Zápočtová písomka č. 1 (ÚMV/FRPa/19)

1. *Definujme logickú operáciu tabuľkou pravdivostných hodnôt:*

a	b	$a\nabla b$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Overte, či výrok $(a\nabla(b\nabla\neg a)) \Leftrightarrow (\neg b \wedge a)$ *je tautológia.*

Príklad je za 1.5 b. Vyplnením tabuľky pravdivostných hodnôt dostávame

a	b	$\neg a$	$b\nabla\neg a$	$a\nabla(b\nabla\neg a)$	$\neg b \wedge a$	$(a\nabla(b\nabla\neg a)) \Leftrightarrow (\neg b \wedge a)$
1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1

A teda výrok $(a\nabla(b\nabla\neg a)) \Leftrightarrow (\neg b \wedge a)$ je naozaj tautológia.

2. *V množine* $\mathbb{R}$ *riešte nerovnicu* $\sqrt{x^2-4x-12} > 3+2x$.

Príklad je za 3 b. Podmienka: Keďže výraz pod odmocninou musí byť nezáporný, tak $x^2-4x-12 = (x-6)(x+2) \geq 0$, čo platí pre všetky $x \in (-\infty,-2\rangle \cup \langle 6,+\infty)$. Vyšetrime hodnotu výrazu na pravej strane nerovnosti.

Ak $3+2x < 0$, t.j. $x < -\frac{3}{2}$, potom druhá odmocnina z nezáporného čísla je vždy väčšia ako ľubovoľné záporné číslo, a preto nerovnica je splnená pre všetky čísla z intervalu $[(-\infty,-2\rangle \cup \langle 6,+\infty)] \cap (-\infty,-\frac{3}{2}) = (-\infty,-2\rangle$.

Ak $3+2x \geq 0$, t.j. $x \geq -\frac{3}{2}$, potom umocnením oboch strán nerovnice na druhú dostaneme

$$\begin{aligned} x^2-4x-12 > 9+12x+4x^2 \;&\Leftrightarrow \\ 0 > 3x^2+16x+21 \;&\Leftrightarrow \\ 0 > 3(x+3)\left(x+\frac{7}{3}\right)&. \end{aligned}$$

Poslednej nerovnosti vyhovujú čísla $x \in \left(-3,-\frac{7}{3}\right)$, a preto riešením tejto vetvy je

$$x \in \left(-3,-\frac{7}{3}\right) \cap \left\langle -\frac{3}{2},+\infty\right) \cap [(-\infty,-2\rangle \cup \langle 6,+\infty)] = \emptyset.$$

Zhrnutím teda dostávame, že riešením pôvodnej nerovnosti je $(-\infty,-2\rangle \cup \emptyset = (-\infty,-2\rangle$.

3. *Vyšetrite párnosť/nepárnosť a ohraničenosť funkcie:* $h(x) = \dfrac{2x^2\left(\sin^2 x - 3\cos^3 x\right)}{x^2+1}$.

Príklad je za 3 b. Je zrejmé, že $D_h = \mathbb{R}$, a teda stačí overiť podmienku či $h(-x) = h(x)$ alebo $h(-x) = -h(x)$. Avšak

$$h(-x) = \frac{2(-x)^2\left(\sin^2(-x) - 3\cos^3(-x)\right)}{(-x)^2+1} = \frac{2x^2\left(\sin^2 x - 3\cos^3 x\right)}{x^2+1} = h(x),$$

kde sme uplatnili párnosť funkcie cos, t.j. $\cos(-x) = \cos x$ a nepárnosť funkcie sin, t.j. $\sin(-x) = -\sin x$ pre každé $x \in \mathbb{R}$. Teda funkcia h je párna a nie je nepárna.

Pozrime sa na absolútnu hodnotu funkcie h, t.j. pre každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$\left|\frac{2x^2\left(\sin^2 x - 3\cos^3 x\right)}{x^2+1}\right| = \frac{2x^2|\sin^2 x - 3\cos^3 x|}{x^2+1} \leq \frac{2x^2\left(|\sin^2 x| + 3|\cos^3 x|\right)}{x^2+1}$$
$$\leq \frac{2x^2 \cdot 4}{x^2+1} \leq \frac{8(x^2+1)}{x^2+1} = 8,$$

teda existuje $K = 8$ také, že pre všetky $x \in \mathbb{R}$ je $|h(x)| \leq K$, t.j. h je ohraničená na $\mathbb{R}$.

4. *Zistite, či je funkcia* $g : y = 4 - 3\arcsin(2x+1)$ *prostá. Ak áno, nájdite k nej inverznú funkciu a určte definičné obory oboch funkcií.*

Príklad je za 3 b. Definičným oborom je množina $D_g = \{x \in \mathbb{R} : |2x+1| \leq 1\} = \langle -1, 0\rangle$. Pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in \langle -1, 0\rangle$ máme

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \Leftrightarrow\ & 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \ \Leftrightarrow\ \arcsin(2x_1+1) < \arcsin(2x_2+1) \\ \Leftrightarrow\ & -3\arcsin(2x_1+1) > -3\arcsin(2x_2+1) \\ \Leftrightarrow\ & 4 - 3\arcsin(2x_1+1) > 4 - 3\arcsin(2x_2+1) \\ & g(x_1) > g(x_2), \end{aligned}$$

čo znamená, že g je klesajúca funkcia na D_g, a teda je prostá na D_g. Preto k nej inverzná funkcia na D_g existuje. Naviac hneď vieme, že $H_g = \langle g(0), g(-1)\rangle = \langle 4 - 3\pi/2, 4 + 3\pi/2\rangle$, pretože $g(0) = 4 - 3\arcsin(1) = 4 - 3\pi/2$ a z nepárnosti funkcie arkussínus dostaneme $g(-1) = 4 - 3\arcsin(-1) = 4 + 3\arcsin(1) = 4 + 3\pi/2$. Zo vzťahu $y = g(x)$ a $x = \overline{g}(y)$, kde $\overline{g} : H_g \to D_g$, dostávame

$$\begin{aligned} y = 4 - 3\arcsin(2\,\overline{g}(y) + 1) \Leftrightarrow\ & \frac{4-y}{3} = \arcsin(2\,\overline{g}(y) + 1) \\ \Leftrightarrow\ & \sin\left(\frac{4-y}{3}\right) = 2\,\overline{g}(y) + 1 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\sin\left(\frac{4-y}{3}\right) - 1}{2} = \overline{g}(y) = x, \end{aligned}$$

a teda inverzná funkcia k funkcii $g : y = 4 - 3\arcsin(2x+1)$ na $D_g = \langle -1, 0\rangle$ má tvar

$$\overline{g} : x = \frac{\sin\left(\frac{4-y}{3}\right) - 1}{2}, \quad y \in H_g = D_{\overline{g}} = \left\langle 4 - 3\frac{\pi}{2}, 4 + 3\frac{\pi}{2}\right\rangle.$$

5. *Nech* $f(x) = \ln x$ *a* $g(x) = \sqrt{1 - |x|}$. *Nájdite* $f \circ g$ *a* $g \circ f$ *a určte ich definičné obory.*

Príklad je za 2,5 b. Malo by byť jasné, že $D_f = (0, +\infty)$. Pre určenie D_g musíme vyriešiť nerovnosť $1 - |x| \geq 0$, t.j. $|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, čiže $D_g = \langle -1, 1\rangle$. Vieme, že definičný obor kompozície funkcií α, β je množina

$$D_{\alpha\circ\beta} = \{x \in D_\beta;\ \beta(x) \in D_\alpha\}$$

a predpis $(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ pre každé $x \in D_{\alpha\circ\beta}$. Preto

$$D_{f\circ g} = \{x \in \langle -1, 1\rangle;\ \sqrt{1 - |x|} \in (0, +\infty)\} = (-1, 1),$$

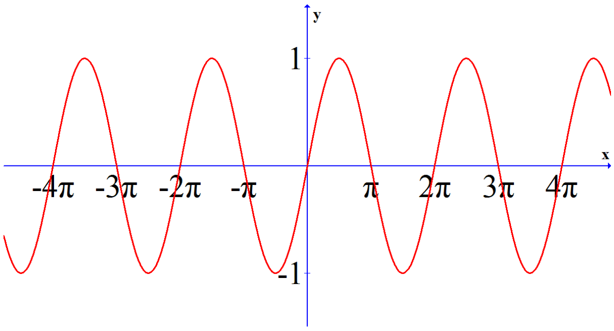
pretože $\sqrt{1 - |x|} > 0$ pre $x \in (-1, 1)$. Funkcia $f \circ g$ je potom daná predpisom $(f \circ g)(x) = \ln\sqrt{1 - |x|}$ pre $x \in (-1, 1)$. Ďalej pre funkciu $g \circ f$ je

$$D_{g\circ f} = \{x \in (0, +\infty);\ \ln x \in \langle -1, 1\rangle\} = \left\langle \frac{1}{e}, e\right\rangle,$$

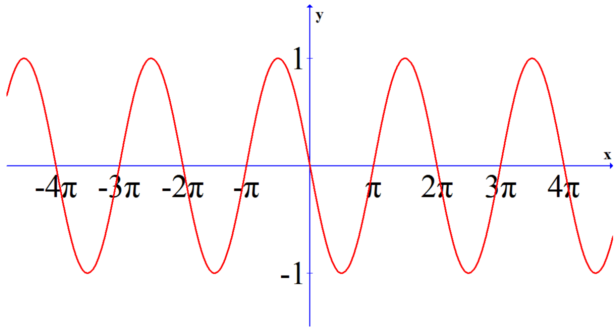
lebo riešením nerovnosti $\ln x \geq -1$ sú všetky čísla $x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$ a nerovnosti $\ln x \leq 1$ všetky čísla $0 < x \leq e^1 = e$. Potom $(g \circ f)(x) = \sqrt{1 - |\ln x|}$ pre $x \in \langle \frac{1}{e}, e\rangle$.

6. *Daná je funkcia* $f : y = \left|\sin\left(\frac{|x|}{2} + \pi\right)\right| - 1$. *Pomocou transformácií načrtnite jej graf.*

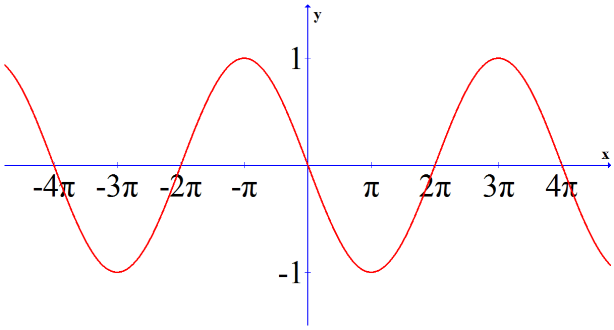
Príklad je za 2 b. Použitie jednotlivých transformácií a výsledných grafov je vidieť na nasledujúcej postupnosti obrázkov.



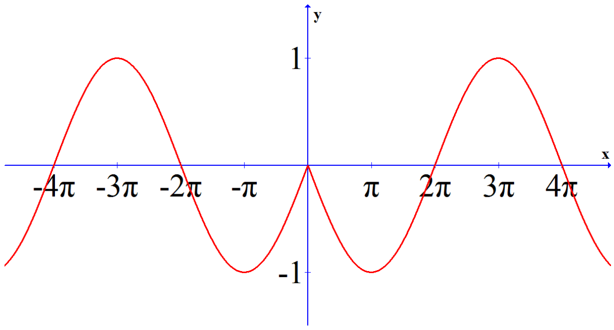
$y = \sin x$



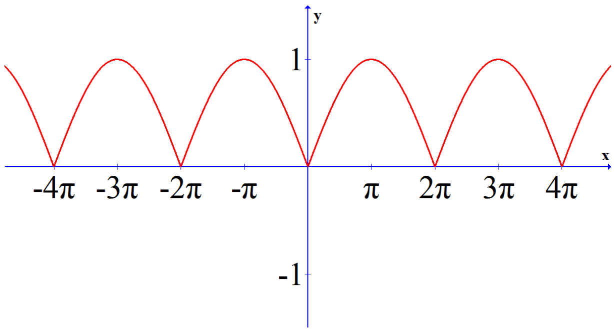
$y = \sin(x + \pi)$



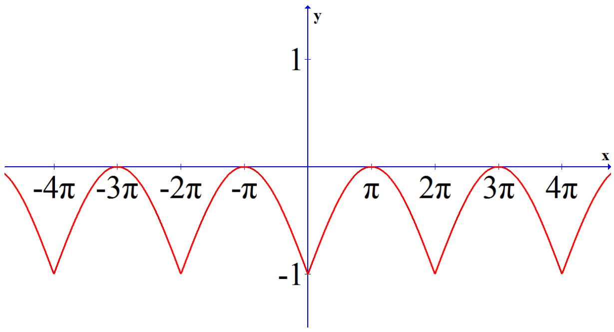
$y = \sin\left(\frac{x}{2} + \pi\right)$



$y = \sin\left(\frac{|x|}{2} + \pi\right)$



$y = \left|\sin\left(\frac{|x|}{2} + \pi\right)\right|$



$y = \left|\sin\left(\frac{|x|}{2} + \pi\right)\right| - 1$