

Riešenie. Vypočítajme

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = |1+\mathrm{i}| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+3} = \sqrt{2}.$$

Potom polomer konvergencie $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$, kruh konvergencie $K\left(2, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \{z; |z-2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

□

Príklad 4.1.5. Nájdite polomer konvergencie a obor konvergencie radu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$.

Riešenie. Vypočítajme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n})^2} = 1.$$

Potom konvergencie je $R = 1$ a kruh konvergencie $K(0,1) = \{z;\ |z| < 1\}$. Aby sme našli obor konvergencie, potrebujeme zistiť, ako sa správa rad v bodoch konvergenčnej kružnice $\{z;\ |z| = 1\}$. Pre všetky také z je

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ konverguje,}$$

to znamená, že rad absolútne konverguje na kovergenčnej kružnici. Obor konvegrencie radu je teda kruh $|z| \leq 1$. □

Pre rovnomernú konvergenciu mocninových radov platí tvrdenie (dôkaz ako v reálnej analýze):

Veta 4.1.6. *Nech $R > 0$ je polomer konvergencie mocninového radu* (4.3)*. Potom rad* (4.3) *konverguje rovnomerne na každom kruhu $|z - z_0| \leq r$, kde r je ľubovoľné kladné číslo menšie ako R.*

Súčet mocninového radu má nasledujúce vlastnosti:

Veta 4.1.7. *Nech mocninový rad* (4.3) *má polomer konvergencie $R > 0$ a jeho súčet je funkcia f. Potom*

a) f je funkcia analytická na kruhu konvergencie $K(z_0, R)$;

b) mocninový rad môžeme derivovať člen po člene a pre každý bod $z \in K(z_0, R)$ a ľubovoľné $k \in \mathbb{N}$ platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k},$$

pričom sa nemení polomer konvergencie radov k-tych derivácií;

c) mocninový rad môžeme integrovať člen po člene na ľubovoľnej krivke $\gamma \subset K(z_0, R)$. Keďže $\int_\gamma c_n (z - z_0)^n \mathrm{d}z$ nezávisí na tvare krivky, tak pre krivky so začiatočným bodom z_0 a koncovým $z \in K(z_0, R)$ platí

$$\int_{z_0}^{z} f(s)\, \mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1},$$

pričom sa nezmení polomer konvergencie radu.

4.2 Taylorov rad

Vieme, že súčet mocninového radu je analytická funkcia v kruhu konvergencie a má derivácie ľubovoľného rádu. Potom, ak funkcia s je súčet mocninového radu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ s kruhom konvergencie $K(z_0, R)$, tak platí

$$c_n = \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Mocninový rad, ktorého súčet je funkcia s môžeme zapísať v tvare

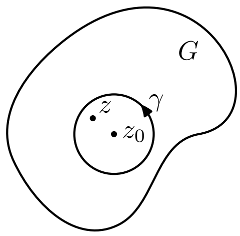
$$s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n.$$

Tento rad nazývame **Taylorov rad** funkcie s v bode z_0.

Zaujíma nás, či to platí aj opačne: ak máme funkciu analytickú v bode z_0, či ju môžeme na nejakom okolí bodu z_0 vyjadriť ako súčet mocninového radu so stredom v bode z_0.

Veta 4.2.1. [Taylorova veta] *Nech funkcia f je analytická v oblasti G a nech bod z_0 je ľubovoľný bod oblasti G. Potom Taylorov rad funkcie f v bode z_0 konverguje v každom kruhu $K(z_0, R)$, ktorý leží v oblasti G a jeho súčet v každom bode $z \in K(z_0, R)$ je rovný $f(z)$ (t.j. polomer konvergencie je rovný aspoň vzdialenosti bodu z_0 od hranice oblasti G).*

Dôkaz. Funkcia f je analytická na G. Zoberme ľubovoľný bod $z_0 \in G$ a kladne orientovanú kružnicu $\gamma : |s - z_0| = r$ takú, aby celá aj so svojim vnútrom ležala v oblasti G.



Vnútro kružnice γ je jednoducho súvislá oblasť a podľa Cauchyho integrálnej formuly sa hodnota funkcie f v ľubovoľnom bode $z \in \operatorname{Int}\gamma$ dá vyjadriť nasledovne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s - z}\, \mathrm{d}s. \tag{4.4}$$

Ak využijeme skutočnosť, že $z \in \operatorname{Int}\gamma$, t.j. platí $|z - z_0| < |s - z_0|$, môžeme zlomok $\frac{1}{s-z}$ vyjadriť ako súčet mocninového radu. Upravme

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{s - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} = \frac{1}{s - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{s - z_0} \right)^n .$$

Ak sa na rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n$ pozeráme ako na rad funkcií premennej s, pričom $s \in \gamma$, tak tento rad konverguje absolútne, lebo $\left| \frac{z-z_0}{s-z_0} \right| = q < 1$ pre každé $s \in \gamma$ a podľa Weierstrassovho kritéria konverguje aj rovnomerne na kružnici γ. Funkcia f je analytická na oblasti G, $\gamma \subset G$, a tak je f spojitá a ohraničená na krivke γ. Potom rad so súčtom

$$\frac{f(s)}{s-z} = f(s) \left[\frac{1}{s - z_0} + \frac{z - z_0}{(s - z_0)^2} + \cdots + \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}} \cdots \right]$$

je rad spojitých funkcií, rovnomerne konvergentný na krivke γ, teda ho môžeme integrovať člen po člene. Dosadením do vzťahu (4.4) dostaneme vzhľadom na zovšeobecnenú

Cauchyho integrálnu formulu, že pre každé $z \in \operatorname{Int}\gamma$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{s-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{s-z_0}\right)^n \mathrm{d}s =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Tým sme dokázali, že Taylorov rad funkcie f konverguje v každom bode $z \in \operatorname{Int}\gamma$ a jeho súčet je rovný $f(z)$. □

Poznámka. Táto veta dáva zároveň inú možnosť určenia kruhu konvergencie. Stačí vedieť, kde je funkcia f analytická. Ak je analytická v celej komplexnej rovine, tak polomer konvergencie Taylorovho radu je $R = +\infty$. Ak je analytická v bode z_0 a nie je analytická na celej komplexnej rovine, tak polomer konvergencie sa rovná vzdialenosti najbližšieho singulárneho bodu z_1 od bodu z_0, t.j. $R = |z_1 - z_0|$. Konvergenčná kružnica prechádza singulárnym bodom funkcie f, ktorý je najbližší k stredu z_0.

Dôsledok 4.2.2. [o jednoznačnosti rozkladu] Ak existuje rozklad funkcie f v okolí bodu z_0 do mocninového radu, potom je tento rozklad jediný.

Tak ako v reálnej analýze platia Taylorove rozvoje so stredom v bode $z_0 = 0$:

1. $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$
2. $\mathrm{e}^z = 1 + z + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C};$
3. $\sin z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C};$
4. $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C};$
5. $\lg(1+z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n} + \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}, \quad |z| < 1;$
6. $\operatorname{arctg} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1.$

Posledné dva vzťahy platia pre spojité jednoznačné vetvy logaritmu a arkustangensu určené podmienkami $\operatorname{Lg}1 = \ln 1 = 0$, $\operatorname{Arctg} 0 = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

Príklad 4.2.3. Nájdite Taylorov rozvoj funkcie $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$ so stredom v bode $z_0 = 0$.

Riešenie. Funkcia f má singulárny bod $z = -1$, preto polomer konvergencie Taylorovho radu bude $R = |-1 - 0| = 1$. Na nájdenie rozvoja máme tri spôsoby riešenia:

1. vypočítať koeficienty $c_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$;

2. vypočítať koeficienty $c_n = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{i}} \displaystyle\int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}s$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z-z_0| = r \in (0,1)$;
3. použitím známych rozvojov, to znamená algebricky, upraviť danú funkciu a použiť Vetu o jednoznačnosti rozkladu. Upravme funkciu

$$\frac{z-1}{z+1} = 1 - 2\frac{1}{z+1} = 1 - 2\frac{1}{1-(-z)}$$

a použime známy rozvoj

$$\begin{aligned} \frac{z-1}{z+1} &= 1 - 2\frac{1}{1-(-z)} = 1 - 2\left[1 - z + z^2 - z^3 + \dots + (-1)^n z^n + \dots\right] \\ &= -1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} z^n, \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

Takýto spôsob určenia rozvoja sa dá spätne použiť na výpočet integrálov

$$\int_\gamma \frac{\frac{z-1}{z+1}}{z^n}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\, c_{n-1} = 2\pi\mathrm{i} \cdot 2(-1)^n = 4\pi\mathrm{i}(-1)^n,\ n \in \mathbb{N}.$$

□

4.3 Nulové body analytických funkcií

Ak je funkcia f analytická v bode $z_0 \in \mathbb{C}$, tak v nejakom okolí tohto bodu existuje jej Taylorov rozvoj so stredom v bode z_0

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots . \tag{4.5}$$

Ak $f(z_0) = 0$, tak bod z_0 nazývame **nulový bod** funkcie f. V tomto prípade má Taylorov rad so stredom v bode z_0 tvar

$$f(z) = c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots + c_n(z-z_0)^n + \dots .$$

Ak v Taylorovom rade funkcie f v bode z_0 platí $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ a $c_n \neq 0$, t.j. má tvar

$$f(z) = c_n(z-z_0)^n + c_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots , \tag{4.6}$$

tak bod z_0 nazývame ***n* –násobný nulový bod** funkcie f.

Z Taylorovho rozvoja vyplýva, že bod z_0 je n –násobný nulový bod funkcie f práve vtedy, keď $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ a $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Rozvoj (4.6) môžeme zapísať v tvare

$$f(z) = (z-z_0)^n \left(c_n + c_{n+1}(z-z_0) + c_{n+2}(z-z_0)^2 + \dots\right) = (z-z_0)^n \varphi(z),$$

kde funkciu φ definujeme ako súčet mocninového radu v zátvorke, ktorý má ten istý polomer konvergencie ako pôvodný rad (4.5). Funkcia φ je analytická v bode z_0 a ten nie je jej nulový bod, pretože $\varphi(z_0) = c_n \neq 0$.

Platí aj obrátené tvrdenie. Ak predpis funkcie f môžeme na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(z_0) \neq 0$ a funkcia φ je analytická v bode z_0, potom bod z_0 je n–násobný nulový bod funkcie f. Skutočne, funkcia φ analytická v bode z_0 sa dá v okolí tohto bodu rozvinúť do Taylorovho radu

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z - 0)^2 + \dots,$$

pričom $b_0 \neq 0$ a dostaneme

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z) = b_0(z - z_0)^n + b_1(z - z_0)^{n+1} + b_2(z - z_0)^{n+2} + \dots$$

Tento Taylorov rad funkcie f má tvar (4.6), čo znamená, že z_0 je n–násobný nulový bod funkcie f. Dokázali sme tak nasledujúcu vetu.

Veta 4.3.1. *Nech funkcia f je analytická v bode $z_0 \in \mathbb{C}$. Bod z_0 je n–násobný nulový bod funkce f práve vtedy, keď funkcia f sa dá na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde funkcia φ je analytická v bode z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$.*

Ako teda vyzerajú nulové body analytických funkcií? Odpoveď je uvedená v tvrdení.

Veta 4.3.2. *Nech funkcia f je analytická v bode z_0, ktorý je jej nulovým bodom. Potom buď $f = 0$ na nejakom okolí bodu z_0 alebo existuje také prstencové okolie bodu z_0, ktoré neobsahuje viac nulových bodov funkcie f.*

Dôkaz. Nech funkcia f má Taylorov rozvoj $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)$ v kruhu $K(z_0, r)$, $r > 0$. Pre koeficienty c_n môžu nastať dva prípady:

1) pre $n = 0, 1, \dots$ sú $c_n = 0$, potom $f = 0$ v kruhu $K(z_0, r)$;

2) existuje prirodzené číslo $n \geq 1$ také, že $c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0$ a $c_n \neq 0$. To znamená, že bod z_0 je n–násobný nulový bod funkcie f, a tak existuje okolie $U(z_0)$ bodu z_0 také, že pre každý bod $z \in U(z_0)$ platí $f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, kde φ je analytická funkcia v bode z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$. Pretože φ je spojitá funkcia v bode z_0, existuje okolie $U_1(z_0) \subset U(z_0)$ také, že $\varphi(z) \neq 0$ pre $z \in U_1(z_0)$. Potom pre každé $z \in U_1(z_0) \setminus \{z_0\}$ je $f(z) \neq 0$. □

Uvedená veta hovorí, že:

- nulové body nekonštantnej analytickej funkcie sú izolované;

- ak $G \subset \mathbb{C}$ je ohraničená oblasť a f je nekonštantná analytická funkcia na G, potom funkcia f má v oblasti G konečný počet nulových bodov.

Príklad 4.3.3. Určte násobnosť nulového bodu $z = 0$ funkcie $f(z) = z - \sin z$.

Riešenie. Nájdeme Taylorov rozvoj funkcie f v okolí bodu $z = 0$.

$$z - \sin z = z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots\right) = z^3 \left(\frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} + \dots\right) = z^3\varphi(z),$$

kde funkcia φ je analytická v bode $z = 0$ (ako súčet mocninového radu v zátvorke) a $\varphi(0) = \frac{1}{3!}$. Preto $z = 0$ je 3–násobný nulový bod funkcie f podľa Vety 4.3.1. □

4.4 Laurentov rad

Budeme sa zaoberať rozvojom analytickej funkcie v prstencovom okolí jej izolovaného singulárneho bodu. Pripomeňme, že bod z_0, v okolí ktorého je funkcia f analytická, nazývame regulárny bod funkcie f. Bod z_0 nazývame singulárny bod funkcie f, ak funkcia f nemá deriváciu v bode z_0 (napr. nulový bod menovateľa podielu analytických funkcií) a nazývame ho izolovaný singulárny bod, ak funkcia f je analytická na nejakom prstencovom okolí bodu z_0. Zaveďme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \tag{4.7}$$

ktorý budeme tiež nazývať nekonečným radom so stredom v bode z_0. Pozrime sa na jeho konvergenciu.

Definícia 4.4.1. Hovoríme, že rad (4.7) konverguje v bode z, resp. na množine $M \subset \mathbb{C}$, ak konvergujú v bode z, resp. na množine M, rady

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \tag{4.8}$$

a

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n}. \tag{4.9}$$

Ak rady (4.8), (4.9) konvergujú, tak súčtom radu (4.7) v bode z rozumieme súčet súčtov radov (4.8) a (4.9), t.j. ak

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n,\ f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} \ \Rightarrow\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = f_1(z) + f_2(z)$$

pre $z \in M$. Rad (4.8) nazývame **regulárna** alebo **analytická časť** radu (4.7) a rad (4.9) nazývame **hlavná časť** radu (4.7).

Vidíme, že regulárna časť radu (4.7) je mocninový rad. Ak R je jeho polomer konvergencie, potom konverguje absolútne v kruhu $|z - z_0| < R$ a diverguje v každom z takom, že $|z - z_0| > R$. Jeho súčet f_1 je analytická funkcia na kruhu konvergencie.

Aj na hlavnú časť radu (4.7) sa môžeme pozerať ako na mocninový rad. Ak označíme $c_{-n} = b_n$ a $\dfrac{1}{z - z_0} = t$, potom rad (4.9) má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n. \tag{4.10}$$

Ak rad (4.10) má polomer konvergencie r, tak konverguje absolútne v kruhu $|t| < r$, diverguje v každom t, pre ktoré $|t| > r$ a jeho súčet je analytická funkcia. Vzhľadom na uvedené označenie to znamená, že pre $r > 0$ rad (4.9) konverguje v každom z, pre ktoré $|z - z_0| > \dfrac{1}{r}$ a diverguje v každom z, pre ktoré $|z - z_0| < \dfrac{1}{r}$. Ak $r = 0$, tak rad (4.9) diverguje v každom z takom, že $|z - z_0| < +\infty$. Odtiaľ je zrejmé, že:

- ak $\dfrac{1}{r} < R$, potom rad (4.7) absolútne konverguje na medzikruží $\dfrac{1}{r} < |z - z_0| < R$ a jeho súčet je analytická funkcia na tomto medzikruží; ak $\dfrac{1}{r} > R$, potom rad (4.7) diverguje;
- ak $\dfrac{1}{r} = R$, potom rad (4.7) môže ale nemusí konvergovať v niektorých bodoch kružnice $|z - z_0| = R$.

Takže súčet radu (4.7) je analytická funkcia na nejakom medzikruží konvergencie tohto radu. Zaujíma nás teraz, či funkciu analytickú na nejakom medzikruží vieme rozvinúť do nekonečného radu tvaru (4.7). Označme $M(z_0, r, R)$ otvorené medzikružie so stredom v bode z_0 a polomermi r, R, t.j. množinu komplexných čísel z takých, že $r < |z - z_0| < R$ pre $0 \leq r < R \leq +\infty$. Nasledujúca veta hovorí o takomto rozvoji analytickej funkcie.

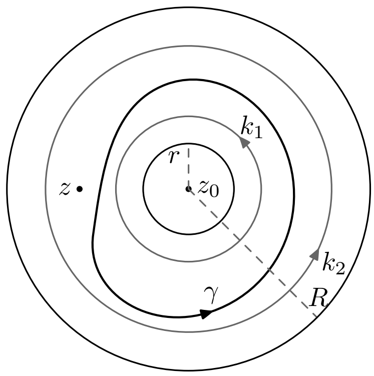
Veta 4.4.2. *Nech funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potom sa funkcia f dá na tomto medzikruží rozvinúť do radu (4.7), t.j. $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, ktorého koeficienty sú*

$$c_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}s, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots ,$$

kde krivka γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná, ktorá celá leží v medzikruží $M(z_0, r, R)$ a bod z_0 obsahuje vo svojom vnútri.

Dôkaz. Nech z je ľubovoľný, pevný bod z medzikružia $M(z_0, r, R)$. Potom existujú kružnice k_1, k_2 so stredom v bode z_0, kladne orientované a také, že bod z a krivka γ ležia medzi nimi. Napr. zoberme

$$|z - z_0| = \rho,\ k_1 : |s - z_0| = r_1,\ k_2 : |s - z_0| = r_2,\ r < r_1 < \rho < r_2 < R.$$



Potom funkcia f je analytická na medzikruží $M(z_0, r_1, r_2)$ a podľa Cauchyho integrálnej formuly pre viacnásobne súvislú oblasť pre každé $z \in M(z_0, r_1, r_2)$ platí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{k_2} \frac{f(s)}{s - z}\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{k_1} \frac{f(s)}{s - z}\,\mathrm{d}s. \tag{4.11}$$

Ak $s \in k_2$, tak $|s - z_0| > |z - z_0|$, t.j. $\dfrac{|z - z_0|}{|s - z_0|} < 1$ a platí

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{(s - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{s - z_0}\right)} = \frac{1}{s - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{s - z_0}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(s - z_0)^{n+1}}.$$

Pomocou Weierstrassovho kritéria sa ľahko ukáže rovnomerná konvergencia tohto radu na kružnici k_2. Funkcia $\dfrac{f(s)}{2\pi \mathrm{i}}$ je ohraničená na kružnici k_2, a tak aj rad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(s)}{s - z}$$

rovnomerne konverguje na k_2 a môžeme ho integrovať člen po člene. Dostaneme

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{k_2} \frac{f(s)}{s - z}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{k_2} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\mathrm{d}s \right) (z - z_0)^n.$$

Použitím Vety o deformácii integrálnej krivky máme

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{k_2} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} \mathrm{d}s \right) (z-z_0)^n. \tag{4.12}$$

Tak máme prvý intgrál vo vzťahu (4.11) vyjadrený ako súčet radu. Teraz vyjadríme druhý integrál vo vzťahu (4.11) ako súčet radu. Ak $s \in k_1$, potom $|s-z_0| < |z-z_0|$, a preto

$$\frac{1}{s-z} = \frac{-1}{(z-z_0)\left(1-\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)} = -\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s-z_0)^{1-n}} (z-z_0)^{-n}.$$

Podobne ako predtým sa ukáže, že tento rad je rovnomerne konvergentný na kružnici k_1 a to isté platí aj o rade

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{1-n}} (z-z_0)^{-n} = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(s)}{s-z},$$

a tak ho môžeme integrovať člen po člene. Dostaneme

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{k_1} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{k_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{1-n}}\,\mathrm{d}s \right) (z-z_0)^{-n}$$

a opäť podľa Vety o deformácií integrálnej krivky

$$-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{k_1} \frac{f(s)}{s-z}\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{1-n}}\,\mathrm{d}s \right) (z-z_0)^{-n}. \tag{4.13}$$

Spojením (4.12) a (4.13) dostaneme zo vzťahu (4.11) tvrdenie vety. □

Poznámka.

1. Takto určený rad (4.7) nazývame **Laurentov**[1] **rad** funkcie f so stredom v bode z_0 na medzikruží $M(z_0, r, R)$.
2. Z toho, že koeficienty Laurentovho radu sú funkciou f jednoznačne určené vyplýva, že Laurentov rad funkcie f je jednoznačne určený.
3. Ak f je analytická funkcia na medzikruží $M(z_0, r, R)$, tak z vlastností mocninových radov vieme, že súčet regulárnej časti f_1 aj súčet hlavnej časti f_2 sú analytické funkcie na medzikruží, pričom aj derivácia súčtu Laurentovho radu je analytická funkcia a platí

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{\mathrm{d}^k (z-z_0)^n}{\mathrm{d}z^k},\ \ z \in M(z_0, r, R).$$

[1]čítaj „Loránov“

Koeficienty Laurentovho radu hľadáme často iným spôsobom ako výpočtom cez integrály, hlavne pomocou známych rozvojov funkcií do nekonečných radov. Korektnosť tohto spôsobu zaručuje nasledujúca veta.

Veta 4.4.3. *Nech funkcia f sá dá v medzikruží $M(z_0, r, R)$ rozvinúť do nekonečného radu $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$. Potom je funkcia f analytická na $M(z_0, r, R)$ a tento rad je jej Laurentov rad.*

Dôkaz. Z predchádzajúceho už vieme, že funkcia určená radom $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ je analytická na medzikruží $M(z_0, r, R)$. Potrebujeme ukázať, že je to Laurentov rad funkcie f. Zoberme kružnicu γ: $|s - z_0| = \rho$, $r < \rho < R$. Rad $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ konverguje rovnomerne na kružnici γ, potom aj rad

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n(s - z_0)^n}{(s - z_0)^{k+1}}, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

konverguje rovnomerne na kružnici γ (násobili sme rad ohraničenou funkciou) a môžeme ho integrovať člen po člene

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{k+1}} \,\mathrm{d}s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} c_n(s - z_0)^{n-k-1} \,\mathrm{d}s = c_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

lebo ostatné integrály pre $n - k - 1 \neq -1$ sú rovné nule. To znamená, že c_k sú Laurentove koeficienty a daný rozvoj je Laurentov rad funkcie f v bode z_0 na medzikruží $M(z_0, r, R)$. □

Príklad 4.4.4. Nájdite Laurentov rozvoj funkcie $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ so stredom v bode $z_0 = 0$ pre všetky možné medzikružia.

Riešenie. Daná funkcia má dva singulárne body $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, ktoré rozdelia komplexnú rovinu na tri medzikružia so stredom v bode $z_0 = 0$

$$1)\ \ |z| < 1, \qquad 2)\ 1 < |z| < 2, \qquad 3)\ 2 < |z|\,.$$

Daná funkcia je v každom z týchto medzikruží analytická. Rozložme ju na parciálne zlomky

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$$

a použijeme vlastnosti geometrického radu.

1) Pre $|z| < 1$ je aj $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$ a platí:

$$-\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n + \ldots,$$
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \ldots\right).$$

Sčítaním týchto rozvojov máme

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)z + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right)z^2 + \cdots + \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n + \ldots$$

Laurentov rad obsahuje len regulárnu časť, kde $c_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ pre $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $c_{-n} = 0$ pre $n = 1, 2, \ldots$.

2) Pre $1 < |z| < 2$ je $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, a tak rozvoj zlomku $\frac{1}{z-2}$ je ten istý ako v 1). Urobme rozvoj druhého zlomku. Pre z z tohto medzikružia je $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, a tak

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \ldots - \frac{1}{z^n} - \ldots$$

Sčítaním týchto rozvojov máme

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \ldots - \frac{1}{z^n} - \ldots - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - \frac{1}{2} - \frac{z}{2^2} - \ldots - \frac{z^n}{2^{n+1}} \ldots$$

Koeficienty Laurentovho radu sú $c_n = -\frac{1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $c_n = -1$, $n = 1, 2, \ldots$.

3) Na tomto medzikruží sa zachová rozvoj $-\frac{1}{z-1}$ z prípadu 2). Keďže teraz je $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, urobme rozvoj druhého zlomku

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} + \ldots\right) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \cdots + \frac{2^n}{z^{n+1}} + \ldots$$

Potom

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} = \cdots + \frac{2^{n-1}}{z^n} + \cdots + \frac{2^2-1}{z^3} + \frac{1}{z^2}.$$

Koeficienty Laurentovho radu sú $c_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ a $c_n = 2^{n-1} - 1$, $n = 1, 2, \ldots$. □

Príklad 4.4.5. Nájdite rozvoj funkcie $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ v okolí singulárneho bodu $z = 2$.

Riešenie. Funkcia f má okrem $z = 2$ singulárny bod $z = 1$, a tak je analytická na medzikruží $0 < |z - 2| < 1$ (prstencové okolie bodu 2). Z predchádzajúceho príkladu poznáme rozklad danej funkcie na parciálne zlomky

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}.$$

Prvý zlomok je v poriadku, potrebujeme rozvinúť druhý zlomok

$$-\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1+(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n, \quad 0 < |z-2| < 1.$$

Funkcia f má na medzikruží $0 < |z - 2| < 1$ Laurentov rad

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - 1 + (z-2) + \cdots + (-1)^{n+1}(z-2)^n + \cdots = \sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-2)^n.$$

□

Doteraz sme vyšetrovali rozvoj funkcie do nekonečného radu v okolí singulárneho bodu, ak tento bod bol konečný singulárny bod funkcie. Ak funkcia f je analytická, napr. na $|z| > R$, $R > 0$, núka sa otázka rozvinutia funkcie f v okolí bodu ∞. Ak ale položíme $z = \frac{1}{t}$, tak funkcia

$$\varphi(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) = f(z)$$

je definovaná a analytická na $0 < |t| < \dfrac{1}{R}$. Aby sme dostali Laurentov rad funkcie f v okolí bodu ∞, nájdeme Laurentov rad funkcie φ v okolí bodu $t = 0$, t.j.

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n t^n, \quad 0 < |t| < \frac{1}{R},$$

čo na základe definície funkcie φ dáva

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=\infty}^{-\infty} c_n z^n, \; c_n = b_{-n}, \; n = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Môžeme povedať, že Laurentovým radom so stredom v bode ∞ sa nazýva rad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^n} = \ldots c_n z^n + c_{-n+1} z^{n-1} + \cdots + c_0 + \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$$

pričom rad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ je hlavná časť a rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{z^n}$ regulárna časť Laurentovho radu.

Porovnajme rozvoj funkcie $f(z) = \mathrm{e}^z$ v okolí bodov $z_0 = 0$ a $z_0 = \infty$.
V okolí bodu $z_0 = 0$ máme

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

V okolí bodu $z_0 = \infty$ použijeme pomocnú funkciu $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{t}}$ a urobíme rozvoj

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{t}} = 1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{t}\right)^n + \dots$$

Ak sa vrátime sa k premennej z, dostávame

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

Vidíme, že formálne nie je žiaden rozdiel medzi zápismi Laurentových radov so stredom v bode $z_0 = 0$ a $z_0 = \infty$. Aby sa tieto prípady rozlíšili, musíme priamo udať stred radu alebo určiť jeho hlavnú a analytickú časť. V uvedenom prípade v okolí bodu $z_0 = 0$ rad obsahuje iba analytickú časť, v okolí bodu $z_0 = \infty$ iba hlavnú časť.

Príklad 4.4.6. Nájdite Laurentov rad funkcie $f(z) = \dfrac{z^7}{z^2 - 9}$ so stredom v bode ∞ na oblasti $|z| > 3$.

Riešenie. Nájdime rozvoj funkcie $\varphi(t) = f\left(\dfrac{1}{t}\right)$. Pre $|z| > 3$ je $\left|\dfrac{1}{t}\right| < \dfrac{1}{3}$, a tak

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^5(1-(3t)^2} = \frac{1}{t^5}\left(1 + (3t)^2 + (3t)^4 + \cdots + (3t)^{2n} + \dots\right).$$

Potom

$$f(z) = z^5 + 9z^3 + 81z + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^{2n}}{z^{2n-5}}.$$

□

4.5 Klasifikácia singulárnych bodov

Tak, ako sa charakterizovali nulové body analytickej funkcie pomocou jej Taylorovho rozvoja, budeme charakterizovať singulárne body pomocou Laurentovho radu. Nech z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie f. Vieme, že funkciu môžeme rozvinúť na nejakom prstencovom okolí tohto bodu do Laurentovho radu

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad 0 < |z - z_0| < r.$$

Podľa typu Laurentovho radu môžeme triediť singulárne body funkcie f. Rozlišujeme tri prípady.

Prípad 1. Hlavná časť Laurentovho radu je rovná nule. To znamená, že pre každé $n = 1, 2, \ldots$ sú $c_{-n} = 0$ a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{4.14}$$

V tomto prípade je Laurentov rad mocninový rad so stredom v bode z_0 a jeho súčet je funkcia analytická v bode z_0. Ak dodefinujeme funkciu f v bode z_0 tak, že položíme $f(z_0) = c_0$, t.j. $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, urobíme funkciu f spojitú v bode z_0 a rad (4.14) bude jej Taylorovým radom, čo znamená, že funkcia f bude analytická v bode z_0. V tomto prípade bod z_0 nazývame **odstrániteľný singulárny bod**.

Príklad 4.5.1. Funkcia $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ má singulárny bod $z_0 = 0$. Avšak rozvojom funkcie v okolí bodu $z_0 = 0$ dostaneme

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \ldots,$$

čo je analytická časť Laurentovho radu, hlavná časť je nulová. Bod $z_0 = 0$ je odstrániteľný singulárny bod a dodefinovaním $f(0) = 1$ dostaneme analytickú funkciu v tomto bode.

Prípad 2. Hlavná časť Laurentovho radu má konečný počet členov, t.j. Laurentov rad má tvar

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + \ldots, \quad c_{-m} \neq 0. \tag{4.15}$$

V tom prípade bod z_0 nazývame ***m*–násobný pól** (alebo **pól *m*–tého rádu**) funkcie f. Pól 1–vého rádu nazývame tiež jednoduchý pól.

Príklad 4.5.2. Funkcia $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^4}$ má singulárny bod $z_0 = 0$. Rozvojom funkcie v okolí bodu $z_0 = 0$ dostaneme

$$\frac{\mathrm{e}^z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) = \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!} + \frac{z}{5!} + \ldots$$

Hlavná časť obsahuje konečne veľa členov a $c_{-4} = 1 \neq 0$ (koeficient pri najvyššej zápornej mocnine z), tak $z_0 = 0$ je 4–násobný pól funkcie f.

Prípad 3. Hlavná časť Laurentovho radu má nekonečný počet členov. V tom prípade bod z_0 nazývame **podstatne singulárny bod** funkcie f.

Príklad 4.5.3. Funkcia $f(z) = \cos\frac{1}{z}$ má singulárny bod $z_0 = 0$. Rozvojom funkcie v okolí bodu $z_0 = 0$ dostaneme

$$\cos\frac{1}{z} = 1 - \frac{1}{2!\,z^2} + \frac{1}{4!\,z^4} + \cdots + \frac{1}{(2n)!\,z^{2n}} + \ldots$$

Hlavná časť obsahuje nekonečne veľa členov, a tak bod $z_0 = 0$ je podstatne singulárny bod funkcie f.

Uvedieme niekoľko výsledkov, ktoré hovoria o správaní sa funkcie v okolí jej izolovaného singulárneho bodu.

Veta 4.5.4. [Riemannova] *Ak funkcia f je analytická v prstencovom okolí bodu z_0 a je ohraničená na tomto okolí, potom bod z_0 je jej odstrániteľný singulárny bod.*

Dôkaz. Nech funkcia f má na nejakom prstencovom okolí $U^*(z_0, R)$ bodu z_0 rozvoj

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n, \text{ kde koeficienty } c_{-n} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s - z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}s,$$

$n = 0, 1, 2, \ldots$ a γ je kladne orientovaná kružnica $|s - z_0| = r < R$ ležiaca v uvažovanom okolí $U^*(z_0, R)$. Funkcia f je ohraničená na tomto okolí, t.j. existuje $M > 0$ také, že $|f(z)| \le M$ pre každé $z \in U^*(z_0, R)$. Potom

$$|c_{-n}| \le \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{-n+1}} = Mr^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Polomer r však môže byť ľubovoľne malý, preto $c_{-n} = 0$ pre $n = 1, 2, \ldots,$ čo znamená, že bod z_0 je odstrániteľný singulárny bod. $\square$

Nasledujúce vety sa budú zaoberať vlastnosťami funkcie v okolí m–násobného pólu.

Veta 4.5.5. *Bod z_0 je m–násobný pól funkcie f práve vtedy, keď funkciu f môžeme na nejakom prstencovom okolí $U^*(z_0, R)$ bodu z_0 vyjadriť v tvare*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m},$$

kde φ je analytická na okolí $U(z_0, R)$ bodu z_0 a $\varphi(z_0) \neq 0$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva jednoducho z definície m–násobného pólu a vlastností Taylorovho radu. $\square$

Veta 4.5.6. *Bod z_0 je m–násobný pól funkcie f práve vtedy, keď $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Dôkaz. Ak bod z_0 je m–násobný pól funkcie f, potom sa na prstencovom okolí bodu z_0 dá funkcia f zapísať v tvare $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$, $\varphi(z_0) \neq 0$. Odkiaľ je zrejmé, že $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

Nech teraz platí $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ a bod z_0 je izolovaný singulárny bod funkcie f. Potom existuje prstencové okolie $U^*(z_0, R)$ bodu z_0, na ktorom je $|f(z)| > 1$. Definujme funkciu $g = \frac{1}{f}$. Funkcia g je analytická v uvažovanom prstencovom okolí, je na ňom ohraničená, $|g(z)| < 1$, a tak bod z_0 je odstrániteľný singulárny bod funkcie g. Položme

$$g(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0.$$

To znamená, že bod z_0 je nulový bod funkcie g násobnosti aspoň 1, predpokladajme, že je násobnosti $k \geq 1$. Potom funkcia g sa dá zapísať v tvare $g(z) = (z - z_0)^k h(z)$, kde h je analytická v bode z_0 a $h(z_0) \neq 0$. Z toho teda

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}, \text{ kde } \varphi(z) = \frac{1}{h(z)}, \ \varphi(z_0) = \frac{1}{h(z_0)} \neq 0,$$

φ analytická v bode z_0 a to znamená, že bod z_0 je k–násobný pól funcie f. $\square$

Z dôkazu tejto vety vyplývajú nasledujúce dôsledky.

Dôsledok 4.5.7. *Bod z_0 je m–násobný pól funkcie f práve vtedy, keď je m–násobný nulový bod funkcie $g = \frac{1}{f}$.*

Dôsledok 4.5.8. *Bod z_0 je m–násobný pól funkcie f práve vtedy, keď existuje nenulová limita $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) \neq 0$.*

Príklad 4.5.9. Určte charakter singulárnych bodov funkcií:

$$\text{a) } f(z) = \frac{1-\cos z}{z^7}; \quad \text{b) } f(z) = \frac{z^5}{(1-z)^2}; \quad \text{c) } f(z) = \frac{1}{\sin z^2}.$$

Riešenie.

a) Bod $z = 0$ je jediný singulárny bod funkcie. Urobme jej rozvoj v prstencovom okolí tohto bodu do Laurentovho radu

$$\frac{1-\cos z}{z^7} = \frac{1}{z^7}\left[1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right)\right] = \frac{1}{2!z^5} - \frac{1}{4!z^3} + \dots$$

Odtiaľ vidno, že bod $z = 0$ je 5–násobný pól funkcie f.

b) Singulárnym bodom funkcie je bod $z = 1$. Pre funkciu g

$$g(z) = \frac{1}{f(z)} = \frac{(1-z)^2}{z^5}$$

je bod $z = 1$ jej dvojnásobný nulový bod. Podľa dôsledku je potom tento bod dvojnásobný pól funkcie f.

c) Funkcia f má singulárne body $z_0 = 0$, $z_k = \pm\sqrt{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$.

Bod $z_0 = 0$ je dvojnásobný pól funkcie f, pretože

$$\lim_{z\to 0} z^2 f(z) = \lim_{z\to 0} z^2 \cdot \frac{1}{\sin z^2} = 1 \neq 0.$$

Body $z_k = \pm\sqrt{k\pi}$, $k = 1, 2, \ldots$ sú jednoduché póly funkcie f, pretože sú jednoduché nulové body funkcie $g = \frac{1}{f}$. Platí

$$g(z) = \sin z^2,\ \ g(z_k) = 0 \quad \text{a} \quad g'(z) = 2z \cdot \cos z^2,\ \ g'(z_k) = \pm 2\sqrt{k\pi}\cos k\pi \neq 0.$$

□

Pozrime sa ešte, ako sa správa funkcia v okolí svojho podstatne singulárneho bodu.

Veta 4.5.10. [Cassoratiho-Weierstrassova] *Ak bod z_0 je podstatne singulárny bod funkcie f analytickej v istom prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu z_0, potom v ľubovoľnom okolí ľubovoľného bodu $w \in \mathbb{C}$ existuje aspoň jeden bod, ktorý je hodnotou $f(z)$ v bode $z \in U^*(z_0)$.*

Dôkaz. Dôkaz urobíme nepriamo. Nech existuje bod $w_0 \in \mathbb{C}$ a kruh $|w - w_0| < r$ taký, že funkcia f nenadobúda v prstencomom okolí $U^*(z_0)$ žiadnu hodnotu z tohto kruhu. Teda pre každé $z \in U^*(z_0)$ je $|f(z) - w_0| \geq r$. Potom funkcia $F = \frac{1}{f - w_0}$ je analytická na prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu z_0 a pre každé $z \in U^*(z_0)$ platí

$$|F(z)| = \frac{1}{|f(z) - w_0|} \leq \frac{1}{r}.$$

To znamená, že funkcia F je ohraničená a podľa Riemannovej vety je bod z_0 odstrániteľný singulárny bod funkcie F. Funkciu F môžeme dodefinovať v bode z_0, položme $F(z_0) = \lim_{z\to z_0} F(z) = \alpha_0$. Teraz buď $F(z_0) = \alpha_0 = 0$, t.j z_0 je nulový bod funkcie F, a teda pól funkcie $\frac{1}{F} = f - w_0$, čo je spor s predpokladom vety. Alebo je $F(z_0) = \alpha_0 \neq 0$, potom však funkcia $\frac{1}{F} = f - w_0$ je analytická v bode z_0, čo je opäť spor s prepokladom vety. □

Poznámka. Úvahy z predchádzajúcich viet dovoľujú vykonať klasifikáciu singulárnych bodov funkcie f pomocou limít. Bod z_0 je:

1. odstrániteľný singulárny bod funkcie f práve vtedy, keď existuje konečná $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$;
2. je pól funkcie f práve vtedy, keď existuje nekonečná limita $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$;
3. je podstatne singulárny bod funkcie f práve vtedy, keď neexistuje limita $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Príklad 4.5.11. Funkcia $f(z) = \mathrm{e}^{\frac{1}{z-2\mathrm{i}}}$ má singulárny bod $z = 2\mathrm{i}$. Keďže $\lim\limits_{z\to 2\mathrm{i}} e^{\frac{1}{z-2\mathrm{i}}}$ neexistuje, je to jej podstatne singulárny bod. Na medzikruží $0 < |z-2\mathrm{i}| < \infty$ má rozvoj

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-2\mathrm{i}}} = 1 + \frac{1}{z-2\mathrm{i}} + \frac{1}{2!(z-2\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{1}{n!(z-2\mathrm{i})^n} + \dots \qquad \square$$

Zastavme sa ešte pri nekonečnom singulárnom bode. Vieme, že transformácia $w = \frac{1}{z}$ má tú vlastnosť, že jednoznačne zobrazí uzavretú komlexnú rovinu $\mathbb{C}_\infty$ na seba, pričom body $0, \infty$ sú si navzájom priradené. Pritom okolie bodu 0 sa transformuje na okolie bodu ∞ a obrátene. Ak

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}}_{\text{hlavná časť}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n}_{\text{analytická časť}} \qquad \text{pre } z \text{ z okolia bodu } 0,$$

tak

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{n}}_{\text{analytická časť}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}}_{\text{hlavná časť}}.$$

To znamená, že ∞ je izolovaný singulárny bod funkcie f práve vtedy, keď bod 0 je izolovaný singulárny bod funkcie $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Definícia 4.5.12.

a) Bod ∞ nazývame nulový bod m–tého rádu funkcie $f(z)$, ak 0 je nulový bod m–tého rádu funkcie $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

b) Bod ∞ nazývame pól funkcie $f(z)$, ak 0 je pól funkcie $f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Príklad 4.5.13. Vieme, že

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

Potom

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\,z^3} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!\,z^{2n+1}} + \dots$$

Bod $z = 0$ je podstatne singulárny bod funkcie $\sin\left(\frac{1}{z}\right)$, a tak $z = \infty$ je podstatne singulárny bod funkcie $\sin z$.