5 Reziduum funkcie komplexnej premennej

Dôležitým pojmom v komplexnej analýze je pojem rezidua funkcie v bode. Nech funkcia f je analytická v prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Potom Laurentov rad v tomto okolí má tvar

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n.$$

Zvláštne postavenie v tomto rade má koeficient c_{-1}, ktoré vyplýva z toho, že

$$\int_\gamma (z-z_0)^n \,\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi\mathrm{i}, & n=-1, \\ 0, & n \neq -1, \end{cases}$$

kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z-z_0| = \rho < r$, ktorá leží v $U^*(z_0)$ (alebo uzavretá, po častiach hladká, kladne orientovaná krivka, torá leží v $U^*(z_0)$ a bod $z_0 \in \operatorname{Int}\gamma$). Keby sme integrovali Laurentov rad člen po člene, dostaneme

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\, c_{-1}, \quad \text{odkiaľ} \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{5.1}$$

Pri takomto integrovaní ostane len jediný nenulový člen obsahujúci koeficient c_{-1}, ktorý nazývame reziduum funkcie f.

Definícia 5.0.14. Nech funkcia f je analytická v prstencovom okolí $U^*(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Ak $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ je Laurentov rad funkcie f na okolí $U^*(z_0)$, potom číslo $\boldsymbol{c_{-1}}$ nazývame **reziduum funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{z_0}$**[2] a označíme $c_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f(z)$ alebo $c_{-1} = \operatorname{res} f(z_0)$.

Nech funkcia f je analytická na nejakom prstencovom $U^*(\infty)$ a má tam Laurentov rozvoj $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}$, potom číslo $\boldsymbol{-b_1}$ nazývame **reziduum funkcie $\boldsymbol{f}$ v bode $\boldsymbol{\infty}$** a označíme $-b_1 = \operatorname{res} f(\infty)$ alebo $-b_1 = \operatorname{res}_\infty f(z)$.

5.1 Výpočet rezidua

Na výpočet rezidua málo používame vzťah (5.1). Určíme ho buď rozvojom funkcie do Laurentovho radu alebo pomocou niektorých metód, ktoré ukážeme. Tieto metódy sú založené na klasifikácií singulárnych bodov.

[2]Názov reziduum pochádza z latinského residuum, čo znamená zvyšok.

Veta 5.1.1. *Ak bod z_0 je najviac jednoduchý pól funkcie f, tak* $\operatorname{res} f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Dôkaz. Ak bod z_0 je pól najviac prvého rádu, tak funkcia f má na nejakom prstencovom okolí bodu z_0 rozvoj

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots .$$

Potom

$$(z-z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots, \text{ odkiaľ } c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z).$$

□

Príklad 5.1.2. Nájdite reziduum funkcie $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ v bode $z_0 = 0$.

Riešenie. Bod $z_0 = 0$ je jednoduchý pól funkcie f, pretože je jednoduchý nulový bod funkcie $\sin z$ ($[\sin z]'_{z=0} \neq 0$) a dvojnásobný nulový bod funkcie z^2. Potom

$$\operatorname{res}_0 \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{\sin z}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1.$$

□

Veta 5.1.3. *Nech funkcie f, g sú analytické v bode z_0, pričom $g(z_0) = 0$ a $g'(z_0) \neq 0$. Potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Dôkaz. Podľa predpokladov je bod z_0 najviac jednoduchý pól funkcie $\frac{f}{g}$, a preto podľa Vety 5.1.1

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

□

Príklad 5.1.4. Nájdite reziduum funkcie $f(z) = \operatorname{cotg} z$ v bode $z_0 = 0$

Riešenie. Vieme, že $\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$. Funkcie cos a sin sú analytické v bode 0, $\sin 0 = 0$, $[\sin z]'_{z=0} = \cos 0 = 1$ a podľa uvedenej vety

$$\operatorname{res}_0 \operatorname{cotg}(z) = \frac{[\cos z]_{z=0}}{[(\sin z)']_{z=0}} = \frac{\cos 0}{\cos 0} = 1.$$

□

Veta 5.1.5. *Nech bod z_0 je jednoduchý pól funkcie f a regulárny bod funkcie g. Potom*

$$\operatorname{res}_{z_0}\left(f(z)g(z)\right) = g(z_0)\operatorname{res}_{z_0} f(z).$$

Dôkaz. Podľa predpokladu je bod z_0 regulárny bod funkcie g, potom sa funkcia g dá na nejakom okolí bodu z_0 zapísať v tvare

$$g(z) = g(z_0) + (z - z_0)\psi(z),$$

kde ψ je analytická funkcia v bode z_0. Ďalej bod z_0 je jednoduchý pól funkcie f. Ak označíme $A = \operatorname{res}_{z_0} f$, tak funkcia f sa dá na okolí bodu z_0 zapísať v tvare

$$f(z) = \frac{A}{z - z_0} + \varphi(z),$$

kde φ je funkcia analytická v bode z_0. Potom

$$f(z)g(z) = \frac{Ag(z_0)}{z - z_0} + [g(z_0)\varphi(z) + A\psi(z)] + (z - z_0)\psi(z)\varphi(z).$$

Vidíme, že bod z_0 je najviac jednoduchý pól funkcie fg a podľa Vety 5.1.1

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z_0}(fg)(z) &= \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)g(z) = \\ = \lim_{z\to z_0}&\left[Ag(z_0) + (z - z_0)(g(z_0)\varphi(z) + A\psi(z)) + (z - z_0)^2\psi(z)\varphi(z)\right] = g(z_0)A. \end{aligned}$$

□

Príklad 5.1.6. Nájdite reziduum funkcie $h(z) = \dfrac{1}{z(1 + z^2)}$ v bode $z_0 = \mathrm{i}$.

Riešenie. Bod $z_0 = \mathrm{i}$ je jednoduchý pól funkcie $f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})}$ a regulárny bod funkcie $g(z) = \frac{1}{z}$. Vypočítame

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}}\frac{1}{1 + z^2} = \lim_{z\to\mathrm{i}}(z - \mathrm{i})\frac{1}{(z + \mathrm{i})(z - \mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}, \quad g(\mathrm{i}) = \frac{1}{\mathrm{i}}.$$

Podľa Vety 5.1.5 potom

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}}\frac{1}{z(1 + z^2)} = \frac{1}{\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}} = -\frac{1}{2}.$$

□

Veta 5.1.7. *Nech bod z_0 je n–násobný pól funkcie f $(n \geq 1)$, potom*

$$\operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z - z_0)^n f(z)\right].$$

Dôkaz. Podľa predpokladov Laurentov rozvoj funkcie f na nejakom prstencovom okolí bodu z_0 má tvar

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$$

Potom

$$(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + c_1(z-z_0)^{n+1} + \dots$$

Ak túto rovnosť $(n-1)$-krát derivujeme, dostaneme mocninový rad s prvým členom $(n-1)!c_{-1}$, presnejšie

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right] = (n-1)!\, c_{-1} + 2\cdot 3 \dots n\, c_0(z-z_0) + 3\cdot 4 \dots (n+1)\, c_1(z-z_0)^2 \dots,$$

odkiaľ limitným prechodom pre $z \to z_0$ máme tvrdenie vety. □

Príklad 5.1.8. Vypočítajte $\operatorname{res}_{-1} \dfrac{z^2+1}{(z-3)(z+1)^3}$.

Riešenie. Bod $z_0 = -1$ je trojnásobný pól danej funkcie. Funkcia sa dá zapísať v tvare $\dfrac{z^2+1}{(z-3)(z+1)^3} = \dfrac{\frac{z^2+1}{z-3}}{(z+1)^3}$, kde funkcia $\varphi(z) = \frac{z^2+1}{z-3}$ je analytická v bode $z_0 = -1$ a $\varphi(-1) = -\frac{1}{2} \neq 0$. Potom

$$\operatorname{res}_{-1} \frac{z^2+1}{(z-3)(z+1)^3} = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[(z+1)^3 \frac{z^2+1}{(z-3)(z+1)^3}\right]'' = \frac{1}{2!}\lim_{z\to -1}\left[\frac{z^2+1}{z-3}\right]'' = -\frac{5}{32}.$$

□

V prípade, že bod z_0 je podstatne singulárny bod funkcie f, tak reziduum určíme priamo z definície pomocou Laurentovho rozvoja.

Príklad 5.1.9. Vypočítajte $\operatorname{res}_0 z^3 \sin \frac{1}{z^2}$.

Riešenie. Urobíme rozvoj danej funkcie v prstencovom okolí bodu $z_0 = 0$

$$z^3 \sin\frac{1}{z^2} = z^3\left[\frac{1}{z^2} - \frac{1}{3!\, z^6} + \frac{1}{5!\, z^{10}} + \dots\right] = z - \frac{1}{3!\, z^3} + \frac{1}{5!\, z^7} + \dots,$$

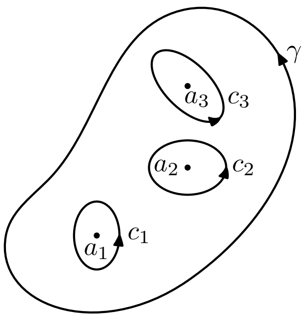
odkiaľ vidíme, že $\operatorname{res}_0 z^3 \sin \frac{1}{z^2} = 0$. □

Uvedieme použitie teórie o reziduách pri výpočte integrálov.

Veta 5.1.10. [Základná veta o reziduách] *Nech γ je jednoduchá, uzavretá, po častiach hladká krivka, kladne orientovaná a oblasť G je vnútro krivky γ. Ak funkcia f je spojitá na krivke γ a analytická v oblasti G s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov $a_1, a_2, \dots, a_n$, potom*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{a_k} f(z).$$

Dôkaz. Okolo bodov a_k, $k = 1, \dots, n$, opíšme kladne orientované kružnice c_k: $|z - a_k| = \rho$, $\rho > 0$, navzájom dizjunktné a celé ležiace v oblasti G.



Podľa Cauchyho integrálnej vety pre viacnásobne súvislú oblasť platí

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n}\int_{c_k} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Avšak $\int_{c_k} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{a_k} f(z)$, $k = 1, \dots, n$ a dosadením do poslednej rovnosti máme tvrdenie vety. □

Túto vetu môžeme použiť na výpočet integrálov. Je zrejmé, že integrály, ktoré vieme vypočítať pomocou zovšeobecneného Cauchyho integrálnej formuly, sa dajú vypočítať aj pomocou vety o reziduách. Ale nie každý integrál, ktorý sa dá vypočítať pomocou vety o reziduách, vieme spočítať pomocou Cauchyho integrálnej formuly. Je to hlavne v prípade, ak sa v oblasti G nachádza podstatne singulárny bod funkcie.

Príklad 5.1.11. Vypočítajte

a) $\int_\gamma \frac{z+2}{z^2-1}\,\mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$,

b) $\int_\gamma z^2 \sin\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z$, kde γ je kladne orientovaná kružnica $|z| = 2$.

Riešenie. a) Funkcia $f(z) = \frac{z+2}{z^2-1}$ má dva singulárne body $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, ktoré sú jednoduché póly a ležia vo vnútri kružnice γ. Vypočítame reziduá v týchto bodoch

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{a_1} \frac{z+2}{z^2-1} &= \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{z+2}{(z+1)(z-1)} = \frac{3}{2}, \\ \operatorname{res}_{a_2} \frac{z+2}{z^2-1} &= \lim_{z\to -1}(z+1)\frac{z+2}{(z+1)(z-1)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Potom

$$\int_\gamma \frac{z+2}{z^2-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right) = 4\pi\mathrm{i}.$$

Tento integrál sme mohli počítať aj pomocou Cauchyho integrálnej formuly pre viacnásobne súvislú oblasť.

b) Funkcia $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z+1}$ je analytická s výnimkou bodu $z = -1$, ktorý leží vo vnútri kruhu. Je to podstatne singulárny bod funkcie f a reziduum v ňom určíme pomocou Laurentovho rozvoja. Upravme $z^2 = (z+1)^2 - 2(z+1) + 1$, potom

$$z^2 \sin\frac{1}{z+1} = \left[(z+1)^2 - 2(z+1) + 1\right]\left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{3!\,(z+1)^3} + \frac{1}{5!\,(z+1)^5} + \dots\right].$$

Postupným roznásobením dostaneme koeficient pri $(z+1)^{-1}$, t.j. $c_{-1} = \operatorname{res}_{-1} z^2 \sin\frac{1}{z+1} = 1 - \frac{1}{3!} = \frac{5}{6}$, a teda

$$\int_\gamma z^2 \sin\frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\ \operatorname{res}_{-1} z^2 \sin\frac{1}{z+1} = \frac{5\pi\mathrm{i}}{3}.$$

□

Veta o reziduách platí aj pre viacnásobne súvislú oblasť.

Veta 5.1.12. *Nech G je $(n+1)$–násobne súvislá oblasť s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria kladne orientované krivky γ, γ_1^*,…, γ_n^*. Nech funkcia f je spojitá na hranici oblasti G a analytická vo vnútri oblasti G s výnimkou konečného počtu bodov $a_1, \dots a_m$, ktoré ležia v G. Ak $\widetilde{\gamma}$ je systém kriviek γ, γ_1,…, γ_n, potom*

$$\int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{m} \operatorname{res}_{a_j} f(z).$$

Dôkaz. Máme $(n+1)$–násobne súvislú oblasť s kladne orientovanou hranicou, ktorú tvoria krivky γ, γ_1,…, γ_n. Okolo bodov a_j, $j = 1,\dots,m$ opíšene kladne orientované kružnice c_j, ktoré celé ležia v oblasti G. Podľa Cauchyho vety pre viacnásobne súvislú oblasť

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z - \sum_{j=1}^{m}\int_{c_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 0.$$

Avšak

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\widetilde{\gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z$$

a podľa Vety o reziduách

$$\int_{c_j} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}_{a_j}\, f(z), \quad j = 1, \ldots, m.$$

□

Príklad 5.1.13. Vypočítajte $\displaystyle\int_{\partial D} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$, kde ∂D je kladne orientovaná hranica oblasti D: $2 < |z| < 4$.

Riešenie. Funkcia $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2}$ má dva singulárne body $z_1 = 1$, $z_2 = 3$. Vo vnútri oblasti D leží len bod z_2, ktorý je dvojnásobný pól funkcie f. Vypočítame reziduum funkcie f v tomto bode.

$$\mathrm{res}_3\, \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = \lim_{z\to 3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left((z-3)^2 \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} \right) = \lim_{z\to 3} \frac{-4z}{(z^2-1)^3} = -\frac{12}{8^3}\,.$$

Oblasť D je dvojnásobne súvislá a podľa Vety o reziduách pre viacnásobne súvislú oblasť

$$\int_{\partial D} \frac{\mathrm{d}z}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = 2\pi\mathrm{i}\ \mathrm{res}_3\, \frac{1}{(z^2-1)^2(z-3)^2} = -\frac{3\pi\mathrm{i}}{8^2}.$$

□

Ak zoberieme do úvahy aj ∞ a uvedomíme si, že kladne orientovaná kružnica v okolí bodu 0 sa transformáciou $w = \frac{1}{z}$ zobrazí na záporne orientovanú kružnicu v okolí ∞, tak platí tento dôsledok Vety o reziduách.

Dôsledok 5.1.14. *Nech funkcia f je analytická v uzavretej Gaussovej rovine s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov. Potom súčet reziduí funkcie f (vrátene rezidua v bode ∞) sa rovná nule.*

5.2 Výpočet reálnych integrálov

Pri výpočte integrálov $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, kde f je reálna funkcia reálnej premennej, často používame metódu, ktorá je založená na aplikácii Vety o reziduách. Túto metódu môžeme popísať takto:

- zvolíme vhodnú komplexnú funkciu komplexnej premennej $f(z)$ a to buď rozšírením definičného oboru reálnej funkcie f reálnej premennej na komplexnú rovinu alebo tak, že funkcia $f(x)$ je jej reálnou alebo imaginárnou zložkou;

- zvolíme kladne orientovanú uzavretú Jordanovu krivku $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, kde γ_1 prebieha interval $\langle a, b\rangle$ a γ_2 je oblúk kružnice;
- ak sú splnené predpoklady Vety o reziduách, potom

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{z_k \in \operatorname{Int}\gamma} \operatorname{res}_{z_k} f(z), \tag{5.2}$$

kde sa sumácia robí cez všetky singulárne body, ktoré ležia vo vnútri krivky γ.

Ak sa podarí $\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ priamo vypočítať alebo vyjadriť pomocou hľadaného integrálu, je úloha vyriešená. Stačí už len porovnať reálne alebo imaginárne zložky na obivoch stranách rovnosti (5.2).

V prípade, že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ je nevlastný (vplyvom hraníc), použijeme limitný proces na rovnosť (5.2). Zväčšuje sa neohraničene interval $\langle a, b\rangle$ a zaujíma nás, ako sa správa $\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$. Na sledovanie tohto integrálu sa často používa nasledujúca lema. Uvedieme jednu z jej variácii (v literatúre sa nachádza viacej modifikácií tejto lemy).

Lema 5.2.1. [Jordanova lema] *Nech $a > 0$ a sú splnené podmienky:*

1. *komplexná funkcia g je spojitá v oblasti $\operatorname{Im} z \geq 0$, $|z| \geq R_0 > 0$;*
2. *$M(R) = \max\limits_{z \in C_R} |g(z)| \to 0$ pre $R \to \infty$, kde C_R je polkružnica $|z| = R$, $\operatorname{Im} z \geq 0$.*

Potom $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\mathrm{d}z = 0.$

Dôkaz. Nech $z \in C_R$, $R > R_0$. Použijeme parametrické rovnice polkružnice C_R: $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ ($\mathrm{d}z = R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$) a odhadnime

$$\left|\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\mathrm{d}z\right| \leq \max_{z\in C_R}|g(z)| \int\limits_0^\pi \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}R(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)}R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\right| \mathrm{d}\varphi = R\,M(R) \int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-aR\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

Na odhad integrálu na pravej strane použijeme rovnosť $\int\limits_0^\pi \mathrm{e}^{-aR\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-aR\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi$ a nerovnosť $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$ pre $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Dostaneme

$$\left|\int_{C_R} g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\mathrm{d}z\right| \leq 2R\,M(R) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-aR\frac{2}{\pi}\varphi}\mathrm{d}\varphi = M(R)\frac{\pi}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{-aR}\right) \leq \frac{\pi}{a}M(R) \to 0,\ R \to \infty,$$

čo sme chceli ukázať. $\square$

Pozrime sa na výpočet niektorých typov integrálov

A) Integrál typu $\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$, kde funkcia R je racionálna funkcia premenných $\cos t$, $\sin t$.
Použijeme substitúciu

$$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \ \ t \in \langle 0, 2\pi \rangle\,,$$

ktorá určuje jednotkovú kružnicu $|z| = 1$ v komplexnej rovine. Ďalej platí

$$\cos t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad \sin t = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2}, \quad \mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

Potom

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{1}{z}\mathrm{d}z.$$

Z Vety o reziduách vyplýva

$$\int\limits_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{i}}2\pi\mathrm{i} \sum_{|a_k|<1} \operatorname{res}_{a_k}\left(\frac{1}{z}R\left(\frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \frac{z - \frac{1}{z}}{2}\right)\right),$$

kde sumácia sa robí cez všetky singulárne body a_k, pre ktoré $|a_k| < 1$. Pretože R je racionálna funkcia, každý jej singulárny bod je pólom alebo odstraniteľným singulárnym bodom. Je zrejmé, že rovnako sa dá postupovať pri výpočte integrálu $\int_a^{a+2\pi} R(\cos t, \sin t)\,\mathrm{d}t$, kde a je reálne číslo.

Príklad 5.2.2. Vypočítajte integrál $I = \displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - 2a\cos x + a^2}$, kde $0 < a < 1$.

Riešenie. Použijeme substitúciu $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Potom dostaneme

$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1 - a(z + z^{-1}) + a^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} = \int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(1 - az)(z - a)}.$$

Funkcia má dva singulárne body $z = \frac{1}{a}$, $z = a$, ktoré sú jednoduché póly. Vzhľadom na predpoklad $0 < a < 1$, vo vnútri jednotkového kruhu $|z| = 1$ leží iba $z = a$. Vypočítame reziduum funkcie v tomto singulárnom bode

$$\operatorname{res}_a \frac{1}{\mathrm{i}(1 - az)(z - a)} = \lim_{z\to a}(z - a)\frac{1}{\mathrm{i}(1 - az)(z - a)} = \frac{1}{\mathrm{i}(1 - a^2)}.$$

Potom

$$I = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 - 2a\cos x + a^2} = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{\mathrm{i}(1 - a^2)} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

□

B) Integrál typu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

Uvažujme funkciu f ako funkciu komplexnej premennej z, ktorá spĺňa predpoklady:

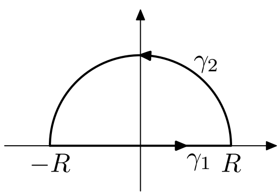
a) f je analytická v polrovine $\operatorname{Im} z \geq 0$ s výnimkou konečného počtu singulárnych bodov $z_1, \dots, z_n$, ktorých $\operatorname{Im} z_j > 0$, $j = 1, \dots, n$;

b) existujú čísla $R_0 > 0$, $M > 0$, $\alpha > 1$ také, že pre $|z| \geq R_0$ je $|f(z)| \leq \dfrac{M}{|z|^\alpha}$.

Druhá vlastnosť hovorí, že funkcia sa v okolí ∞ asymptoticky správa ako funkcia $\frac{1}{z^\alpha}$. Za týchto predpokladov existuje $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ a platí

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{z_j} f(z). \tag{5.3}$$

Ukážeme, že to je skutočne tak. Zoberme kladne orientovanu krivku $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, kde γ_1: $z = x$, $x \in \langle -R, R\rangle$, γ_2: $z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$, pričom $R \geq R_0$ a také, že $|z_j| < R$, $j = 1, \dots, n$.



Potom

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res}_{z_j} f(z). \tag{5.4}$$

Avšak, vzhľadom na predpoklady máme $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ a

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \pi R\,\frac{M}{|z|^\alpha} = \pi R\,\frac{M}{R^\alpha} = \frac{\pi M}{R^{\alpha-1}} \to 0, \text{ pre } R \to +\infty.$$

Dosadením do rovnosti (5.4) dostaneme rovnosť (5.3).

Poznámka. V predchádzajúcich úvahách sme použili tvrdenie

ak existuje $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$, tak platí $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x$.

Pozor, obrátené tvrdenie neplatí! Napr. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x\,\mathrm{d}x$ neexistuje, avšak $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

Príklad 5.2.3. Vypočítajte $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$.

Riešenie. Zoberme funkciu $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+2z+2)^2}$. Táto funkcia sa asymptoticky správa ako funkcia $\dfrac{1}{z^4}$. Jej singulárne body sú $z_1 = -1+\mathrm{i}$, $z_2 = -1-\mathrm{i}$ a sú to dvojnásobné póly. V polrovine $\operatorname{Im} z > 0$ leží len bod z_1. Sú splnené predpoklady a), b), a tak

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname{res}_{z_1} \frac{1}{(z^2+2z+2)^2} = \\
&= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to -1+\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[(z+1-\mathrm{i})^2 \frac{1}{(z+1-\mathrm{i})^2(z+1+\mathrm{i})^2}\right] = \\
&= 2\pi\mathrm{i} \lim_{z\to -1+\mathrm{i}} \left[\frac{-2}{(z+1+\mathrm{i})^3}\right] = -\frac{2^2\pi\mathrm{i}}{2^3\,\mathrm{i}^3} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

C) Integrál typu $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\mathrm{d}x$, $a > 0$.

Tento integrál konverguje, ak funkcia f je spojitá na reálnej osi a asymptoticky sa správa ako funkcia $\frac{c}{x^k}$, $k > 1$, pre $x \to +\infty$, resp. $x \to -\infty$. Ak naviac funkcia f spĺňa predpoklady Jordanovej lemy, je analytická v polrovine $\operatorname{Im} z > 0$ s výnimkou konečného počtu bodov $z_1, \dots, z_n$, potom

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z_k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} f(z)\right),\ a > 0.$$

Zoberme teraz komplexnú funkciu $F(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}az} f(z)$ a kladne orientovanú uzavretú krivku $\gamma = \gamma_1 \oplus C_R$, kde γ_1 prebieha interval $\langle -R, R\rangle$ a C_R je polkružnica v polrovine $\operatorname{Im} z \geq 0$, kde $|z_k| < R$, $k = 1, \dots, n$. Potom

$$\int_\gamma F(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} F(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k > 0} \operatorname{res}_{z_k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} f(z)\right).$$

Limitným prechodom pre $R \to +\infty$ a vzhľadom na Jordanovu lemu máme vypočítaný integrál.

Poznámka. Ak $a < 0$, zameníme krivku C_R za krivku $\tilde{C_R}$ symetrickú s C_R vzhľadom na reálnu os. Potom

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax} f(x)\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i} \sum_{\operatorname{Im} z_k < 0} \operatorname{res}_{z_k} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}az} f(z)\right),\ a < 0.$$

Príklad 5.2.4. Vypočítajte tzv. Laplaceov integrál $I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x$, $a > 0$.

Riešenie. Funkcia $f(x) = \frac{\cos x}{x^2+a^2}$ je párna, a preto

$$I = \int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x.$$

Posledný integrál existuje, lebo $\frac{1}{x^2+a^2} \approx \frac{1}{x^2}$ pre $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$.

Funkcia $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\frac{1}{z^2+a^2}$ má singulárne body $z_1 = \mathrm{i}a$, $z_2 = -\mathrm{i}a$, z nich iba $\operatorname{Im} z_1 = a > 0$. Ďalej funkcia $\frac{1}{z^2+a^2}$ spĺňa predpoklady Jordanovej lemy, a tak

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \operatorname{res}_{\mathrm{i}a}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\frac{1}{z^2 + a^2}\right).$$

Vypočítajme reziduum. Bod z_1 je jednoduchý pól a

$$\operatorname{res}_{\mathrm{i}a}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\frac{1}{z^2 + a^2}\right) = \lim_{z\to\mathrm{i}a}(z - \mathrm{i}a)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{(z - \mathrm{i}a)(z + \mathrm{i}a)} = \frac{\mathrm{e}^{-a}}{2\mathrm{i}a}.$$

Potom

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2\mathrm{i}a} = \frac{\pi\mathrm{e}^{-a}}{a}.$$

Porovnaním reálnych a imaginárnych zložiek dostaneme

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\mathrm{e}^{-a}}{2a}, \qquad \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{x^2 + a^2}\,\mathrm{d}x = 0.$$

□