6 Operátorový počet

V 19. storočí sa viacerí matematici a fyzici zaoberali problémami zložitosti výpočtov pri riešení hlavne fyzikálnych úloh, riešení diferenciálnych rovníc, integro–diferenciálnych úloh a pod. Myšlienka bola preniesť matematickú analýzu do inej oblasti, kde by boli jednoduchšie operácie. Podobne ako to bolo s logaritmom, ten mal zjednodušiť operácie s veľkými číslami. Logaritmus operáciu súčin, delenie, umocňovanie prevedie na súčet, rozdiel, súčin. Každému kladnému číslu vieme priradiť logaritmus a naopak. Samotný vzťah medzi číslom a logaritmom sa určí pomocou tabuľky. Pre praktické počítanie nepotrebujeme vedieť, ako boli tabuľky zostavené. Potrebujeme dobre vedieť vlastnosti logaritmov a pravidlá pre operácie.

Podobne je to s operátorovým počtom. Určia sa pravidlá práce s obrazmi, korešpodencia medzi predmetom a obrazom. Prechod od predmetu k obrazu a od obrazu k predmetu sa určí pomocou tabuľky. Metóda operátorového počtu je potom nasledovná:

- od hľadanej funkcie, predmetu, sa prejde k jej obrazu,
- pomocou pravidiel sa prevedú operácie s predmetmi na operácie s obrazmi,
- vyrieši sa rovnica s obrazmi vzhľadom na obraz,
- k nájdenému obrazu sa nájde predmet a ten je hľadaným riešením úlohy.

Jedna z efektívnych metód riešenia problémov v klasických oblastiach matematickej fyziky, v elektrotechnike a inde je Laplaceova transformácia[3].

6.1 Laplaceova transformácia

Definícia 6.1.1. Nech f je komplexná funkcia reálnej premennej $t \in (-\infty, +\infty)$ a nech $p = \sigma + \mathrm{i}s \in \mathbb{C}$ je komplexná premenná. Nech nevlastný integrál

$$\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{6.1}$$

existuje a má konečnú hodnotu aspoň pre jeden bod $p \in \mathbb{C}$. Potom integrál (6.1) nazývame **Laplaceov integrál funkcie f**.

Laplaceov integrál závisí od komplexnej premennej p ako od parametra. Je zrejmé, že vo všeobecnosti nekonverguje pre každú funkciu f a ľubovoľný parameter p ako to ukazuje

[3]Laplace, Pierre Simon (1749–1827), francúzsky matematik, fyzik, astronóm

nasledujúci príklad.

Príklad 6.1.2. Nájdite Laplaceov integrál funkcie: a) $f(t) = 1$; b) $f(t) = \mathrm{e}^{at}$, $a \in \mathbb{C}$.

Riešenie. a) Z definície nevlastného integrálu máme

$$\int_0^\infty 1 \cdot \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-pA} \right).$$

Pretože $A \in \mathbb{R}$, tak $\left|\mathrm{e}^{-pA}\right| = \left|\mathrm{e}^{-A(\sigma+\mathrm{i}s)}\right| = \mathrm{e}^{-\sigma A}$. Ak

- $\sigma = \operatorname{Re} p > 0$, tak Laplaceov integrál funkcie $f(t) = 1$ konverguje k funkcii $F(p) = \frac{1}{p}$;
- $\operatorname{Re} p \leq 0$, tak Laplaceov integrál neexistuje.

b) Opäť z definície

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-(p-a)t}\mathrm{d}t = \lim_{A\to\infty} \left(\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p-a}\mathrm{e}^{-(p-a)A} \right).$$

Ak $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a$, tak integrál je rovný $F(p) = \frac{1}{p-a}$ a pre $\operatorname{Re} p \leq \operatorname{Re} a$ integrál diverguje. □

Všimnime si, že funkcia $F(p) = \frac{1}{p}$ je analytická na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, a teda aj na $\operatorname{Re} p \leq 0$, kde Laplaceov integrál neexistuje. Podobne funkcia $F(p) = \frac{1}{p-a}$ je analytická na $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Definícia 6.1.3. Nech f je komplexná funkcia reálnej premennej $t \in (-\infty, +\infty)$ a nech $\mathbb{D}$ je množina tých hodnôt parametra $p \in \mathbb{C}$, pre ktoré Laplaceov integrál (6.1) konverguje. Komplexnú funkciu F určenú predpisom

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \quad p \in \mathbb{D}, \tag{6.2}$$

nazývame **Laplaceov obraz funkcie f**. Transformáciu danú vzťahom (6.2), ktorá priraďuje funkcii f jej Laplaceov obraz F, nazývame **Laplaceova transformácia**.

Vzťah medzi funkciou f a jej Laplaceovým obrazom F zapisujeme $\boldsymbol{f(t) \doteqdot F(p)}$ alebo $\boldsymbol{\mathcal{L}[f(t)] = F(p)}$. Používa sa aj označenie $f(t) \leftrightarrow F(p)$, $f(t) \longleftarrow\!\circ\, F(p)$, $f(t) \widehat{=} F(p)$. V týchto zápisoch sa po dohode používajú symboly pre funkčné hodnoty $f(t)$, $F(p)$ a nie, ako by bolo správne, iba f, F. Tento zápis sa používa na zvýraznenie, že funkcia f má premennú t a funkcia F má premennú p.

Poznámka. V praxi, hlavne v elektrotechnike, sa používa aj Laplaceova-Carsonova transformácia (tiež Heavisidova[4])

$$F_h(p) = p \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-pt} \mathrm{d}t, \tag{6.3}$$

ktorá sa líši od Laplaceovej činiteľom p, t.j. $F_h(p) = pF(p)$.

Je zrejmé, že nie každá funkcia môže mať Laplaceov obraz. Musí spĺňať určité podmienky.

Definícia 6.1.4. Funkciu f nazývame **predmet** alebo **originál**, ak spĺňa podmienky:

1. f je na intervale $\langle 0, +\infty)$ po častiach spojitá funkcia, t.j. na každom konečnom intervale $\langle a, b\rangle \subset \langle 0, +\infty)$ má konečný počet bodov nespojitosti prvého druhu (v tomto bode existujú konečné limity funkcie f sprava a zľava),
2. pre ľubovoľné $t < 0$ je $f(t) = 0$,
3. existujú reálne čísla $M > 0$ a α také, že pre každé $t \in \langle 0, +\infty)$ platí

$$|f(t)| \leq M\, \mathrm{e}^{\alpha t}. \tag{6.4}$$

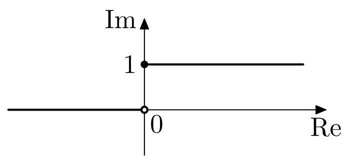
Definícia hovorí, že:

- Laplaceov integrál nezávisí od správania sa funkcie na intervale $(-\infty, 0)$. To znamená, že dve funkcie, ktoré sú totožné pre $t \geq 0$ a rôzne pre $t < 0$, majú ten istý obraz. Druhou požiadavkou je to však vylúčené. Z fyzikálneho hľadiska je to dobré, lebo v praxi sa skúma fyzikálny proces od určitého časového okamihu, napr. $t = 0$.
- Tretej podmienke vyhovujú ohraničené, ale aj neohraničené funkcie, ktoré rastú „pomalšie" ako exponenciálna funkcia.

Definícia 6.1.5. Nech $\alpha_0 = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \text{ vyhovuje podmienke (6.4)}\}$. Číslo α_0 nazývame **index rastu predmetu *f***.

Dôležitým predmetom je jednotková (**Heavisidova**) funkcia

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{pre } t \geq 0, \\ 0, & \text{pre } t < 0. \end{cases}$$



[4]Heaviside, Oliver (1850–1925), anglický elektrotechnik a matematik

Bod $t = 0$ je bodom nespojitosti prvého druhu a už sme určili, že $\eta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}$.

Súčinom Heavisidovej funkcie a funkcie f dostaneme funkciu, ktorá je rovná nule pre $t < 0$, t.j.

$$\eta(t)f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pre}\, t \geq 0, \\ 0, & \text{pre}\, t < 0. \end{cases}$$

Ak funkcia f spĺňa vlastnosti 1. a 3. predmetu a nespĺňa vlastnosť 2, tak funkcia $\eta(t)f(t)$ už má všetky vlastnosti predmetu. Ďalej budeme predpokladať, že funkcia f má vlastnosť 2. (okrem 1. a 3.), aby sme vždy nemuseli písať $\eta(t)f(t)$. Napr. pod $f(t) = \cos t$ budeme rozumieť funkciu $f(t) = \cos t$ pre $t \geq 0$ a $f(t) = 0$ pre $t < 0$.

Príklad 6.1.6. Môžu byť funkcie a) $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$; b) $f(t) = \operatorname{tg} t$; c) $f(t) = \mathrm{e}^{t^2}$ predmetmi?

Riešenie. a) Funkcia $f(t) = \dfrac{1}{t+2}$ je na intervale $\langle 0, +\infty)$ spojitá. Keďže pre $t \geq 0$ platí $\left|\dfrac{1}{t+2}\right| \leq \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^0$, je jej index rastu $\alpha_0 = 0$.

b) Funkcia $f(t) = \operatorname{tg} t$ je nespojitá v bodoch $\dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k = 0, 1, \dots$ a sú to body nespojitosti druhého druhu, tak nemôže byť predmet.

c) Nemôže byť predmet, lebo rastie rýchlejšie ako akákoľvek exponenciála. □

Veta 6.1.7. [o existencii Laplaceovho obrazu] *Nech f je predmet s indexom rastu α_0. Potom Laplaceov integrál*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

absolútne konverguje v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$ *a definuje Laplaceov obraz F, ktorý je v tejto polrovine analytickou funkciou.*

Vo väčšine prípadov sú funkcie F analytické na väčšej množine ako je $\operatorname{Re} p > \alpha_0$. Nás ďalej bude zaujímať viac správanie sa funkcie F a nie oblasť, kde sa vyjadruje Laplaceovým integrálom. Vždy však vieme, že na nejakej polrovine Laplaceov integrál konverguje. Preto, napr. funkcia $F(p) = \operatorname{tg} p$ nemôže byť obrazom. Má singulárne body $p_k = \frac{2k-1}{2}\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, a tak neexistuje polrovina $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, na ktorej by bola táto funkcia analytická.

Veta 6.1.8. *Nech F je Laplaceov obraz predmetu f a $\sigma = \operatorname{Re} p$. Potom* $\lim\limits_{\sigma \to +\infty} F(p) = 0$.

Dôkaz. Tvrdenie vyplýva z odhadu

$$|F(p)| = \left|\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^\infty M\,\mathrm{e}^{-(\sigma-\alpha_0)t} = \frac{M}{\sigma - \alpha_0}, \quad \sigma > \alpha_0.$$

□

Príklad 6.1.9. Funkcia $F(p) = \sqrt{p}$ nemôže byť obraz žiadnej funkcie, lebo $\lim\limits_{\sigma\to+\infty} \sqrt{p} \neq 0$.

Úplnejšiu informáciu o správaní sa funkcie F v okolí bodu nekonečno dáva nasledujúca veta (dôkaz pozri v práci [4]).

Veta 6.1.10. [prvá veta o limite] *Nech f je predmet s indexom rastu α_0 a nech α je ľubovoľné reálne číslo, $\alpha > \alpha_0$. Potom pre Laplaceov obraz F predmetu f platí*

$$\lim_{\substack{\sigma\to\infty\\ \operatorname{Re} p\geq\alpha}} F(p) = 0.$$

6.2 Základné vlastnosti Laplaceovej transformácie

Uvedieme niektoré vlastnosti, ktoré pomôžu hľadať obrazy k daným predmetom a zostavíme základnú tabuľku korešpodencie medzi predmetmi a obrazmi a ďalej vlastnosti, ktoré sa týkajú operácií s funkciami. Najprv sa pozrieme na vlastnosti týkajúce sa hľadania obrazov. Zvlášť dôležité korešpodencie sú

$$1 \doteqdot \frac{1}{p},\ \operatorname{Re} p > 0; \qquad \mathrm{e}^{at} \doteqdot \frac{1}{p-a},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a.$$

Nasledujúca vlastnosť vyplýva z linearity integrálu.

Veta 6.2.1. [o lineárnosti] *Nech f_k sú predmety, $f_k(t) \doteqdot F_k(p)$ a $c_k \in \mathbb{C}$ sú ľubovoľné konštanty, kde $k = 1, 2, \dots n$, $n \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\, f_k(t) \doteqdot \sum_{k=1}^{n} c_k\, F_k(p).$$

Príklad 6.2.2. Nech $\omega, \varphi \in \mathbb{C}$. Potom pre $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re}(\pm \mathrm{i}\omega) = |\operatorname{Im}\omega|$

$$\begin{aligned}
\sin\omega t &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2\mathrm{i}} \doteqdot \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega} - \frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2},\\
\cos\omega t &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}}{2} \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{p+\mathrm{i}\omega}\right) = \frac{p}{p^2+\omega^2},\\
\sin(\omega t+\varphi) &= \sin\omega\,\cos\varphi + \cos\omega\,\sin\varphi \doteqdot \frac{\omega\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

Ak $\omega = 1$, tak $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$ a $\cos t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+1}$.

Veta 6.2.3. [o podobnosti, resp. o zmene mierky] *Nech f je predmet a $f(t) \doteqdot F(p)$. Ak $\lambda > 0$, tak*

$$f(\lambda t) \doteqdot \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \tag{6.5}$$

Dôkaz. Ľahko sa overí, že ak α_0 je index rastu funkcie $f(t)$, tak $\lambda\alpha_0$ je index rastu funkcie $f(\lambda t)$ a pomocou substitúcie $\lambda t = u$ dostaneme

$$f(\lambda t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty f(\lambda t)e^{-pt}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty f(u)e^{-\frac{p}{\lambda}u}\mathrm{d}u = \frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

□

Príklad 6.2.4. Ak $\cos t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+1}$, potom $\cos 3t \risingdotseq \dfrac{1}{3}\dfrac{\frac{p}{3}}{\left(\frac{p}{3}\right)^2+1} = \dfrac{p}{p^2+3^2}$.

Poznámka. Ak vo vzťahu (6.5) nahradíme $\lambda \approx \dfrac{1}{\lambda}$, máme

$$\frac{1}{\lambda}f\left(\frac{t}{\lambda}\right) \doteq F(\lambda p).$$

V mechanike sa často stretávame s funkciami $\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$, $\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$, ktoré predstavujú tlmené kmitanie, ak $a < 0$. O obrazoch takých funkcií hovorí veta o tlmení.

Veta 6.2.5. [o tlmení, resp. o násobku predmetu exponenciálnou funkciou] *Nech f je predmet, $f(t) \risingdotseq F(p)$ a $a \in \mathbb{C}$. Potom*

$$\mathrm{e}^{at}f(t) \risingdotseq F(p-a),$$

t.j. násobenie predmetu funkciou e^{at} vedie k substitúcii nezávisle premennej p na $p-a$, $\operatorname{Re} p > \alpha_0 + \operatorname{Re} a$.

Dôkaz. Dôkaz plynie priamo z definície Laplaceovej transformácie

$$\mathrm{e}^{at}f(t) \risingdotseq \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{at}f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-(p-a)t}\mathrm{d}t = F(p-a).$$

□

Príklad 6.2.6. Nájdite Laplaceov obraz funkcií : $f(t) = \mathrm{e}^{at}\sin\omega t$, $f(t) = \mathrm{e}^{-4t}\sin 3t\,\cos 2t$.

Riešenie. Použitím Vety o tlmení máme

$$\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \quad \to \quad \mathrm{e}^{at}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2},\ \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} a + |\operatorname{Im}\omega|\,.$$

Na nájdenie Laplaceovho obrazu druhej funkcie najprv upravíme túto funkciu a použijeme Vetu o lineárnosti

$$\sin 3t\,\cos 2t = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t) \risingdotseq \frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+25} + \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Teraz podľa Vety o tlmení

$$\mathrm{e}^{-4t}\sin 3t\,\cos 2t = \mathrm{e}^{-4t}\frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t) \doteqdot \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+4)^2+25} + \frac{1}{(p+4)^2+1}\right),\ \operatorname{Re} p > -4.$$

□

Nasledujúca veta sa často používa pri riešení niektorých typov parciálnych diferenciálnych rovníc. Dôkaz pozri napr. v práci [4].

Veta 6.2.7. *Nech existujú reálne konštanty $M > 0$, $L > 0$ a α také, že pre ľubovoľné $(t,\lambda) \in A = \langle 0, +\infty) \times \langle 0, L\rangle$ platí $|f(t,\lambda)| \le M\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, $\left|\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda}\right| \le M\,\mathrm{e}^{\alpha t}$ a nech f, $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ sú spojité na A. Ak $f(t,\lambda) \doteqdot F(p,\lambda)$, tak*

$$\frac{\partial f(t,\lambda)}{\partial\lambda} \doteqdot \frac{\partial F(p,\lambda)}{\partial\lambda}.$$

Príklad 6.2.8. Nájdite Laplaceov obraz funkcií: 1)$f(t) = t^n\mathrm{e}^{at}$, 2) $f(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$, 3) $f(t) = t\cos\omega t$.

Riešenie. 1) Vychádzajme z transformácie $\mathrm{e}^{at} \doteqdot \dfrac{1}{p-a}$ a zoberme a parameter. Deriváciou podľa a máme

$$t\,\mathrm{e}^{at} \doteqdot \frac{1}{(p-a)^2},\quad t^2\,\mathrm{e}^{at} \doteqdot \frac{2}{(p-a)^3},\ \ldots, t^n\,\mathrm{e}^{at} \doteqdot \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

2) Ak v poslednom vzťahu položíme $a = 0$, dostaneme $t^n \doteqdot \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

3) Vieme, že $\cos\omega t \doteqdot \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$. Derivovaním podľa ω máme

$$-t\sin\omega t \doteqdot \frac{-2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2} \ \to\ t\sin\omega t \doteqdot \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}.$$

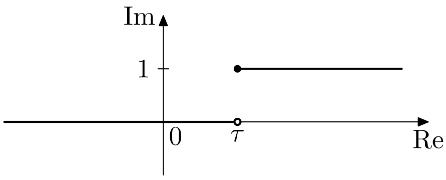
□

Objasníme si pojem posunutia, ktorý má význam pri funkciách, ktoré popisujú impulzové procesy.

Definícia 6.2.9. Nech f je komplexná funkcia definovaná na $A \subset \mathbb{R}$ a nech τ je dané reálne číslo. **Posunutou funkciou** nazývame funkciu g, ktorej definičný obor je množina $A_\tau = \{t \in \mathbb{R} : t - \tau \in A\}$ a je definovaná predpisom $g(t) = f(t-\tau)$, $t \in A_\tau$. Posunutá funkcia sa zvykne označovať f_τ.

Poznámka. Ak f je reálna funkcia, tak graf g dostaneme posunutím grafu f o hodnotu $|\tau|$. Pritom, ak $\tau > 0$, posúvame vpravo, ak $\tau < 0$, posúvame vľavo (v zmysle reálnej osi). Posunutím jednotkovej funkcie o τ dostaneme

$$\eta(t-\tau) = \begin{cases} 1, & \text{pre } t \geq \tau, \\ 0, & \text{pre } t < \tau. \end{cases}$$

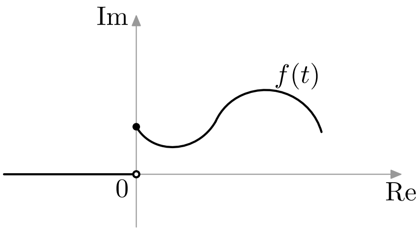


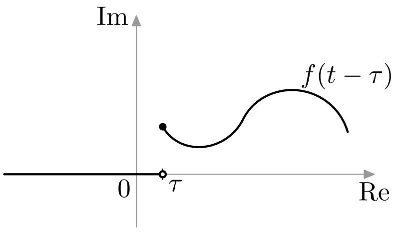
Ak f je predmet, má aj posunutá funkcia vlastnosti predmetu?

- Prvá podmienka (po častiach spojitá funkcia) je splnená.
- Tretia podmienka. Keďže f je predmet, tak $|f(t)| \leq M\,\mathrm{e}^{\alpha t}$. Potom

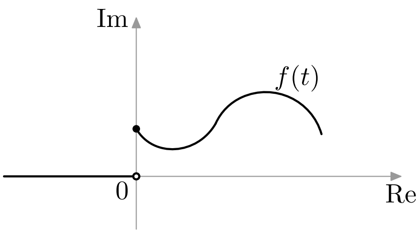
$$|f(-\tau)| \leq M\,\mathrm{e}^{\alpha(t-\tau)} = M_1\,\mathrm{e}^{\alpha t},\ M_1 = M\,\mathrm{e}^{-\alpha\tau}.$$

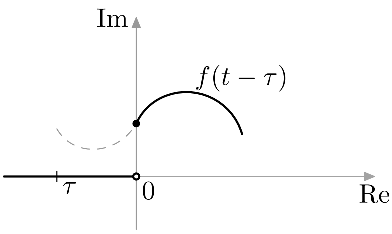
  Je splnená aj tretia podmienka pre f_τ.
- Druhá podmienka. Ak $\tau > 0$, platí aj pre funkciu $f_\tau(t) = f(t-\tau)$. Ak však $\tau < 0$,





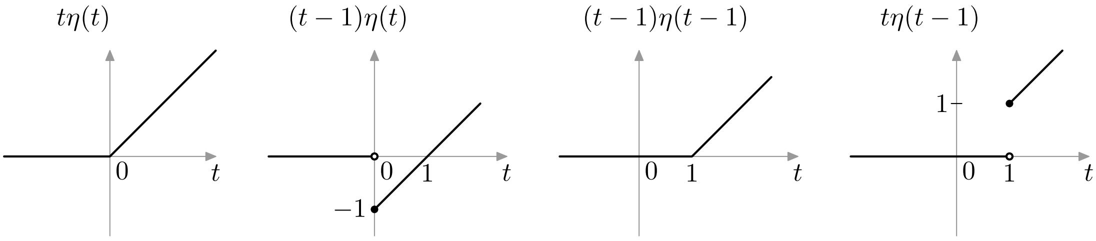
  druhá podmienka nemusí platiť. Pre $\tau < t < 0$ môže byť $f(t-\tau) \neq 0$. V tom prípade položíme $f(t-\tau) = 0$ pre $t \in (\tau, 0)$.





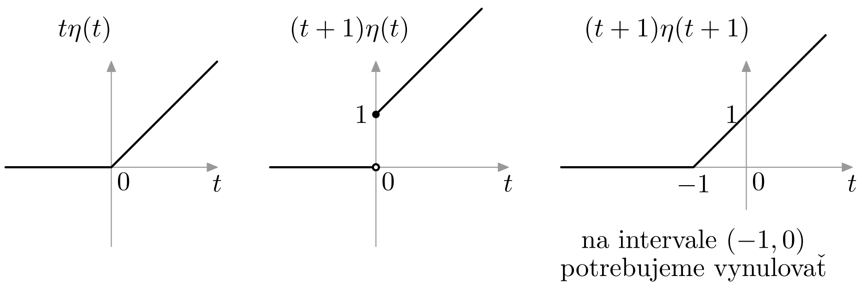
Aby sa rozlíšilo v zápise $f(t-\tau)$, či ide o $\tau > 0$ alebo $\tau < 0$, budeme písať: $f(t-\tau)$ a $f(t+\tau)$ (s nulovou funkciou na $(-\tau, 0)$) a v obidvoch prípadoch $\tau > 0$.

Mali sme dohodu, že pri zápise predmetu nepíšeme funkciu η. Pri posúvaní vpravo však môže dôjsť k omylu. Zoberme funkciu $f(t) = t$ a pozrime sa na grafy funkcií $f(t)\eta(t)$, $f(t-1)\eta(t)$, $f(t-1)\eta(t-1)$, $f(t)\eta(t-1)$ na obrázkoch. Iná je funkcia $\eta(t)\,f(t-\tau)$ a



$\eta(t-\tau)\, f(t-\tau)$. Preto pre $\tau > 0$ budeme písať $\eta(t-\tau)\, f(t-\tau)$.

Pri posúvaní vľavo ($\tau < 0$) k podobným nejasnostiam nedochádza a stačí písať funkciu $f(t+\tau)$, pričom v súlade s dohovorom sa uvažuje funkcia $f(t+\tau)\eta(t)$. Totiž ak posunieme graf funkcie $\eta(t)f(t)$ vľavo, tak pre zabezpečenie druhej podmienky predmetu dostaneme graf funkcie $\eta(t)f(t+\tau)$ a nie $\eta(t+\tau)f(t+\tau)$. Zoberme funkciu $f(t) = t$ a posunutie grafu $t\eta(t)$ vľavo. Pre zabezpečenie druhej podmienky predmetu z posledného grafu dostaneme



graf funkcie $(t+1)\eta(t)$.

Veta 6.2.10. [o posunutí, oneskorení predmetu] *Nech f je predmet, $f(t) \doteqdot F(p)$ a $\tau > 0$. Potom*

$$\eta(t-\tau)\, f(t-\tau) \doteqdot \mathrm{e}^{-\tau p}\, F(p), \tag{6.6}$$

t.j. posunutie predmetu o τ odpovedá násobeniu obrazu funkciou $\mathrm{e}^{-\tau p}$.

Dôkaz. Dôkaz plynie opäť z definície Laplaceovej transformácie. Keďže $f(t-\tau)\eta(t-\tau) = 0$ pre $t < \tau$, je

$$\int_0^\infty f(t-\tau)\, \eta(t-\tau)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t = \int_\tau^\infty f(t-\tau)\, \eta(t-\tau)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t.$$

Použitím substitúcie $t - \tau = u$ do posledného integrálu dostaneme:

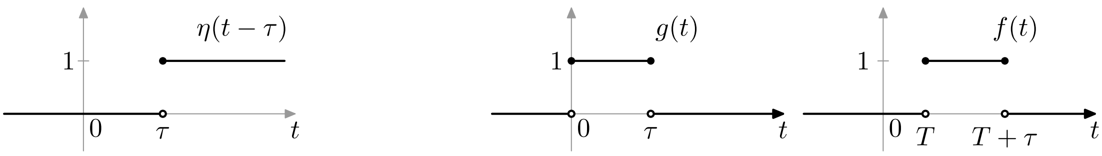
$$\eta(t-\tau)\, f(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty f(u)\eta(u)\, \mathrm{e}^{-p(u+\tau)}\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-p\tau} \int_0^\infty f(u)\eta(u)\, \mathrm{e}^{-pu}\, \mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-p\tau} F(p).$$

□

Príklad 6.2.11. Nájdite obraz funkcie: a) $f(t) = \eta(t-\tau)$;

b) $f(t) = \begin{cases} 1, & \text{pre}\, t \in \langle T, T+\tau\rangle\,, \\ 0, & \text{pre}\, t \in (-\infty, T) \cup (T+\tau, \infty),\ T > 0, \end{cases}$ tzv. jednotkového impulzu.

Riešenie.
a) Jednoducho $\eta(t) \doteqdot \dfrac{1}{p} \longrightarrow \eta(t-\tau) \doteqdot \dfrac{e^{-\tau p}}{p}$. b) Zoberme funkcie $\eta(t)$ a $\eta(t-\tau)$. Ich



odčítaním dostaneme funkciu $g(t) = \eta(t) - \eta(t-\tau)$, ktorej Laplaceov obraz je funkcia

$$g(t) \doteqdot \frac{1}{p} - \frac{e^{-\tau p}}{p} = \frac{1}{p}(1 - e^{-\tau p}).$$

Ak posunieme funkciu $g(t)$ vpravo o T, dostaneme graf danej funkcie f, to znamená $f(t) = \eta(t-T)g(t-T)$. Potom podľa Vety o posunutí

$$f(t) = \eta(t-T)g(t-T) \doteqdot \frac{1}{p}(1 - e^{-\tau p})e^{-Tp}.$$

□

Veta 6.2.12. [o predstihu] *Nech funkcia f je predmet, $f(t) \doteqdot F(p)$ a $\tau > 0$. Potom*

$$f(t+\tau)\eta(t) \doteqdot e^{\tau p}\left[F(p) - \int_0^\tau f(t)\, e^{-pt}\, dt\right]. \tag{6.7}$$

Dôkaz. Dôkaz vychádza z definície Laplaceovej transformácie, pričom sa využije vlastnosť jednotkovej funkcie $\eta(s) = \eta(s-\tau)$ pre $s > \tau$ a substitúcia $t + \tau = s$. Potom

$$f(t+\tau)\eta(t) \doteqdot \int_0^\infty f(t+\tau)\eta(t)e^{-pt}\, dt = \int_\tau^\infty f(s)\eta(s-\tau)e^{-p(s-\tau)}\, ds = e^{p\tau}\int_\tau^\infty f(s)\eta(s)e^{-ps)}\, ds,$$

odkiaľ už máme tvrdenie vety. □

Príklad 6.2.13. Nájdite obraz funkcie $f(t) = \sin(t+\varphi)\eta(t)$, $\varphi > 0$.

Riešenie. Pretože $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$. Pomocou metódy per-partes vypočítame integrál

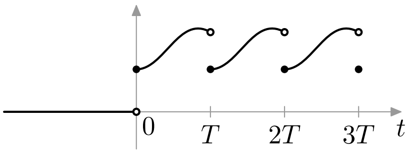
$$\int_0^\varphi \sin t\, e^{-pt}\, dt = \left[-e^{-pt}\frac{\cos t + p \sin t}{p^2+1}\right]_0^\varphi = -e^{-p\varphi}\frac{\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1}.$$

Podľa vzťahu (6.7)

$$\sin(t+\varphi)\eta(t) \risingdotseq \mathrm{e}^{p\varphi}\left[\frac{1}{p^2+1} + \mathrm{e}^{-p\varphi}\frac{\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1}\right] = \frac{\cos\varphi + p\sin\varphi}{p^2+1}.$$

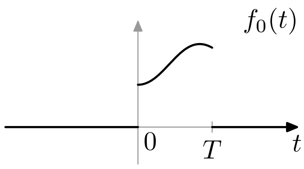
□

Periodické funkcie. Nech predmet f je pre $t \geq 0$ periodická funkcia s periódou T. Aby táto funkcia bola definovaná pre všetky t, stačí zadať periódu T a predpis, ktorým je definovaná na intervale $(a, a+T)$ pre a nezáporné číslo. V bodoch $t_n = a + nT$ nemusí byť definovaná.



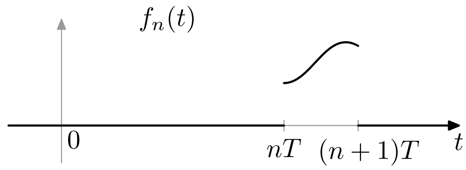
Zoberieme špeciálny prípad $a = 0$. Definujme

$$f_0(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pre } 0 < t < T, \\ 0, & \text{pre } t < 0 \text{ a } t > T. \end{cases}$$



Ak posunieme graf funkcie f_0 o hodnotu nT, $n = 1, 2, \ldots$, dostaneme graf funkcie

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t), & \text{pre } nT < t < (n+1)T, \\ 0, & \text{pre } t < nT \text{ a } t > (n+1)T, \end{cases}$$



t.j. graf funkcie $f_n(t) = f_0(t - nT)\eta(t - nT)$. Potom

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT)\eta(t - nT).$$

Veta 6.2.14. [o obraze periodickej funkcie] *Nech funkcia f je predmet s periódou T. Potom jej Laplaceov obraz je určený vzťahom*

$$F(p) = \frac{\int_0^T f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t}{1 - \mathrm{e}^{-Tp}}. \tag{6.8}$$

Dôkaz. Použijeme definíciu Laplaceovej transformácie a periodičnosť funkcie f, t.j. rovnosť $f(t) = f(t - nT)$ pre $t \in (nT, (n+1)T)$. Potom

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{nT}^{(n+1)T} f(t - nT)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Na posledný integrál použijeme substitúciu $t = s + nT$, čím dostávame

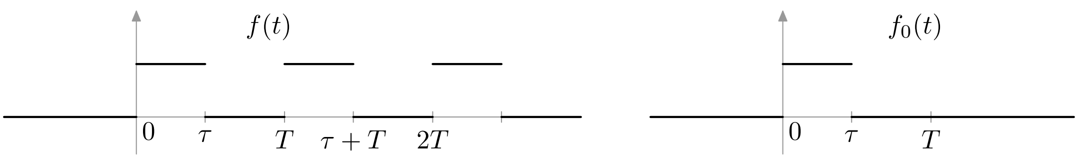
$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T f(s)\, \mathrm{e}^{-p(s+nT)}\, \mathrm{d}s = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-pTn} \int_0^T f(s)\, \mathrm{e}^{-ps}\, \mathrm{d}s.$$

Rad $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-pTn}$ je geometrický rad s kvocientom $q = \mathrm{e}^{-pT}$. Keďže $\left|\mathrm{e}^{-pT}\right| = \mathrm{e}^{-\sigma T} < 1$ pre $\mathrm{Re}\, p = \sigma > 0$, tento rad konverguje v polrovine $\mathrm{Re}\, p > 0$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-pTn} = \dfrac{1}{1 - \mathrm{e}^{-Tp}}$. □

Poznámka. Vzťah (6.8) môžeme prepísať

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - \mathrm{e}^{-Tp}}, \quad \text{kde} \quad f_0(t) \doteqdot F_0(p). \tag{6.9}$$

Príklad 6.2.15. Nájdite obraz periodického signálu $f(t) = 1$ pre $t \in (0, \tau)$, $f(t) = 0$ pre $t \in (\tau, T)$ a $f(t) = f(t + T)$ pre $t > 0$.



Riešenie. Zapíšme funkciu f_0 v tvare $f_0(t) = \eta(t) - \eta(t - \tau)$. Jej obraz

$$f_0(t) \doteqdot F_0(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-\tau p} = \frac{1}{p}\left(1 - \mathrm{e}^{-\tau p}\right).$$

Podľa vzťahu (6.9) je obraz danej funkcie $F(p) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-\tau p}}{p\,(1 - \mathrm{e}^{-Tp})}$. □

Ďalej sa budeme zaoberať operáciami derivovania a integrovania. Na nich je založené použitie operátorového počtu pri riešení diferenciálnych rovníc v elektrotechnike.

Veta 6.2.16. [o derivovaní predmetu] *Nech funkcia f a jej derivácia f' sú predmety a f je spojitá na $(0, +\infty)$. Ak $f(t) \doteqdot F(p)$, potom Laplaceov obraz derivácie f' je určený vzťahom*

$$f'(t) \doteqdot pF(p) - f(0+), \quad f(0+) = \lim_{t \to 0^+} f(t), \tag{6.10}$$

t.j. derivovanie predmetu vedie k násobeniu obrazu p a odčítaniu hodnoty $f(0+)$.

Dôkaz. Dôkaz sa robí cez definíciu Laplaceovej transformácie a použitím metódy per-partes pri výpočte integrálu. Dá sa ukázať, že ak α_0 je index rastu funkcie f', tak je aj index rastu funkcie f. □

Matematickou indukciou sa potom dokáže:

Veta 6.2.17. *Nech funkcia f a všetky jej derivácie až do rádu n sú predmety a funkcia f a jej derivácie do rádu $n-1$, $f', \dots, f^{(n-1)}$, sú spojité na $(0, +\infty)$. Ak $f(t) \doteqdot F(p)$, potom Laplaceov obraz n-tej derivácie je určený vzťahom*

$$f^{(n)}(t) \doteqdot p^n F(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \dots f^{(n-1)}(0+), \tag{6.11}$$

kde $f^{(k)}(0+) = \lim\limits_{t \to 0^+} f^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \dots (n-1)$.

Príklad 6.2.18. Nájdite obraz funkcie $f(t) = \sin^3 t$.

Riešenie. Nech $f(t) = \sin^3 t \doteqdot F(p)$. Zoberme derivácie funkcie f až do toho rádu, pri úprave ktorého sa objaví pôvodná funkcia, t.j.

$$\left(\sin^3 t\right)' = 3 \sin^2 t \cos t, \qquad \left(\sin^3 t\right)'' = 6 \sin t \cos^2 t - 3 \sin^3 t = 6 \sin t - 9 \sin^3 t.$$

Poslednej funkcii vieme priradiť obraz

$$6 \sin t - 9 \sin^3 t \doteqdot \frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p).$$

Keďže $\left[\sin^3 t\right]_{t=0} = 0$ a $\left[\left(\sin^3 t\right)'\right]_{t=0} = 0$, podľa Vety o derivácii predmetu

$$\left(\sin^3 t\right)'' \doteqdot p^2 F(p) - p \cdot 0 - 0 = p^2 F(p).$$

Porovnaním obrazov máme:

$$p^2 F(p) = \frac{6}{p^2 + 1} - 9F(p) \quad \Rightarrow \quad F(p) = \frac{6}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$$

$\square$

Z Vety o derivácii vyplývajú dôležité dôsledky:

Dôsledok 6.2.19. [druhá veta o limite] *Nech sú splnené predpoklady Vety o derivácii predmetu a α_0 je index rastu funkcie f'. Ak $f(t) \doteqdot F(p)$, potom $\lim\limits_{p \to \infty} pF(p) = f(0+)$ pre $p \to \infty$ v polrovine $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$.*

Dôsledok 6.2.20. [tretia veta o limite] *Ak sú splnené predpoklady Vety o derivácii predmetu, $f(t) \doteqdot F(p)$ a existuje $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) \neq +\infty$, potom $\lim\limits_{p \to 0} pF(p) = \lim\limits_{t \to \infty} f(t)$.*

Veta 6.2.21. [o integrovaní predmetu] *Nech f je predmet a $f(t) \risingdotseq F(p)$. Potom*

$$\int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \tag{6.12}$$

t.j. integrovanie predmetu vedie k deleniu obrazu jeho argumentom.

Dôkaz. Označme $g(t) = \int\limits_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \risingdotseq G(p)$. Podľa Vety o derivovaní predmetu

$$g'(t) \risingdotseq pG(p) - g(0) = pG(p).$$

Pretože $g'(t) = f(t)$ a $g(0) = 0$, posledný vzťah hovorí, že $f(t) \risingdotseq pG(p)$. Zároveň však $f(t) \risingdotseq F(p)$, odkiaľ vyplýva $G(p) = \frac{F(p)}{p}$. □

Príklad 6.2.22. Nájdite obraz funkcie $f(t) = t^n$, kde n je prirodzené číslo.

Riešenie. Podľa Vety o integrovaní predmetu postupne dostaneme:

$$t = \int\limits_0^t 1 \cdot \mathrm{d}s \quad \text{a} \quad 1 \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \qquad t \risingdotseq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{1}{p^2}$$

$$t^2 = 2\int\limits_0^t s\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad t \risingdotseq \frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \qquad t^2 \risingdotseq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{2!}{p^3}$$

$$\vdots$$

$$t^n = \int\limits_0^t s^{n-1}\,\mathrm{d}s \quad \text{a} \quad t^{n-1} \risingdotseq \frac{(n-1)!}{p^n} \quad \Rightarrow \qquad t^n \risingdotseq \frac{1}{p} \cdot \frac{(n-1)!}{p^n} = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

□

Príklad 6.2.23. Nájdite obraz funkcie $f(t) = \int\limits_0^t s^2\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s$.

Riešenie. Vieme, že $t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}$. Podľa Vety o tlmení potom $t^2 e^{-t} \risingdotseq \frac{2}{(p+1)^3}$ a podľa Vety o integrácii predmetu

$$\int\limits_0^t s^2\,\mathrm{e}^{-s}\,\mathrm{d}s \risingdotseq \frac{1}{p} \cdot \frac{2}{(p+1)^3} = \frac{2}{p(p+1)^3}.$$

□

Dôsledok 6.2.24. *Nech f je spojitý predmet na $\langle 0, +\infty)$ a $f(t) \doteqdot F(p)$. Ak existuje $\int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$, potom*

$$\int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0} F(p).$$

Príklad 6.2.25. Vypočítajte $\int\limits_0^\infty e^{-4t} \sin 3t \cos 2t\,\mathrm{d}t$.

Riešenie. Najprv upravíme funkcie $\sin 3t \cos 2t$:

$$\sin 3t \cos 2t = \frac{1}{2}(\sin 5t + \sin t) \;\doteqdot\; \frac{1}{2}\left(\frac{5}{p^2+25} + \frac{1}{p^2+1}\right).$$

Použijeme Vetu o tlmení

$$\mathrm{e}^{-4t} \sin 3t \cos 2t \;\doteqdot\; \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+4)^2+25} + \frac{1}{(p+4)^2+1}\right)$$

a podľa jej dôsledku

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-4t} \sin 3t \cos 2t\,\mathrm{d}t = \lim_{p\to 0} \frac{1}{2}\left(\frac{5}{(p+4)^2+25} + \frac{1}{(p+4)^2+1}\right) = \frac{63}{697}.$$

□

Veta 6.2.26. [o derivovaní obrazu] *Nech f je predmet a $f(t) \doteqdot F(p)$. Potom*

$$-\,tf(t) \;\doteqdot\; F'(p), \tag{6.13}$$

t.j. derivovanie obrazu vedie k násobeniu predmetu jeho záporným argumentom. Všeobecne $(-1)^n t^n f(t) \;\doteqdot\; F^{(n)}(p)$, kde n je prirodzené číslo.

Dôkaz. Obidva integrály $\int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$, $\int\limits_0^\infty (-tf(t))\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t$ rovnomerne konvergujú v polrovine $\mathrm{Re}\,p > \alpha > \alpha_0$, kde α_0 je index rastu funkcie f, a tak môžeme prvý integrál derivovať podľa p, t.j.

$$F(p) = \int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad F'(p) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial}{\partial p}\left(f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right)\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty (-tf(t))\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t.$$

Druhá časť sa dokáže matematickou indukciou. □

Príklad 6.2.27. Nájdite obrazy funkcií $f(t) = t \sin \omega t$, $g(t) = t^n\,\mathrm{e}^{at}$.

Riešenie. Vieme, že $\sin \omega t \doteqdot \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$ a $\mathrm{e}^{at} \doteqdot \dfrac{1}{p-a}$. Podľa Vety o derivácii obrazu máme

$$t \sin \omega t \doteqdot -\left(\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right)' = \frac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2},$$

$$(-1)^n t^n \,\mathrm{e}^{at} \doteqdot \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{(-1)^n n!}{(p-a)^{n+1}} \quad \Rightarrow t^n \,\mathrm{e}^{at} \doteqdot \frac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$$

□

Veta 6.2.28. [o integrácii obrazu] *Nech $f(t) \doteqdot F(p)$ a funkcia $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ je predmet s indexom rastu α_0. Ak existuje $\int\limits_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}z$, tak*

$$\frac{f(t)}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}z, \tag{6.14}$$

t.j. integrácii obrazu odpovedá delenie predmetu jeho argumentom.

Dôkaz nebudeme robiť. Pripomeňme však, že funkcia $F(p)$ je analytická v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, a tak integrál z funkcie $F(p)$ nezávisí od integračnej krivky ležiacej v tejto polrovine. Nevlastný integrál v (6.14) je definovaný ako v reálnej analýze, t.j.

$$\int\limits_p^\infty F(z)\,\mathrm{d}z = \lim_{A\to\infty} \int\limits_p^A F(z)\,\mathrm{d}z,$$

potom za integračnú cestu stačí zvoliť polpriamku pA vychádzajúcu z bodu p.

Príklad 6.2.29. Nájdite obraz funkcie $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Riešenie. Vieme, že $\sin t \doteqdot \dfrac{1}{p^2+1}$, potom

$$\frac{\sin t}{t} \doteqdot \int\limits_p^\infty \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = [\operatorname{arctg} z]_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arccotg} p.$$

□

Dôsledok 6.2.30. *Nech $f(t) \doteqdot F(p)$ a funkcia $g(t) = \frac{f(t)}{t}$ je spojitý predmet na $\langle 0, +\infty)$. Ak existuje $\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$, tak*

$$\int\limits_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty F(p)\,\mathrm{d}p.$$

Ďalej budeme hľadať predmet, ktorý odpovedá súčinu obrazov ako aj obraz súčinu predmetov.

Definícia 6.2.31. **Konvolúcia** alebo **konvolučný súčin** funkcií $f(t)$, $g(t)$ nazývame funkciu $h(t)$ definovanú predpisom

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ t \in (-\infty,\infty)\,.$$

Konvolúciu funkcií f, g označujeme $f * g$.

Je zrejmé, že ak f, g sú predmety, tak ich konvolúcia je funkcia

$$h(t) = (f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Ľahko sa overí, že konvolúcia má nasledujúce vlastnosti: $f*g = g*f$, $(f+g)*h = f*h+g*h$, $(f*g)*h = f*(g*h)$.

Veta 6.2.32. [o násobení obrazov, Borelova veta] *Nech f, g sú predmety s indexom rastu α_0^1, α_0^2 a $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Potom konvolúcia $h = f*g$ je predmet s indexom rastu $\alpha_0 = \max\{\alpha_0^1, \alpha_0^2\}$ a platí*

$$h(t) = (f*g)(t) \risingdotseq F(p)G(p).$$

Dôkaz. Vynecháme dôkaz, že konvolúcia

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

je predmet. Potom ak v jeho obraze zameníme poradie integrovania, máme

$$h(t) \risingdotseq \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty f(\tau)\int_\tau^\infty g(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\tau.$$

Ak použijeme substitúciu $t-\tau = u$, dostaneme tvrdenie vety. □

Veta 6.2.33. [o násobení predmetov] *Nech f, g sú predmety s indexom rastu α_0^1, α_0^2 a $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$. Potom*

$$f(t)\cdot g(t) \risingdotseq \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(z)G(p-z)\,\mathrm{d}z,$$

kde $\int\limits_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(z)G(p-z)\,\mathrm{d}z = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a-\mathrm{i}b}^{a+\mathrm{i}b} F(z)G(p-z)\,\mathrm{d}z$*, integrál je po krivke* $z = a + \mathrm{i}t$*,* $t \in \langle -b, b\rangle$*,* $0 < b \in \mathbb{R}$*,* $a > \alpha_0 = \max\{\alpha_0^1, \alpha_0^2\}$*.*

6.3 Inverzná Laplaceova transformácia

V predchádzajúcej časti sme uviedli pravidlá, ako nájsť k funkcii $f(t)$ jej obraz a postačujúce podmienky, aby takýto obraz existoval. Vieme, že ak funkcie f, g, ktoré vyhovujú týmto podmienkam a $f(t) = g(t)$ skoro všade, t.j. s výnimkou izolovaných singulárnych bodov (integrál nezávisí od hodnôt funkcie v izolovaných singulárnych bodoch), potom sa ich Laplaceove obrazy rovnajú $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$. Vzniká otázka, či ten istý obraz $F(p)$ budú mať aj funkcie, ktoré sa podstatne odlišujú, nielen v izolovaných singulárnych bodoch. O tom hovorí veta.

Veta 6.3.1. *Ak f, g sú predmety s rovnakým Laplaceovým obrazom, t.j. $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$, potom $f(t) = g(t)$ skoro všade.*

Z toho, čo sme uviedli, vyplýva, že $\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)]$ práve vtedy, keď $f(t) = g(t)$ skoro všade. V praxi na hodnotách funkcie v izolovaných bodoch nezáleží a preto funkcie, ktoré sa líšia v izolovaných bodoch nebudeme pri Laplaceovej transformácii rozlišovať. Potom Laplaceova transformácia je jedno–jednoznačné zobrazenie a existuje k nemu inverzné zobrazenie, ktoré nazývame **spätná Laplaceova transformácia** a označujeme ju $\mathcal{L}^{-1}$. Teda ak $F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$, potom $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$. Napr.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{(p-a)^n}\right] = t^n e^{at}, \quad \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^2+1}\right] = \sin t.$$

Ľahko sa ukáže, že spätná Laplaceova transformácia je lineárna, t.j. pre každé čísla c_1, c_2 je

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1F(p) + c_2G(p)] = c_1\mathcal{L}^{-1}[F(p)] + c_2\mathcal{L}^{-1}[G(p)].$$

Príklad 6.3.2. Nájdite predmet k obrazu $F(p) = \dfrac{p+4}{(p+1)^2}$.

Riešenie. Upravme funkciu $F(p)$

$$F(p) = \frac{p+1+3}{(p+1)^2} = \frac{p+1}{(p+1)^2} + \frac{3}{(p+1)^2} = \frac{1}{(p+1)} + 3\frac{1}{(p+1)^2}.$$

Potom

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+1}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-a)^2}\right] = \mathrm{e}^{-t} + 3t\,\mathrm{e}^{-t}.$$

□

Z príkladu je vidieť, že nebude jednoduché nájsť predmet pre daný obraz. Núka sa otázka, ktoré funkcie môžu byť obrazom. Z nutnej podmienky predmetu vyplýva, že funkcia $F(p)$ môže byť obraz, ak:

- existuje reálne číslo α_0 také, že funkcia $F(p)$ je analytická v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$;
- v ľubovoľnej polrovine $\operatorname{Re} p \geq \alpha > \alpha_0$ je $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$.

Ak $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) \neq 0$, potom k funkcii F neexistuje predmet. Takými funkciami sú napr. p^n, $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt{p}$, $\sin p$ a iné.

Nasledujúca veta dáva postačujúcu podmienku na to, aby funkcia F bola obraz.

Veta 6.3.3. *Nech funkcia $F(p)$ je analytická v polrovine $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, $\lim\limits_{p\to\infty} F(p) = 0$ a $\int\limits_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} |F(p)|\,\mathrm{d}p$ konverguje pre $a > \alpha_0$. Potom funkcia*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} F(p)\,\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p$$

je predmet s indexom rastu nie väčším ako α_0.

Výpočet integrálu nie je jednoduchý, používa sa veta o reziduách. Pokiaľ sú obrazy racionálne funkcie, rozložíme ich na parciálne zlomky a použijeme lineárnosť spätnej Laplaceovej transformácie. V praxi sa často používajú tabuľky, ktoré obsahujú predmety a ich obrazy. Pre ilustráciu uvádzame niektoré najpoužívanejšie korešpondencie.

Predmet	**Obraz**		**Predmet**	**Obraz**
1	$\dfrac{1}{p}$		$\mathrm{e}^{at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$		$\mathrm{e}^{at}\cos\omega t$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$		t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$		$t^n\,\mathrm{e}^{at}$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$\sinh\omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$		$t\sin\omega t$	$\dfrac{2p\omega}{(p^2+\omega^2)^2}$
$\cosh\omega t$	$\dfrac{p}{p^2-\omega^2}$		$t\cos\omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

Príklad 6.3.4. Nájdite predmet pre funkciu $F(p) = \dfrac{5p}{p^3 - p^2 + 4p - 4}$.

Riešenie. Jeden koreň rovnice $p^3 - p^2 + 4p - 4 = 0$ je $p = 1$ a vydelením dostaneme $p^3 - p^2 + 4p - 4 = (p-1)(p^2+4)$. Ďalšie korene rovnice sú $p = 2\mathrm{i}$, $p = -2\mathrm{i}$. Rozložíme funkciu $F(p)$ na parciálne zlomky

$$F(p) = \frac{5p}{p^3 - p^2 + 4p - 4} = \frac{A}{p+2\mathrm{i}} + \frac{B}{p-2\mathrm{i}} + \frac{C}{p-1}.$$

Vynásobením tejto rovnosti výrazom $p^3 - p^2 + 4p - 4$ dostaneme

$$5p = A(p-2\mathrm{i})(p-1) + B(p+2\mathrm{i})(p-1) + C(p^2+4).$$

Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách p dostaneme systém rovníc

$$\begin{aligned} A + B + C &= 0 \\ -(1+2\mathrm{i})A - (1-2\mathrm{i})B &= 5 \\ 2\mathrm{i}\,A - 2\mathrm{i}\,B + 4C &= 0. \end{aligned}$$

Riešením tohto systému sú čísla $A = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}$, $B = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}$, $C = 1$. Potom

$$F(p) = \frac{5p}{p^3 - p^2 + 4p - 4} = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)\frac{1}{p+2\mathrm{i}} + \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right)\frac{1}{p-2\mathrm{i}} + \frac{1}{p-1}$$

a predmet má predpis

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} + \left(-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^t.$$

Pomocou Eulerových vzorcov môžeme f upraviť na tvar

$$f(t) = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)(\cos 2t - \mathrm{i}\sin 2t) + \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\right)(\cos 2t + \mathrm{i}\sin 2t) + \mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t - \cos 2t + 2\sin 2t.$$

$\square$

Laplaceova transformácia sa používa na riešenie diferenciálnych, integrálnych, integro-diferenciálnych rovníc a ich systémov, ktoré sa vyskytujú pri riešení problémov vo fyzike. Táto transformácia prevádza tieto rovnice na algebrické rovnice a ich systémy, resp. na iný typ diferenciálnych rovníc, ktoré sú niekedy jednoduchšie riešiteľné.

Príklad 6.3.5. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice s danými počiatočnými podmienkami.

$$x'' - 3x' + 2x = 2\sin t, \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 2.$$

Riešenie. Nájdeme Laplaceov obraz danej rovnice. Ak $x(t) \risingdotseq X(p)$ a $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, potom

$$\begin{aligned} x''(t) &\risingdotseq p^2X(p) - p - 2 \\ x'(t) &\risingdotseq pX(p) - 1. \end{aligned}$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice dostaneme

$$X(p)\left(p^2 - 3p + 2\right) - p + 1 = \frac{2}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{p^3 - p^2 + p + 1}{(p^2+1)(p^2-3p+2)}.$$

Urobíme rozklad funkcie X na parciálne zlomky

$$X(p) = \frac{1}{10}(3+\mathrm{i})\frac{1}{p+\mathrm{i}} + \frac{1}{10}(3-\mathrm{i})\frac{1}{p-\mathrm{i}} + \frac{7}{5}\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}.$$

Potom riešením diferenciálnej rovnice s danými počiatočnými podmienkami je funkcia

$$x(t) = \frac{7}{5}\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + \frac{1}{10}(3+\mathrm{i})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{10}(3-\mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} = \frac{7}{5}\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + \frac{6}{10}\cos t + \frac{2}{10}\sin t.$$

□

Príklad 6.3.6. Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice s danými počiatočnými podmienkami: $x'' + tx' - 3x = 6t, \quad x(0) = 0,\ x'(0) = 0.$

Riešenie. Nájdeme Laplaceov obraz danej rovnice. Ak $x(t) \risingdotseq X(p)$ a $t \risingdotseq \frac{1}{p^2}$, potom

$$\begin{aligned} x''(t) &\risingdotseq p^2X(p) \\ x'(t) &\risingdotseq pX(p) \\ -tx'(t) &\risingdotseq (pX(p))'. \end{aligned}$$

Dosadením do diferenciálnej rovnice dostaneme

$$p^2X(p) - (pX(p))' - 3X(p) = \frac{6}{p^2} \quad \Rightarrow \quad X'(p) - \frac{p^2-4}{p}X(p) = -\frac{6}{p^3}.$$

Dostali sme lineárnu diferenciálnu rovnicu pre funkciu $X(p)$. Nebudeme ju podrobne riešiť. Jej všeobecným riešením je funkcia

$$X(p) = \frac{C}{p^4}\mathrm{e}^{\frac{p^2}{2}} + \frac{6}{p^4}.$$

Pre $C = 0$ dostaneme partikulárne riešenie $X(p) = \frac{6}{p^4}$, ktorého predmet $x(t) = t^3$ je riešením zadanej diferenciálnej rovnice s požadovanými počiatočnými podmienkami. □